Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(4), 2043-2048
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124208

Hans汉斯

双偶数阶幻方构造规律的矩阵化

朱雅妮[*]**，刘兴祥**[#]

延安大学数学与计算机科学学院，陕西 延安

收稿日期：2023年3月26日；录用日期：2023年4月21日；发布日期：2023年4月29日

摘 要

以和幻方的定义及性质为基础，利用矩阵化解决双偶数阶(4*n*阶)幻方，通过分块矩阵的运算，给出双偶数阶幻方构造的通法。

关键词

和幻方，双偶数阶幻方，分块矩阵

Matrix of Construction Law of Magic Squares of Double Even Order

Yani Zhu[*]**, Xingxiang Liu**[#]

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi

Received: Mar. 26th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 29th, 2023

Abstract

Based on the definition and properties of sum magic squares, the paper solves the magic squares of double even order (4n order) by matrix, and gives the general method of constructing magic squares of double even order by the operation of block matrix.

Keywords

Sum Magic Square, Magic Square of Double Even Order, Block Matrix

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 朱雅妮, 刘兴祥. 双偶数阶幻方构造规律的矩阵化[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 2043-2048.
DOI: 10.12677/aam.2023.124208

1. 引言

幻方是我国先祖最早发现的一个著名组合算题，现如今，幻方仍然是组合数学的研究课题之一，文献[1]-[10]是关于幻方的研究成果。将矩阵和幻方结合起来，主要研究双偶数阶幻方的构造规律，给出一种矩阵化方法构造幻方，利用矩阵的各类运算解决幻方难题。文献[11] [12] [13]系统地介绍了现代矩阵理论与应用的基本内容。

2. 预备知识

定义 1：[1]设 F 是数域，如果矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times m}\in F^{m\times m}$ 满足

$$\begin{aligned}
&A\left(\sum_{i=1}^{m}E_{i1}\left(m,1\right)\right)=S_r\left(\sum_{j=1}^{m}E_{j1}\left(m,1\right)\right),\\
&\left(\sum_{i=1}^{m}E_{1i}\left(1,m\right)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{m}E_{1j}\left(1,m\right)\right),\\
&S_r=S_c=S.
\end{aligned}$$

则称矩阵 A 为数域 F 上的 m 阶弱和幻方，并称 S 为 m 阶弱和幻方 A 的幻和。

定义 2：[1]设 F 是数域，如果矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times m}\in F^{m\times m}$ 满足

$$\begin{aligned}
&A\left(\sum_{i=1}^{m}E_{i1}\left(m,1\right)\right)=S_r\left(\sum_{j=1}^{m}E_{j1}\left(m,1\right)\right),\\
&\left(\sum_{i=1}^{m}E_{1i}\left(1,m\right)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{m}E_{1j}\left(1,m\right)\right),\\
&S_r=S_c=S,\\
&\sum_{i=1}^{m}E_{1i}\left(1,m\right)AE_{i1}\left(m,1\right)=\sum_{i=1}^{m}E_{1i}\left(1,m\right)AE_{m+1-i,1}\left(m,1\right)=S.
\end{aligned}$$

则称矩阵 A 为数域 F 上的 m 阶和幻方，并称 S 为 m 阶和幻方 A 的幻和。

定义 3：[1]设 F 是数域，如果矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times m}\in F^{m\times m}$ 满足

$$\begin{aligned}
&A\left(\sum_{i=1}^{m}E_{i1}\left(m,1\right)\right)=S_r\left(\sum_{j=1}^{m}E_{j1}\left(m,1\right)\right),\\
&\left(\sum_{i=1}^{m}E_{1i}\left(1,m\right)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{m}E_{1j}\left(1,m\right)\right),\\
&S_r=S_c=S,\\
&\sum_{i=1}^{m}E_{1i}\left(1,m\right)AE_{i1}\left(m,1\right)=\sum_{i=1}^{m}E_{1i}\left(1,m\right)AE_{m+1-i,1}\left(m,1\right)=S,\\
&a_{ij}\neq a_{kl}\left(i\neq k\text{ 或 }j\neq l,i,j,k,l=1,2,\cdots,m\right).
\end{aligned}$$

则称矩阵 A 为数域 F 上的 m 阶异元和幻方，并称 S 为 m 阶异元和幻方 A 的幻和。

定义 4：[1]设 F 是数域，如果矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times m}\in\left\{1,2,\cdots,m^2\right\}^{m\times m}$ 满足

$$A\left(\sum_{i=1}^{m}E_{i1}(m,1)\right)=S_r\left(\sum_{j=1}^{m}E_{j1}(m,1)\right),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}E_{1i}(1,m)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{m}E_{1j}(1,m)\right),$$

$$S_r=S_c=S,$$

$$\sum_{i=1}^{m}E_{1i}(1,m)AE_{i1}(m,1)=\sum_{i=1}^{m}E_{1i}(1,m)AE_{m+1-i,1}(m,1)=S,$$

$$a_{ij}\neq a_{kl}\left(i\neq k\text{ 或 }j\neq l,i,j,k,l=1,2,\cdots,m\right).$$

则称矩阵 A 为数域 F 上的 m 阶始元和幻方，并称 S 为 m 阶始元和幻方 A 的幻和。

定义 5：[1]设 F 是数域，如果矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times m}\in\left\{a+1,a+2,\cdots,a+m^2\right\}^{m\times m}$ 满足

$$A\left(\sum_{i=1}^{m}E_{i1}(m,1)\right)=S_r\left(\sum_{j=1}^{m}E_{j1}(m,1)\right),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}E_{1i}(1,m)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{m}E_{1j}(1,m)\right),$$

$$S_r=S_c=S,$$

$$\sum_{i=1}^{m}E_{1i}(1,m)AE_{i1}(m,1)=\sum_{i=1}^{m}E_{1i}(1,m)AE_{m+1-i,1}(m,1)=S,$$

$$a_{ij}\neq a_{kl}\left(i\neq k\text{ 或 }j\neq l,i,j,k,l=1,2,\cdots,m\right).$$

则称矩阵 A 为数域 F 上的 m 阶连元和幻方，并称 S 为 m 阶连元和幻方 A 的幻和。

3. 主要结果

将双偶数阶幻方用矩阵化方法表示出来，利用矩阵的运算解决双偶数阶幻方问题。

规定 A_{pq} 表示矩阵 A 中第 p 行 q 列的分块矩阵，$A_{pq}\left(i_p,j_q\right)$ 表示矩阵 A 中第 p 行 q 列的分块矩阵的第 i_p 行 j_q 列。

定理 1：首先构造 $4n$ 阶矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{4n\times 4n}$，其中 $a_{ij}=4n(i-1)+j$，$i,j=1,2,\cdots,4n$，然后将矩阵 A 分为 n^2 块，每块为 4 行 4 列的分块矩阵，即

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$$

$$i_p,j_q=1,2,3,4,p,q=1,2,\cdots,n,$$

接着设 $4n$ 阶矩阵 $B=\left(b_{ij}\right)_{4n\times 4n},C=\left(c_{ij}\right)_{4n\times 4n}$，同样将矩阵 B、C 分为 n^2 块，每块为 4 行 4 列的分块矩阵，其中

$$B_{pq}\left(i_p,j_q\right)=\begin{cases}A_{pq}\left(i_p,j_q\right),i_p\neq j_q\text{ 且 }i_p+j_q\neq n+1\\0,\text{其它}\end{cases},i_p,j_q=1,2,3,4,p,q=1,2,\cdots,n$$

$$C_{pq}\left(i_p,j_q\right)=\begin{cases}A_{pq}\left(5-i_p,5-j_q\right),i_p=j_q\text{ 或 }i_p+j_q=n+1\\0,\text{其它}\end{cases},i_p,j_q=1,2,3,4,p,q=1,2,\cdots,n$$

然后令

$$F=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix} C_{nn} & C_{n(n-1)} & \cdots & C_{n1} \\ C_{(n-1)n} & C_{(n-1)(n-1)} & \cdots & C_{(n-1)1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{1(n-1)} & \cdots & C_{11} \end{bmatrix}$$

则矩阵 $H=F+G$ 即为通过矩阵化方法构造得出的 $4n$ 阶始元和幻方。

证明：要证明矩阵 H 为和幻方，则需证明矩阵 H 的每行每列及对角线的和均相等，由于双偶数阶和幻方是利用 $n\times n$ 个同型的分块矩阵构造得来，所以要想证明矩阵 H 每行每列和相等，只需要证明每一个分块矩阵为弱和幻方即可，且矩阵 H 的行和列和为 n 倍的弱和幻方的幻和。

$$H=F+G=\begin{bmatrix} B_{11}+C_{nn} & B_{12}+C_{n(n-1)} & \cdots & B_{1n}+C_{n1} \\ B_{21}+C_{(n-1)n} & B_{22}+C_{(n-1)(n-1)} & \cdots & B_{2n}+C_{(n-1)1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}+C_{1n} & B_{n2}+C_{1(n-1)} & \cdots & B_{nn}+C_{11} \end{bmatrix}$$

所以

$$H_{pq}\left(i_p,j_q\right)=B_{pq}\left(i_p,j_q\right)+C_{(n+1-p)\times(n+1-q)}\left(i_p,j_q\right)$$

其中

$$B_{pq}\left(i_p,j_q\right)=\begin{bmatrix} 0 & a_{4(p-1)+1,4(q-1)+2} & a_{4(p-1)+1,4(q-1)+3} & 0 \\ a_{4(p-1)+2,4(q-1)+1} & 0 & 0 & a_{4(p-1)+2,4(q-1)+4} \\ a_{4(p-1)+3,4(q-1)+1} & 0 & 0 & a_{4(p-1)+3,4(q-1)+4} \\ 0 & a_{4(p-1)+4,4(q-1)+2} & a_{4(p-1)+4,4(q-1)+3} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{(n+1-p)\times(n+1-q)}\left(i_p,j_q\right)=\begin{bmatrix} a_{4(n-p)+4,4(n-q)+4} & 0 & 0 & a_{4(n-p)+4,4(n-q)+1} \\ 0 & a_{4(n-p)+3,4(n-q)+3} & a_{4(n-p)+3,4(n-q)+2} & 0 \\ 0 & a_{4(n-p)+2,4(n-q)+3} & a_{4(n-p)+2,4(n-q)+2} & 0 \\ a_{4(n-p)+1,4(n-q)+4} & 0 & 0 & a_{4(n-p)+1,4(n-q)+1} \end{bmatrix}$$

所以

$$H_{pq}\left(i_p,j_q\right)=\begin{bmatrix} h_{4(p-1)+1,4(q-1)+1} & h_{4(p-1)+1,4(q-1)+2} & h_{4(p-1)+1,4(q-1)+3} & h_{4(p-1)+1,4(q-1)+4} \\ h_{4(p-1)+2,4(q-1)+1} & h_{4(p-1)+2,4(q-1)+2} & h_{4(p-1)+2,4(q-1)+3} & h_{4(p-1)+2,4(q-1)+4} \\ h_{4(p-1)+3,4(q-1)+1} & h_{4(p-1)+3,4(q-1)+2} & h_{4(p-1)+3,4(q-1)+3} & h_{4(p-1)+3,4(q-1)+4} \\ h_{4(p-1)+4,4(q-1)+1} & h_{4(p-1)+4,4(q-1)+2} & h_{4(p-1)+4,4(q-1)+3} & h_{4(p-1)+4,4(q-1)+4} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{4(n-p)+4,4(n-q)+4} & a_{4(p-1)+1,4(q-1)+2} & a_{4(p-1)+1,4(q-1)+3} & a_{4(n-p)+4,4(n-q)+1} \\ a_{4(p-1)+2,4(q-1)+1} & a_{4(n-p)+3,4(n-q)+3} & a_{4(n-p)+3,4(n-q)+2} & a_{4(p-1)+2,4(q-1)+4} \\ a_{4(p-1)+3,4(q-1)+1} & a_{4(n-p)+2,4(n-q)+3} & a_{4(n-p)+2,4(n-q)+2} & a_{4(p-1)+3,4(q-1)+4} \\ a_{4(n-p)+1,4(n-q)+4} & a_{4(p-1)+4,4(q-1)+2} & a_{4(p-1)+4,4(q-1)+3} & a_{4(n-p)+1,4(n-q)+1} \end{bmatrix}$$

1) 行和、列和

分块矩阵的行和：

$$Sr_{pq} = \sum_{j_p=1}^{4} h_{4(p-1)+i_p,4(q-1)+j_q}, i_p = 1,2,3,4, p,q = 1,2,\cdots,n$$

代入 $a_{ij} = 4n(i-1)+j$ 中可得 $Sr_{pq} = 32n^2+2$

分块矩阵的列和：

$$Sc_{pq} = \sum_{i_p=1}^{4} h_{4(p-1)+i_p,4(q-1)+j_q}, j_p = 1,2,3,4, p,q = 1,2,\cdots,n$$

代入 $a_{ij} = 4n(i-1)+j$ 中可得 $Sc_{pq} = 32n^2+2$

$$Sr_{pq} = Sc_{pq} = 32n^2+2$$

所以每一个分块矩阵都为弱和幻方，则矩阵 H 的行和、列和分别为：

$$S_r = n\cdot Sr_{pq} = 32n^3+2n$$

$$S_c = n\cdot Sc_{pq} = 32n^3+2n$$

2) 主对角线和

D 中的主对角线元素即为 A 中的主对角线元素，即

$$\begin{aligned} S_{md} &= \sum_{i=1}^{4n} a_{ii} = 1+(4n+2)+(2\cdot 4n+3)+(3\cdot 4n+4)+\cdots+((4n-1)\cdot 4n+4n) \\ &= (1\cdot 4n+2\cdot 4n+3\cdot 4n+\cdots+(4n-1)\cdot 4n)+(1+2+\cdots+4n) \\ &= 32n^3+2n \end{aligned}$$

3) 副对角线和

D 中的副对角线元素即为 A 中的副对角线元素，即

$$\begin{aligned} S_{cd} &= \sum_{j=1}^{4n} a_{4n+1-j,j} = ((4n-1)\cdot 4n+1)+((4n-2)\cdot 4n+2)+\cdots+(4n+(4n-1))+4n \\ &= ((4n-1)\cdot 4n+(4n-2)\cdot 4n+\cdots+1\cdot 4n)+(1+2+\cdots+(4n-1)+4n) \\ &= 32n^3+2n \end{aligned}$$

4) $S = S_r = S_c = S_{md} = S_{cd} = 32n^3+2n$

即得证矩阵 D 为 $4n$ 阶(双偶数阶)始元幻方， $S = 32n^3+2n$ 为幻和。

根据矩阵性质可知，有以下推论成立。

推论 1：如果一个 $4n$ 阶矩阵 H 是一个始元和幻方，则 H^{T} 也是一个始元和幻方。

证明：矩阵 H 的第 i 行第 j 列元素就是 H^{T} 的第 j 行第 i 列元素，即有 $[H]_{ij} = [H^{\mathrm{T}}]_{ji}$，通过矩阵的转置未改变幻方中的元素，所以幻方 H^{T} 中的元素必然是 $1\sim(4n)^2$ 中的两两互不相同的数。由于矩阵的转置只是做了元素交换，未改变原有幻方的每一行及每一列的和，只是把行和列进行了交换，所以 H^{T} 中的元素必然有 $S_r = S_c = S_{md} = S_{cd} = 32n^3+2n$，所以 H^{T} 也是一个始元和幻方，幻和为 $32n^3+2n$。

推论 2：如果一个 $4n$ 阶矩阵 H 是一个始元和幻方， $A = (a)_{(4n)\times(4n)}, a\in N^*$，则 $A+H$ 是一个连元和幻方。

证明：由于 H 是一个始元和幻方，则 H 中元素两两互不相等，所以 $A+H$ 中的元素必然两两互不相等；又由于 $A+H$ 只是给矩阵中每个元素加一个数 a，所以 $A+H$ 的每一行及每一列的和都比原有幻方的

大 $a(4n)$， $A+H$ 中的元素必然有 $S_r=S_c=S_{md}=S_{cd}=32n^3+2n+a\cdot 4n$ ，所以 $A+H$ 是一个连元和幻方，幻和为 $32n^3+2n+a\cdot 4n$ 。

推论 3：如果一个 $4n$ 阶矩阵 H 是一个始元和幻方，则 aH 是一个异元和幻方($a\in N^*$)。

证明：由于 H 是一个始元和幻方，则 H 中元素两两互不相等，所以 aH 中的元素必然两两互不相等；又由于 aH 只是给矩阵中每个元素乘以一个数 a，所以 aH 的每一行及每一列的和都是原有幻方的 a 倍，aH 中的元素必然有 $S_r=S_c=S_{md}=S_{cd}=a\left(32n^3+2n\right)$，所以 aH 是一个异元和幻方，幻和为 $a\left(32n^3+2n\right)$。

4. 小结

文章给出了一种双偶数阶(4n 阶)幻方的构造方法，首先对构造好的矩阵 A 进行分块，根据 A 中的分块矩阵来构造矩阵 B、C，然后分别利用 B、C 中的分块矩阵来构造矩阵 F、G，最后通过矩阵的加法运算得出双偶数阶幻方的构造通法。关于此法是否可以推广于其它类型阶幻方的构造规律中，还有待于做进一步地研究。

参考文献

[1] 郭萍, 刘兴祥. 和幻阵的定义及代数性质[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2017, 36(1): 21-27.

[2] 郭萍. 幻阵的构造与计数问题研究[D]: [硕士学位论文]. 延安: 延安大学, 2019.

[3] 张婧. 基于用分块矩阵构造幻方的研究[D]: [硕士学位论文]. 延安: 延安大学, 2021.

[4] 张婧, 刘兴祥, 董朦朦. 双偶数阶完美和幻方的定义及其构造方法[J]. 河南科学, 2020, 38(7): 1043-1046.

[5] 董朦朦, 刘兴祥, 田雨禾. 幻方可以分解为两个正交拉丁方的线性组合[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2018, 32(8): 181-188.

[6] 张婧, 刘兴祥, 施钊. 完美和幻方的定义及其构造方法[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2020, 38(4): 420-423.

[7] 刘兴祥, 刘娟娟, 张婧. 弱幻方的代数系统[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2020, 39(2): 24-27.

[8] 何敏梅, 刘兴祥, 郭萍. 4k 阶连元幻方的函数构造法[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2017, 31(11): 211-216.

[9] 朱雅妮, 刘兴祥, 张宇婷. 构造奇数阶幻方的杨辉口诀法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(1): 166-172.

[10] 张宇婷, 刘兴祥, 朱雅妮. 单偶数阶和幻方的一种构造方法[J]. 应用数学进展, 2022, 11(12): 8917-8922.

[11] Horn, R.A. and Johnson, C.R. Matrix Analysis (卷 1) [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2005.

[12] Horn, R.A. and Johnson, C.R. Matrix Analysis (卷 2) [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2005.

[13] Horn, R.A. and Johnson, C.R. Matrix Analysis (卷 3) [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2009.