

具有随机逆动态的马尔可夫切换随机低阶非线性系统的有限时间镇定

张 雪, 赵桂华

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2023年3月13日; 录用日期: 2023年4月9日; 发布日期: 2023年4月19日

摘 要

本文研究了一类具有马尔可夫切换和随机逆动态的随机低阶非线性系统的有限时间镇定问题。我们首先在弱解的框架下给出了有限时间稳定性理论, 然后结合李雅普诺夫函数和加幂积分器技术构造了状态反馈控制器。证明了具有马尔可夫开关的随机低阶非线性系统的平凡弱解是全局有限时间稳定的。最后, 通过仿真实例验证了所提设计方法的有效性。

关键词

有限时间稳定, 马尔可夫切换, 随机逆动态, 随机非线性系统, 状态反馈控制器

Finite-Time Stabilization of Markovian Switched Stochastic Low-Order Nonlinear Systems with Stochastic Inverse Dynamics

Xue Zhang, Guihua Zhao

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 13th, 2023; accepted: Apr. 9th, 2023; published: Apr. 19th, 2023

Abstract

In this paper, we investigate the finite-time stabilization of a class of stochastic low-order nonlinear systems with Markovian switching and stochastic inverse dynamics. We first present the finite-time stability theory under the framework of weak solutions. Then, combining the Lyapunov function and adding a power integrator technique, a state feedback controller is designed to guarantee global finite-time stability in probability of stochastic low-order nonlinear systems with

finite-time stochastic inverse dynamics. Finally, the effectiveness of the proposed design method is verified by a simulation example.

Keywords

Finite-Time Stability, Markovian Switching, Stochastic Inverse Dynamics, Stochastic Nonlinear Systems, State Feedback Controller

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

自 20 世纪 90 年代以来, 随机非线性系统的镇定问题得到了广泛的研究。与渐近稳定系统[1] [2] [3] 相比, 有限时间稳定系统具有更快的收敛速度、更高的精度和更好的抗干扰能力[4] [5]。因此, 在过去的几十年里, 有限时间稳定问题受到了各个研究领域学者的广泛关注。例如, Yin 等人[6]解决了随机非线性系统的有限时间稳定性问题, 在[7]中研究了严格反馈形式下随机非线性系统的有限时间稳定性。Zhai 等人[8]利用状态反馈研究了一类随机非线性系统的全局有限时间镇定, 在[9]中研究了随机高阶非线性系统的有限时间输出反馈镇定。此外, 有限时间控制已应用于航天器系统[4]和机械系统[10]。

同时, 具有马尔可夫切换的系统也引起了广泛的关注。因为马尔可夫切换系统常被用来描述许多物理系统, 这些物理系统经常发生不可预测的结构变化, 如随机故障、突然的环境扰动、非线性物体上工作点的突然变化等[11]。Mao [12]研究了具有马尔可夫切换的一般随机非线性微分方程的指数稳定性。Zhao 和 Liu [13]建立了弱解框架下非局部利普希茨随机时变非线性系统的随机有限时间稳定性理论, 研究了一类具有马尔可夫切换的随机高阶非线性系统的有限时间镇定问题, 并利用所提出的理论严格分析了闭环系统弱解的存在性和有限时间稳定性。事实上, 马尔可夫切换已被广泛用于模拟许多真实系统, 如生物系统、制造系统和人口系统[14] [15]。

同时, 由于随机逆动力学被广泛应用于各种工程应用中, 影响着实际控制系统的性能, 其研究一直在控制理论和技术的发展中发挥着重要作用。Tsinias [16]和 Tang 等人[17]分别提出了随机输入状态稳定性(SISS)的概念。Zhao 等人[18]发展了随机有限时间稳定性理论, 研究了具有逆动力学的非局部利普希茨随机非线性系统弱解意义上的有限时间稳定性。但是到目前为止, 对于具有随机逆动力学的马尔可夫切换随机非线性系统, 还没有得到有限时间稳定性的结果。本文给出了具有随机逆动力学的马尔可夫切换随机低阶非线性系统的有限时间稳定性定理, 并求解了该系统的有限时间镇定问题。主要贡献如下:

1) 就作者所知, 对于具有随机逆动力学的马尔可夫切换随机低阶非线性系统, 还没有研究过有限时间的镇定问题。

2) 与随机高阶系统相比, 我们考虑了一类 $p_k < 1$ 的随机低阶系统。这两类系统的根本区别请见文献[19]的注释 2。

本文组织结构如下, 在第 2 节中, 我们介绍了一些预备知识和引理; 第 3 节中给出状态反馈控制器的设计和分析; 第 4 节给出了数值模拟实例; 第 5 节给出结论。

2. 预备知识

本文将使用以下符号。 R_+ 表示所有非负实数的集合; R^n 表示实 n 维空间; $R^{n \times m}$ 为 $n \times m$ 实矩阵空间;

对于给定的向量或矩阵 Z , Z^T 表示它的转置, $\text{Tr}(Z)$ 表示 Z 为方阵时的迹; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积; $\|\cdot\|$ 表示欧几里得向量范数和 F-范数; S 表示集合 $\{1, 2, \dots, N\}$; $C^2(R^d \times S)$ 表示 $R^d \times S$ 上的所有非负函数 $V(x, r)$ 在 x 上连续二次可微; K 表示所有函数的集合: $R_+ \rightarrow R_+$, 它们是连续的, 严格递增且在零处消失; K_∞ 表示 K 类且无界的所有函数的集合。

考虑下面具有马尔可夫切换的随机系统:

$$dx(t) = f(t, x(t), r(t))dt + g(t, x(t), r(t))dw(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

其中 $f: R_+ \times R^n \times S \rightarrow R^d$ 和 $g: R_+ \times R^d \times S \rightarrow R^{d \times m}$ 是博雷尔可测的, $x(0)$ 是分布具有紧支撑的随机变量, $r(0) \in S$ 是概率空间上的随机变量。

假设 1 $r(t)$ 是在 S 上取值且在概率空间上右连续的马尔可夫链, 其生成器 $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N \times N}$ 由下面的式子给定

$$P\{r(t+\Delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & i = j, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\Delta > 0$, $o(\Delta)$ 是相对于 Δ 的高阶无穷小。这里, 如果 $i \neq j$ 时, 有

$$\gamma_{ii} = -\sum_{j \neq i} \gamma_{ij},$$

则 $\gamma_{ij} \geq 0$ 是 i 到 j 的转移率。

定义 1 [13] 如果在概率空间 $(\Omega^x, \mathcal{F}^x, P^x)$ 上存在连续随机过程 $x(t)$, 其过滤 $\{\mathcal{F}_t^x\}_{t \geq 0}$ 满足通常条件, 一个满足 $P^x\{\omega^x = 0\} = 1$ 的 m 维 $\{\mathcal{F}_t^x\}$ -自适应的布朗运动 $w(t)$ 和一个在 $[0, +\infty)$ 上 $\{\mathcal{F}_t^x\}$ -自适应的马尔可夫链 $r^x(t)$ 使得 (i) $x(0)$ 有给定的分布, (ii) $r^x(t)$ 有给定的初始分布和转移函数, (iii) 对 $\forall t \geq 0$,

$$\int_0^t \|f(s, x(s), r^x(s))\| ds < \infty \quad \text{a.s.} \text{ 和 } \int_0^t \|g(s, x(s), r^x(s))\|^2 dw^x(s) < \infty \quad \text{a.s.}, \quad (\text{iv})$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s), r^x(s)) ds + \int_0^t g(s, x(s), r^x(s)) dw^x(s), \quad (3)$$

则对 $t \in [0, \infty)$, $(x(t), w^x(t), r^x(t), \Omega^x, \mathcal{F}^x, \{\mathcal{F}_t^x\}_{t \geq 0}, P^x)$ 或 $x(t)$ 叫做系统(1)的全局弱解。

定义 2 [13] 对任意给定的 $V \in C^2(R^n \times S)$, 与(1)相关联的算子 $\mathcal{L}V$ 定义为

$$\mathcal{L}V(t, x, i) = V_x(x, i) f(t, x, i) + \frac{1}{2} \text{Tr}[g^T(t, x, i) V_{xx}(x, i) g(t, x, i)] + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} V(x, j). \quad (4)$$

定义 3 [13] 如果对于系统(1)的任意全局弱解 $(x(t), w^x(t), r^x(t), \Omega^x, \mathcal{F}^x, \{\mathcal{F}_t^x\}_{t \geq 0}, P^x)$, 简单记为 $x(t)$, 有以下情况成立:

i) 依概率有限时间吸引: 第一次撞击时间 $\tau^x = \inf\{t \geq 0 : x(t) = 0\}$, 也就是所谓的随机停时, 是几乎处处有限的, 即 $P^x\{\tau^x < \infty\} = 1$;

ii) 依概率稳定: $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 存在一类 K 函数 β 使得 $P^x\left\{\sup_{t \geq 0} \|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|)\right\} \geq 1 - \varepsilon$ 。

那么称系统(1)的平凡弱解是全局依概率有限时间稳定的。

考虑下面的系统:

$$\begin{cases} dz(t) = f_1(t, z(t), x(t), r(t))dt + g_1(t, z(t), x(t), r(t))dw(t), \\ dx(t) = f_2(t, z(t), x(t), r(t))dt + g_2(t, z(t), x(t), r(t))dw(t). \end{cases} \quad (5)$$

其中 $x \in R^d$, $z \in R^m$, $d+m=n$, 令 $y(t) = (z^T(t), x^T(t))^T$,
 $f(t, y(t), r(t)) = (f_1^T(t, z(t), x(t), r(t)), f_2^T(t, z(t), x(t), r(t)))^T$,
 $g(t, y(t), r(t)) = (g_1^T(t, z(t), x(t), r(t)), g_2^T(t, z(t), x(t), r(t)))^T$.

定理 1 对每一 $i \in S$, 假设 $f(t, y, i)$ 和 $g(t, y, i)$ 在 $R_+ \times R^n$ 上是联合连续的。如果存在两个函数 $V_1 \in C^2(R^m \times S)$, $V_2 \in C^2(R^d \times S)$ 和 K_∞ 函数 α_{1z} , α_{2z} , α_{1x} , α_{2x} , 常数 $c > 0$, $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$ 使得对所有的 $(z, i) \in R^m \times S$, $(x, i) \in R^d \times S$ 有

$$\alpha_{1z}(\|z\|) \leq V_1(z, i) \leq \alpha_{2z}(\|z\|), \quad (6)$$

$$\alpha_{1x}(\|x\|) \leq V_2(x, i) \leq \alpha_{2x}(\|x\|), \quad (7)$$

$$\mathcal{L}[V_1(z, i) + V_2(x, i)] \leq -c[(V_1(z, i))^{\delta_1} + (V_2(x, i))^{\delta_2}], \quad (8)$$

那么系统(1)存在弱解并且系统(5)的平凡弱解是依概率有限时间稳定的。

证明: 参考文献[13], 我们可以证明弱解的存在性并且构造(5)的近似解, 然后用文献[18]的方法证明定理的全局依概率有限时间稳定性。

引理 1 [20]对任意实数 y 和 $0 < q \leq 1$, 有下面的不等式成立

$$(\|y_1\| + \|y_2\| + \dots + \|y_d\|)^q \leq \|y_1\|^q + \|y_2\|^q + \dots + \|y_d\|^q. \quad (9)$$

引理 2 [21]设 q 是一个奇数, 则有下面的不等式成立

$$\|x - y\|^q \leq 2^{q-1} \|x^q - y^q\|, \quad \forall x, y \in R, \quad (10)$$

$$\left\| \frac{1}{x^q} - \frac{1}{y^q} \right\| \leq 2^{1-\frac{1}{q}} \|x - y\|^{\frac{1}{q}}, \quad \forall x, y \in R, \quad (11)$$

引理 3 [22]假设 n 和 m 是正实数, $a \geq 0, b \geq 0$ 和 $\pi \geq 0$ 是连续函数。那么对任意常数 $c > 0$,

$$a^n b^m \pi \leq c \cdot a^{n+m} + \frac{m}{n+m} \left[\frac{n}{c(n+m)} \right]^{\frac{n}{m}} b^{n+m} \pi^{\frac{n+m}{m}} \leq a^{n+m} + b^{n+m} \pi^{\frac{n+m}{m}}. \quad (12)$$

3. 有限时间镇定

3.1. 问题表述

考虑由下列带有马尔可夫切换的随机微分方程描述的系统:

$$\begin{aligned} dz(t) &= f_z(z(t), x(t), r(t))dt + g_z(z(t), x(t), r(t))d\omega(t), \\ dx_k(t) &= [x_2^{p_k}(t) + f_k(z(t), x(t), r(t))]dt + g_k(z(t), x(t), r(t))d\omega(t), \quad k=1, \dots, d-1 \\ dx_d(t) &= [u^{p_d}(x(t), r(t)) + f_d(z(t), x(t), r(t))]dt + g_d(z(t), x(t), r(t))d\omega(t), \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $z \in R^m$, 是不可测的随机逆动态; $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 是系统状态; $u \in R^d$ 是控制输出, $d+m=n$; 对 $k=1, \dots, d$, $\bar{x}_k \triangleq (x_1, \dots, x_k)^T$, $\bar{x}_d \triangleq x$; $p_k \in (0, 1)$ 是一个奇分数; $\omega(t)$ 是一个 m 维布朗运动; $r(t)$ 是一个在概率空间上满足假设 1 的马尔可夫链; 对 $k=1, \dots, d$, f_z , g_z , f_k , g_k , 是博雷尔可测函数; 在这个部分, 假设马尔可夫链 $\{r(t), t \geq 0\}$ 与布朗运动 $\{\omega(t), t \geq 0\}$ 无关。

假设 2 系统的低阶满足 $1 > p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_d > 0$ 。

假设 3 $f_k(0,0,i) \equiv 0$, $g_k(0,0,i) \equiv 0$, $f_z(0,0,i) \equiv 0$, $g_z(0,0,i) \equiv 0$ 。对每一个 $i \in S$, $k=1, \dots, d$, $f_z(z,x,i)$, $g_z(z,x,i)$, $f_k(z,x,i)$, $g_k(z,x,i)$ 的系数是关于 z 和 x 连续的。

假设 4 如果存在一个函数 $V_0 \in C^2(R^m)$, K_∞ 函数 α_{1z} , α_{2z} , γ_0 , 常数 $c_0 > 0$, $0 < \eta_0 < 1$, 使得对所有 $(z,i) \in R^m \times S$, 有

$$\alpha_{1z}(\|z\|) \leq V_0(z) \leq \alpha_{2z}(\|z\|), \quad (14)$$

$$\mathcal{L}V_0(z,i) \leq -c_0(V_0(z,i))^{\eta_0} + \gamma_0(\|x_1\|), \quad (15)$$

另外, 存在已知光滑函数 φ_z 和 ψ_z 使得对任意 $i \in S$ 有 $\|\partial V_0(z)/\partial z\| \leq \varphi_z(\|z\|)$ 和 $\|g_z(z,x,i)\| \leq \psi_z(\|z\|)$ 。

假设 5 对每一个 $k=1, \dots, d$, $\forall i \in S$, 存在已知的在 origin 消失的光滑非负函数 $a_{k,i}$ 和 $b_{k,i}$ 和关于 x_k 的光滑非负函数 $\phi_{k,i}(\bar{x}_k)$ 和 $\psi_{k,i}(\bar{x}_k)$ 使得

$$\|f_{k,i}(z,x,i)\| \leq \phi_{k,i}(\bar{x}_k) \sum_{j=1}^k \|x_j\|^{p_k + \mu_{kj}} + a_{k,i}^{p_k}(\|z\|), \quad (16)$$

$$\|g_{k,i}(z,x,i)\| \leq \psi_{k,i}(\bar{x}_k) \sum_{j=1}^k \|x_j\|^{\frac{p_k+1}{2} + \nu_{kj}} + b_{k,i}^{\frac{p_k+1}{2}}(\|z\|). \quad (17)$$

3.2. 设计状态反馈控制器

第 1 步: 选择 $\xi_1 = x_1$ 和 $V_1(x_1) = \frac{1}{4}\xi_1^4$ 。由定义 2 和引理 3 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_1(x_1,i) &\leq \xi_1^2 x_2^{p_1} + \xi_1^3 \left(a_{1,i}^{p_1}(\|z\|) + \phi_{1,i}(x_1) \|x_1\|^{p_1 + \mu_{11}} \right) + 3\xi_1^2 \left(b_{1,i}^{p_1+1}(\|z\|) + \psi_{1,i}^2(x_1) \|x_1\|^{p_1+2\nu_{11}} \right) \\ &\leq \xi_1^3 x_2^{p_1} + l_{11} a_{1,i}^{p_1+3}(\|z\|) + h_{11} b_{1,i}^{p_1+3}(\|z\|) + \xi_1^{p_1+3} (\varrho_{11} + \phi_1(x_1) + \varrho_{12} + \psi_1(x_1)), \end{aligned} \quad (18)$$

其中 l_{11} , h_{11} 是正常数, $\phi_1(x_1) \geq \phi_{1,i}(x_1) \|x_1\|^{\mu_{11}}$ 和 $\psi_1(x_1) \geq \psi_{1,i}^2(x_1) \|x_1\|^{2\nu_{11}}$ 是光滑非负函数,

$\varrho_{11} = (3/(p_1+3))(p_1/(3+p_1)l_1)^{p_1/3}$, $\varrho_{12} = 3^{(p_1+3)/2} ((p_1+1)/((3+p_1)h_{11}))^{(p_1+1)/2} (2/3+p_1)$ 。替换第一个虚拟控制器 $x_2^* = -\alpha_1(x_1)\xi_1$, 其中 $\alpha_1(x_1) > (c_{11} + \varrho_{11} + \phi_1(x_1) + \varrho_{12} + \psi_1(x_1) + \nu(x_1))^{1/p_1}$ 是一个光滑函数, 代入(18)式有

$$\mathcal{L}V_1(x_1,i) \leq -c_{11}\xi_1^{p_1+3} - \nu(x_1)\xi_1^{p_1+3} + l_{11}a_{1,i}^{p_1+3}(\|z\|) + h_{11}b_{1,i}^{p_1+3}(\|z\|) + \xi_1^3(x_2^{p_1} - x_2^{*p_1}) \quad (19)$$

其中 $c_{11} > 0$, $\nu(x_1)$ 是一个设计好的非负光滑函数。

命题 1 假设在 $k-1$ 步, 有一个 C^2 , 正定且径向无界函数 V_{k-1} 以及一系列虚拟控制器 x_1^*, \dots, x_k^* 定义为

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0, \quad x_j^*(\bar{x}_{j-1}) = -\alpha_{j-1}(\bar{x}_{j-1})\xi_{j-1}, \\ \xi_{j-1} &= x_{j-1} - x_{j-1}^*(\bar{x}_{j-2}), \quad j=2, \dots, k, \end{aligned} \quad (20)$$

使得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_{k-1}(\bar{x}_{k-1},i) &\leq -\sum_{j=1}^{k-1} c_{k-1,j} j \xi_j^{p_j+3} - \nu(x_1)\xi_1^{p_1+3} + \xi_{k-1}^{p_1-p_{k-1}+3} (x_k^{p_{k-1}} - x_k^{*p_{k-1}}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} (l_{k-1,j} a_{j,i}^{p_j+3}(\|z\|) + h_{k-1,j} b_{j,i}^{p_j+3}(\|z\|)) \end{aligned} \quad (21)$$

其中 α_j , $j=1, \dots, d-1$ 是光滑函数, $c_{k-1,j}$, $l_{k-1,j}$, $h_{k-1,j}$, $j=1, \dots, k-1$ 是正常数。接下来说明存在 C^2 , 正定且径向无界的函数 $V_k = V_{k-1} + (1/(p_1-p_k+4))\xi_1^{p_1-p_k+4}$, 及一个虚拟控制器 $x_{k+1}^* = -\alpha_k(\bar{x}_k)\xi_k$, 使得

$$\mathcal{L}V_k(\bar{x}_k,i) \leq -\sum_{j=1}^k c_{k,j} j \xi_j^{p_j+3} - \nu(x_1)\xi_1^{p_1+3} + \xi_k^{p_1-p_k+3} (x_{k+1}^{p_k} - x_{k+1}^{*p_k}) + \sum_{j=1}^k (l_{k,j} a_{j,i}^{p_j+3}(\|z\|) + h_{k,j} b_{j,i}^{p_j+3}(\|z\|)) \quad (22)$$

其中 $\xi_k = x_k - x_k^*$, 且 α_k 为光滑正函数。

证明: 参考文献[19]的附录即可得到证明结果。

最后一步: 选择 $V_k(x) = \sum_{j=1}^d (1/(p_1 - p_j + 4)) \xi^{p_1 - p_j + 4}$, 我们可以得到下面的控制器

$$u = x_{d+1}^*(x) = -\alpha_d(x) \xi_d, \quad (23)$$

使得

$$\mathcal{L}V_d(\bar{x}_d, i) \leq -\sum_{j=1}^d c_{d,j} \xi_j^{p_1+3} - \nu(x_1) \xi_1^{p_1+3} + \sum_{j=1}^d (l_{d,j} a_{j,i}^{p_1+3} (\|z\|) + h_{d,j} b_{j,i}^{p_1+3} (\|z\|)), \quad (24)$$

其中 ξ_k , $k=1, \dots, d$ 是定义于(20)式。

3.3. 有限时间稳定性分析

引理 4 对于假设 4 中给定的函数 α_{1z} , φ_z , ψ_z , $V_0(z)$ 。如果有

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_1(s)}{\alpha_z(s)} < \infty, \quad \limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\psi_z^2(s) \varphi_z^2(s)}{\alpha_z(s)} < \infty, \quad (25)$$

和

$$\int_0^\infty \left[\xi(\alpha_{1z}^{-1}(s)) \right]' e^{-\int_0^s \left[\zeta(\alpha_{1z}^{-1}(\tau)) \right]^{-1} d\tau} ds < \infty, \quad (26)$$

其中定义于 $[0, \infty)$ 的连续非负递增函数 ξ 和 ζ 满足

$$\xi(s) \alpha_z(s) \geq 4\gamma(s), \quad \zeta(s) \alpha_z(s) \geq 2\psi_z^2(s) \varphi_z^2(s), \quad (27)$$

则存在一个 $\rho(0) > 0$ 的非递减的正函数 $\rho(\cdot) \in C^1[0, \infty)$, 使得对 $\forall z \in R^m$, 有

$$\rho(V_0(z)) \alpha_z(\|z\|) \geq 2\rho'(V_0(z)) \psi_z^2(\|z\|) \varphi_z^2(\|z\|) + 4\gamma_1(\|z\|), \quad (28)$$

其中 $\alpha_z(s) = c_0 (\alpha_{1z}(s))^{n_0}$, $\gamma_1(\|z\|) = \sum_{j=1}^d (c_{d,j} a_{j,i}^{p_1+3} (\|z\|) + h_{d,j} b_{j,i}^{p_1+3} (\|z\|))$ 。

证明: 在文献[23]中, $\gamma_1(\|z\|)$ 需要是 K_∞ 函数, 但是这个要求在其引理 1 中没有用到, 所以引理 4 可直接由文献[23]中的引理 1 证得。即得证。

定理 2 对于假设 4 中给定的函数 γ_0 并且定义 $y(t) = (x^T(t), z^T(t))$ 。假设 3~5 和引理 4 中的条件成立, 那么由(13)和(23)组成的闭环系统有一个全局弱解 $(y(t), \omega^y(t), r^y(t), \Omega^y, \mathcal{F}^y, \{\mathcal{F}_t^y\}_{t \geq 0}, P_y)$ 且其平凡解是全局依概率有限时间稳定的。

证明: 对于定义于引理 4 中的非递减的正函数 $\rho(\cdot) \in C^1[0, \infty)$, 令

$$\Phi(z) = \int_0^{V_0(z)} \rho(s) ds. \quad (29)$$

定义 $\eta(\cdot) = \alpha_{2z}(\alpha_z^{-1}(2\gamma_0(\cdot))) \in K_\infty$, 接下来参考文献[23]定理 2 的证明可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Phi(z, i) &= \rho(V_0(z)) \mathcal{L}V_0(z, i) + \frac{1}{2} \rho'(V_0(z)) \|\partial V_0(z) / \partial z \cdot g_z(z, x, i)\|^2 \\ &\leq \rho(\eta(\|x_1\|)) \gamma_0(\|x_1\|) - \frac{1}{4} c_0 \rho(V_0(z)) (V_0(z))^{n_0} - \gamma_1(\|z\|), \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\gamma_1(\|z\|) = \sum_{j=1}^d (c_{d,j} a_{j,i}^{p_1+3} (\|z\|) + h_{d,j} b_{j,i}^{p_1+3} (\|z\|))$ 。

令

$$W(z, x) = V_d(x) + \Phi(z). \quad (31)$$

通过(24)和

$$\left(\frac{\xi_j^{p_1-p_j+4}}{p_1-p_j+4} \right)^{\frac{p_1+3}{p_1-p_j+4}} \geq \left(\frac{\xi_j^{p_1-p_j+4}}{p_1-p_j+4} \right)^{\frac{p_1+3}{4}}, \quad (32)$$

我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W(z, x, i) &= \mathcal{L}V_d(x, i) + \mathcal{L}\Phi(z, i) \leq -c_* (V_d(x))^{\frac{p_1+3}{4}} - v(x_1) \xi_1^{p_1+3} + \sum_{j=1}^d (l_{d,j} a_{j,i}^{p_1+3} (\|z\|) + h_{d,j} b_{j,i}^{p_1+3} (\|z\|)) \\ &\quad + \rho(\eta(\|x_1\|)) \gamma_0(\|x_1\|) - \frac{1}{4} c_0 \rho(V_0(z)) (V_0(z))^{\eta_0} - \gamma_1(\|z\|). \end{aligned} \quad (33)$$

注意 $\xi_1 = x_1$, 我们可以构造一个连续非递减的函数 $v(\cdot)$ 使得

$$v(x_1) \geq \|x_1\|^{-(3+p_1)} \rho(\eta(\|x_1\|)) \gamma_0(\|x_1\|). \quad (34)$$

因此, 我们由(33), (34)和引理 4 可得

$$\mathcal{L}W(z, x, i) \leq -c_* (V_d(x))^{\frac{3+p_1}{4}} - \frac{1}{4} c_0 \rho(V_0(z)) (V_0(z))^{\eta_0}. \quad (35)$$

又因为 $\rho(t)$ 是一个递增函数, 其中 $\rho(0) > 0$, 所以我们有

$$\mathcal{L}W(z, x, i) \leq -c \left[(V_d(x))^{\frac{3+p_1}{4}} + (\Phi(z))^{\eta_0} \right], \quad (36)$$

其中 $c = \min \left\{ c_*, \frac{1}{4} c_0 \rho^{1-\eta_0}(0) \right\}$.

$\Phi(z)$ 和 $V_d(x)$ 的构式以及和假设 4 表明 $\Phi(z)$ 和 $V_d(x)$ 是正定且径向无界的。那么根据文献[24]中的引理 4.3, 存在 $\alpha_{1x}, \alpha_{2x} \in K_\infty$ 使得

$$\alpha_{1x}(\|x_1\|) \leq V_d(x) \leq \alpha_{2x}(\|x_1\|). \quad (37)$$

同理, 存在 $\alpha_{1z}, \alpha_{2z} \in K_\infty$ 使得

$$\alpha_{1z}(\|z\|) \leq \Phi(z) \leq \alpha_{2z}(\|z\|). \quad (38)$$

因此, 根据定理 1, 闭环系统(13), (23)有一个弱解。根据定理 1, 闭环系统(13), (23)的平凡解是依概率有限时间稳定的。即得证。

4. 数值模拟实例

在这个部分, 我们将给出一个例子来说明我们在第 3 节中获得的結果的有效性。考虑下面的系统

$$\begin{aligned} dz &= \left(-4z^{\frac{7}{9}}(t) + \frac{1}{2}x_1(t) \right) dt + \frac{\sin(z(t))\cos(x_1(t))}{2r(t)} d\omega, \\ dx_1 &= \left(x_2^{p_1}(t) + f_1(x(t), r(t)) \right) dt + \frac{\sin(x_1(t))\cos(z(t))}{2} d\omega, \\ dx_2 &= \left(\frac{u^{p_2} + z^{\frac{2}{5}}(t)x^{\frac{4}{5}}(t)}{r(t)} \right) dt + x^{\frac{6}{5}}(t) d\omega, \end{aligned} \quad (39)$$

其中 $p_1 = \frac{8}{9}$, $p_2 = \frac{4}{5}$, $\omega(t)$ 是 1 维布朗运动, $r(t)$ 是在完全概率空间上具有稳定保守 γ -矩阵 Γ 的右连续齐次马尔可夫链, $S = \{1, 2, 3\}$ 是状态空间, $f_1(x, 1) = 0.2 \sin(zx_1)$, $f_1(x, 2) = 0.2 \cos(zx_1)$, $f_1(x, 3) = 0.2x_1^{\frac{7}{9}}$, $|f_1| \leq 0.2|x_1|^{\frac{7}{9}}$, $|g_1| = 0.5|\sin x_1 \cos z| \leq 0.5|x_1|^{\frac{8}{9}}$, $|f_2| = \left| \left(\frac{2}{z^5 x^4} \right) / r \right| \leq z^{\frac{6}{5}} + x^{\frac{4}{5}}$, $g_2 = x^{\frac{6}{5}}$, $a_{1,i} = a_{2,i} = b_{2,i} = 0$, $b_{1,i} = z^2$ 。假设 2 和假设 5 成立。

根据第 3 节中的方法, 我们构建李雅普诺夫函数 $V_2 = V_1 + \frac{1}{p_1 - p_2 + 4} \xi_2^{p_1 - p_2 + 4}$ 并且设计控制器

$$u = -\left(393 + 1127x_1^{16} + 1078x_1^{32} + 343x_1^{48}\right)(x_2 + 7x_1^{17} + 7x_1). \quad (40)$$

其中选择 $v(x_1) = x_1^{12} + 1$, 初始值 $(z(0), x_1(0), x_2(0)) = (1, 0.2, -1)$ 以及由 $\gamma_{11} = -3$, $\gamma_{12} = 1$, $\gamma_{13} = 2$, $\gamma_{21} = 1$, $\gamma_{22} = -2$, $\gamma_{23} = 1$, $\gamma_{31} = 2$, $\gamma_{32} = 1$ 和 $\gamma_{33} = -3$ 给定的 $\Gamma = (\gamma_{ij})_{3 \times 3}$ 。图 1 展示了马尔可夫链的轨迹和闭环系统(39), (40)的轨迹。

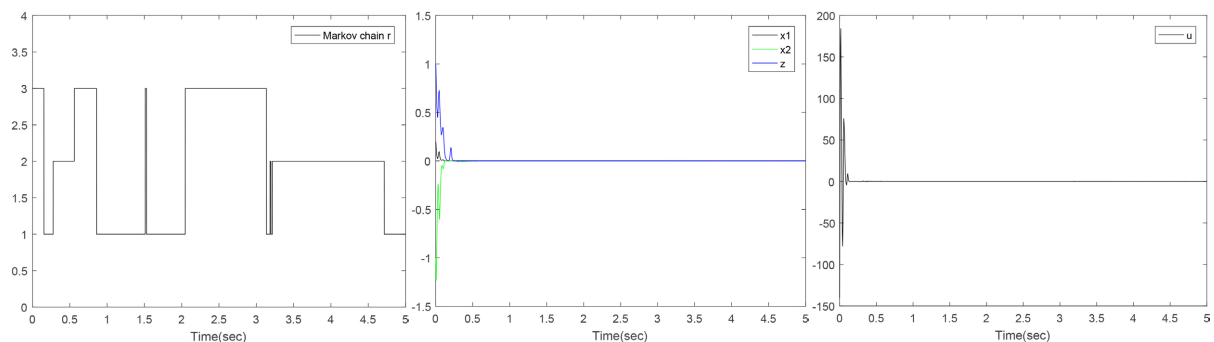


Figure 1. Trajectory of the Markov chain and trajectories for the closed-loop system (39)~(40)

图 1. 马尔可夫链的轨迹和闭环系统(39)~(40)的轨迹

5. 结论

我们研究了一类具有随机逆动态的马尔可夫切换随机低阶非线性系统的有限时间控制问题。通过改变能量函数, 构造了包括可控系统和随机逆动态在内的整个系统的李雅普诺夫函数, 并通过相关随机非线性系统的有限时间稳定性定理, 证明了闭环系统是全局依概率有限时间稳定的。

参考文献

- [1] Li, W., Wang, H. and Liu, X. (2013) State-Feedback Stabilization for Stochastic High-Order Nonlinear Systems with Markovian Switching. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **408**, 374-383. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.06.020>
- [2] Mao, X. and Yuan, C. (2016) Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. Imperial College Press, London.
- [3] Wu, Z., Xie, X., Shi, P. and Xia, Y. (2009) Backstepping Controller Design for a Class of Stochastic Nonlinear Systems with Markovian Switching. *Automatica*, **45**, 997-1004. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.12.002>
- [4] Du, H., Li, S. and Qian, C. (2011) Finite-Time Attitude Tracking Control of Spacecraft with Application to Attitude Synchronization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **56**, 2711-2717. <https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2159419>
- [5] Bhat, S.P. and Bernstein, D.S. (2000) Finite-Time Stability of Continuous Autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **38**, 751-766. <https://doi.org/10.1137/S0363012997321358>

- [6] Yin, J., Khoo, S., Man, Z. and Yu, X. (2011) Finite-Time Stability and Instability of Stochastic Nonlinear Systems. *Automatica*, **47**, 2671-2677. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.08.050>
- [7] Khoo, S., Yin, J., Man, Z. and Yu, X. (2013) Finite-Time Stabilization of Stochastic Nonlinear Systems in Strict-Feedback Form. *Automatica*, **49**, 1403-1410. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.01.054>
- [8] Ai, W., Zhai, J. and Fei, S. (2013) Global Finite-Time Stabilization for a Class of Stochastic Nonlinear Systems by Dynamic State Feedback. *Kybernetika*, **49**, 590-600.
- [9] Zhai, J. (2014) Finite-Time Output Feedback Stabilization for Stochastic High-Order Nonlinear Systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **33**, 3809-3837. <https://doi.org/10.1007/s00034-014-9831-4>
- [10] Lan, Q., Li, S., Khoo, S. and Shi, P. (2015) Global Finite-Time Stabilisation for a Class of Stochastic Nonlinear Systems by Output Feedback. *International Journal of Control*, **88**, 494-506. <https://doi.org/10.1080/00207179.2014.962766>
- [11] Zhao, P., Feng, W., Zhao, Y. and Kang, Y. (2015) Finite-Time Stochastic Input-to-State Stability of Switched Stochastic Nonlinear Systems. *Applied Mathematics and Computation*, **268**, 1038-1054. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.06.075>
- [12] Mao, X. (1999) Stability of Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. *Stochastic Processes and Their Applications*, **79**, 45-67. [https://doi.org/10.1016/S0304-4149\(98\)00070-2](https://doi.org/10.1016/S0304-4149(98)00070-2)
- [13] Zhao, G. and Liu, S. (2022) Finite-Time Stabilization of Non-Local Lipschitzian Stochastic Time-Varying Nonlinear Systems with Markovian Switching. *Science China Information Sciences*, **65**, Article No. 212204. <https://doi.org/10.1007/s11432-021-3458-9>
- [14] Ratnavelu, K., Kalpana, M. and Balasubramaniam, P. (2016) Asymptotic Stability of Markovian Switching Genetic Regulatory Networks with Leakage and Mode-Dependent Time Delays. *Journal of the Franklin Institute*, **353**, 1615-1638. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2016.01.015>
- [15] Zhu, Q. (2014) p th Moment Exponential Stability of Impulsive Stochastic Functional Differential Equations with Markovian Switching. *Journal of the Franklin Institute*, **351**, 3965-3986. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2014.04.001>
- [16] Tang, C. and Basar, T. (2001) Stochastic Stability of Singularly Perturbed Nonlinear Systems. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, FL, 4-7 December 2001, 399-404.
- [17] Tsiniias, J. (1988) Stochastic Input-To-State Stability and Applications to Global Feedback Stabilization. *International Journal of Control*, **71**, 907-930. <https://doi.org/10.1080/002071798221632>
- [18] Zhao, G.H., Li, J.C. and Liu, S.J. (2018) Finite-Time Stabilization of Weak Solutions for a Class of Non-Local Lipschitzian Stochastic Nonlinear Systems with Inverse Dynamics. *Automatica*, **98**, 285-295. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.07.015>
- [19] Jiang, M. and Xie, X. (2018) Finite-Time Stabilization of Stochastic Low-Order Nonlinear Systems with FT-SISS Inverse Dynamics. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **28**, 1960-1972. <https://doi.org/10.1002/rnc.3994>
- [20] Huang, X., Lin, W. and Yang, B. (2005) Global Finite-Time Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Systems. *Automatica*, **41**, 881-888. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2004.11.036>
- [21] Mao, X., Shen, Y. and Yuan, C. (2008) Almost Surely Asymptotic Stability of Neutral Stochastic Differential Delay Equations with Markovian Switching. *Stochastic Processes and Their Applications*, **118**, 1385-1406. <https://doi.org/10.1016/j.spa.2007.09.005>
- [22] Qian, C. and Li, J. (2005) Global Finite-Time Stabilization by Output Feedback for Planar Systems without Observable Linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**, 885-890. <https://doi.org/10.1109/TAC.2005.849253>
- [23] Liu, S., Zhang, J. and Jiang, Z. (2008) A Notion of Stochastic Input-to-State Stability and Its Application to Stability of Cascaded Stochastic Nonlinear Systems. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **24**, 141-156. <https://doi.org/10.1007/s10255-007-7005-x>
- [24] Khalil, H.K. (2002) *Nonlinear Systems*. 3rd Edition, Prentice Hall, Hoboken, 115.