Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(4), 1897-1907**
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124196

Hans汉斯

双圈图的零强迫数与一般位置数

荆　瑜

山东理工大学数学与统计学院，山东 淄博

收稿日期：2023年3月26日；录用日期：2023年4月21日；发布日期：2023年4月28日

摘　要

设$F(G)$是图G的零强迫数，$gp(G)$是图G的一般位置数。注意，$gp(G) \ge F(T)+1$对所有树T都成立。Hua等人在中证明了此结果可以扩展到块图，并证明了对于连通单圈图G，$gp(G) \ge F(T)$。在本文中，我们刻画了使得$gp(G) \ge F(T)$成立的双圈图的结构。

关键词

零强迫数，一般位置数，双圈图

Zero Forcing Number and General Position Number in Bicyclic Graphs

Yu Jing

School of Mathematics and Statistics, Shandong University of Technology, Zibo Shandong

Received: Mar. 26th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 28th, 2023

Abstract

Let $F(G)$ be the zero forcing number of G and $gp(G)$ be the general position number of G. Note that $gp(T) \ge F(T)+1$ holds for any tree T. Hua *et al.* showed that this result can be extended to block graphs, and showed that $gp(G) \ge F(G)$ for connected unicyclic graphs. In this paper, we characterize the structure of bicyclic graphs satisfying $gp(G) \ge F(G)$.

Keywords

Zero Forcing Number, General Position Number, Bicyclic Graph

文章引用: 荆瑜. 双圈图的零强迫数与一般位置数[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1897-1907.
DOI: 10.12677/aam.2023.124196

1. 引言

设 $G=(V(G),E(G))$ 是一个阶为 $n(G)$ 且边数为 $m(G)$ 的有限简单图。设 $c(G)=m(G)-n(G)+1$ 是图 G 的基本圈数。显然，如果 $c(G)=0$，则 G 是树，如果 $c(G)=1$，则 G 是单圈图，如果 $c(G)=2$，那么 G 是双圈图。设 $S\subseteq V(G)$ 是一个初始着色顶点子集，它的所有顶点都着黑色，若一个黑色的顶点 v 恰好只有一个未着色的邻点 u，则 v 强迫顶点 u 着黑色，按照这样的着色规则使得 G 的所有顶点都变成黑色，则称初始集 S 为 G 的一个零强迫集。G 的零强迫集的最小基数称为 G 的零强迫数，用 $F(G)$ 表示。图的零强迫数的概念首次在 2008 年 AIM Minimum Rank-Special Graphs Work Group 提出([1])，学者们用它来界定图矩阵的最小秩和最大零秩(见[2] [3] [4])。在[5]中，Montazeri 和 Soltankhah 讨论了零强迫数与路覆盖数之间的关系，并用路覆盖数来界定零强迫数。在[6]中，Davila 和 Kenter 猜想，对最大度 Δ 至少为 2 的连通图 G，当且仅当 $G=C_n, G=K_{\Delta+1}$ 或 $G=K_{\Delta,\Delta}$ 时，图 G 的零强迫数等于 $(\Delta-2)n+2/\Delta-1$。随后，Gentner 等人和 Lu 等人分别证明了此猜想([7] [8])。学者们还研究了树的零强迫数并用不同的图参数来界定零强迫数(见[9] [10] [11])。

连通图 G 中的两个顶点 u 和 v 的距离是指图 G 中最短的 uv-路的长度，记为 $d_G(x,y)$，或者简记为 $d(x,y)$。如果 $d_G(v)=1$，顶点 v 称为图 G 的一个悬挂顶点，对于任意树 T，其悬挂顶点也可称为叶子点，并且树 T 的叶子点数(悬挂顶点数)记为 $p(T)$。G 的一个顶点 u 的度是指它的邻点数，记为 $d_G(u)$ (或简记为 $d(u)$)。记图 G 中任意导出圈 C 的最大直径为 $dp(C)$。如果一条路 P 的内部顶点全是 2 度顶点，则称 P 是一条简单路。

设 C 是图 G 的一个圈，$v\in V(C)$，若 v 的邻点有不在 G 的任意圈上的顶点，则称 V 是 G 的圈 C 上的一个分叉顶点。对于圈 C 上的分叉顶点 u，称 $T(u)$ 为分叉顶点 u 的导出树，并且对 $T(u)$ 的任意顶点 $v\neq u$，显然有 $v\notin V(C)$。方便起见，在本文中提到的 $T(u)$ 的悬挂顶点特指除 u 以外的 $T(u)$ 的悬挂顶点。

对于图 G 的一个顶点子集 R，如果在 R 中任意三个顶点不在同一条最短路上，则称 R 是 G 的一个一般位置集。图 G 的一般位置数 $gp(G)$ 是 G 的最大一般位置集的顶点数。图的一般位置数在[5]中被提出，随后，在[12]中图的一般位置集被刻画。边一般位置集也在[13]中被学者们研究。对于任意树 T，$gp(G)\geq F(G)+1$ 都成立。在[14]中，Hua 等人证明了 $gp(G)\geq F(G)$ 在连通单圈图中成立，并提出问题双圈图满足什么结构时 $gp(G)\geq F(G)$ 成立？受这篇文章的启发，我们研究了这个问题。在本文中，我们找到了使得 $gp(G)\geq F(G)$ 成立的双圈图的结构。

2. 主要结果

在给出主要结果之前，我们首先介绍一些基本结果和符号。在[9]中，张文前等人研究了树的零强迫数，并用树的悬挂顶点数来界定零强迫数，得到树的零强迫数的上界。

引理 1：[9]若 T 是树，则 $F(T)\geq p(T)-1$。

也就是说，对于任意树 T，选取 $p(T)-1$ 个悬挂顶点即可构成 T 的一个零强迫集。而在双圈图 G 上，若 $u\in V(G)$ 是图 G 圈上的一个分叉顶点，设 $S_1\subseteq V(G)$，在颜色变化过程中，S_1 使得 G 中除了 $V(T(u))$ 以外的所有顶点都被着黑，此时可应用此引理寻找 $T(u)$ 中除 u 以外的悬挂顶点作为 $T(u)$ 的一个零强迫集 S_2，显然，$S_1\cup S_2$ 是图 G 的一个零强迫集。

对于任意连通图 G，显然满足以下结论。

引理 2：设 G 是连通图，则 $gp(G) \ge |L|$，其中 L 是图 G 的悬挂顶点集合。

定义 $\mathcal{A}$ 为双圈图的族，即，对任意连通图 G，若 $G \in \mathcal{A}$，则 G 是双圈图。

根据双圈图的结构性质，双圈图一定包含以下结构之一(如图 1 所示)。

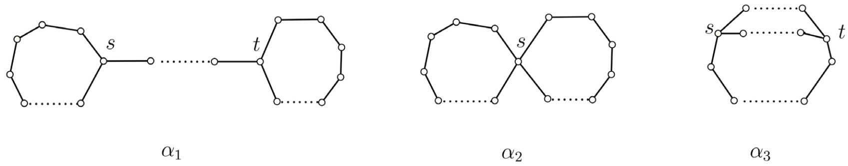


Figure 1. Three structures of a bicyclic graph
图 1. 双圈图的三种结构

结构 α_1：双圈图的两个圈没有交点；

结构 α_2：双圈图的两个圈恰好有一个交点；

结构 α_3：双圈图的两个圈至少有一条公共边。

如上图所示，双圈图的两个圈之间的公共交点称为交叉顶点并分别用 s 和 t 表示(结构 α_2 只有一个交点 s)。特别地，结构 α_1 中有唯一的一条路 P_{st}，它的两端点 s，t 分别位于两个不同圈上，我们称这条路上除端点 s 和 t 的度至少为 3 的顶点为分叉顶点，并称路 P_{st} 与两个圈的交点为交叉顶点。

方便起见，我们按位置将分叉顶点划分为以下部分：$B_1, B_2, B_3, B_p, B_s, B_t$ (如图 2(a)~(c)所示，并且忽略分叉顶点及其导出树)，并记对应的圈和路为 C_1, C_2, P_1, P_2, P_3 和 P_{st} (如图 2(d)~(f)所示)，对应分叉顶点的导出树的悬挂顶点数记为 $\ell_{C_1}, \ell_{C_2}, \ell_{P_1}, \ell_{P_2}, \ell_{P_3}, \ell_{st}$，并将交点处悬挂路的顶点数记为 ℓ_s 和 ℓ_t (即，$T(s)$和 $T(t)$ 的悬挂顶点数) (如图 2(g)~(i)所示)。注意，对任意 $i = 1,2$，$j = 1,2,3$，ℓ_{C_i} 和 ℓ_{P_j} 不包含 s 和 t 的悬挂顶点数。将双圈图 G 中所有悬挂顶点集合记为 L，并且 $|L| = \ell$。

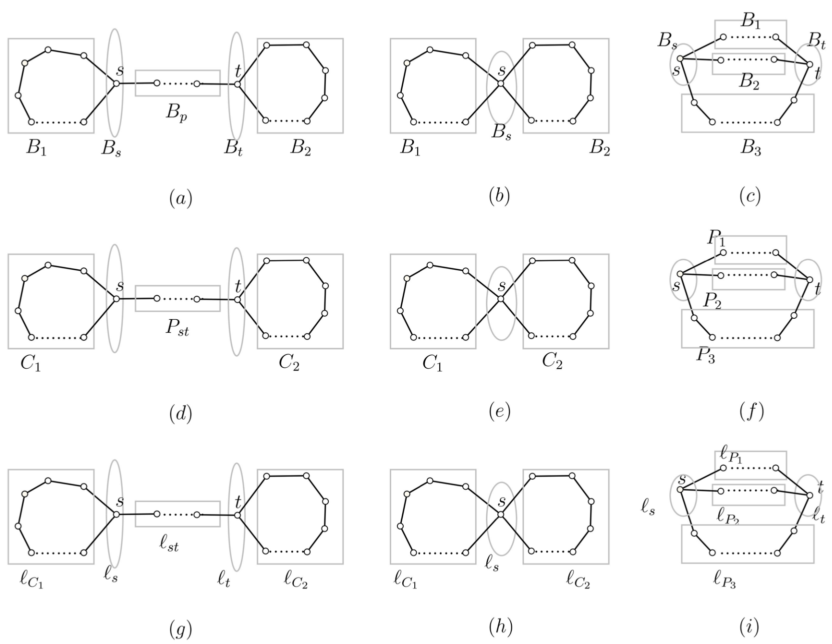


Figure 2. The vertex partition of bicyclic graphs
图 2. 双圈图的顶点划分

若 $G\in\mathcal{A}$，定义一类双圈图族 $\mathcal{B}$，若 $G\in\mathcal{B}$，则 G 包含以下结构之一。

结构 β_1：双圈图的两个圈至多有一个交点且 $\left|V(C_1)\right|\ge 3$，$\left|V(C_2)\right|\ge 4$，$\ell_{C_1}\ne 0$，$\ell_{C_2}\ne 0$。

结构 β_2：双圈图的两个圈至少有两条公共边，$\left|V(P_1)\right|\ge 3$，$\left|V(P_2)\right|\ge 3$，$\left|V(P_3)\right|\ge 4$，$\ell_{P_1}=\ell_{P_2}=\ell_{P_3}=0$ 且 $\ell_s,\ell_t\ge 3$ 或者至少有一个 ℓ_{P_i} 不为 $0(i=1,2,3)$。

结构 β_3：双圈图的两个圈至少有两条公共边，$\left|V(P_1)\right|=\left|V(P_2)\right|=\left|V(P_3)\right|=3$，$\ell_{P_1}=\ell_{P_2}=\ell_{P_3}=0$ 且 $\ell_s,\ell_t\ge 3$ 或者 $\ell_{P_i}\ne 0$，$\ell_{P_j}=\ell_{P_k}=0(i,j,k=1,2,3$ 并且 $i\ne j\ne k)$。

定理 3：设 $G\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}$，则

$$gp(G)\ge F(G) \tag{1}$$

通过零强迫数的性质和一般位置数的性质，易得到以下结论。

引理 4：若 $G\in\mathcal{A}$ 包含结构 α_1，并且 $G\notin\mathcal{B}$，则 $gp(G)\ge F(G)$。

证明：设 $G\in\mathcal{A}$ 包含结构 α_1，按照双圈图中圈的长度，我们首先分两种情况进行讨论，再根据 C_1，C_2 上是否存在分叉顶点分为几种子情况进行讨论。

情形 1：$\left|V(C_1)\right|\ge 3$ 并且 $\left|V(C_2)\right|\ge 4$。

情形 1.1：如果 $\ell_{C_1}=\ell_{C_2}=0$，选择两个相邻顶点 $\{u,v\}\in V(C_1)\setminus\{s\}$ 和 t 的一个邻点 $w\in V(C_2)$，那么 $\{u,v,w\}$ 和所有的悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集，则有 $F(G)\le\ell+\left|\{u,v,w\}\right|=\ell+3$。选择四个顶点 $\{x,y\}\in V(C_1)$，$\{m,n\}\in V(C_2)$ 满足 $d(x,y)=dp(C_1)$，$d(m,n)=dp(C_2)$，并且 $\left|d(x,s)-d(y,s)\right|\le 1$，$\left|d(m,t)-d(n,t)\right|\le 1$，那么 G 的所有悬挂顶点和 $\{x,y,m,n\}$ 构成 G 的一个一般位置集，那么 $gp(G)\ge\ell+\left|\{x,y,m,n\}\right|=\ell+4$。显然 $F(G)\le gp(G)$。

情形 1.2：如果 $\ell_{C_1}=0$，$\ell_{C_2}\ne 0$ (或者 $\ell_{C_2}=0$，$\ell_{C_1}\ne 0$)，选择 s 的一个邻点 $u\in V(C_1)$ 和 C_2 中一个分叉顶点的邻点 $w\in V(C_2)$，$\{u,w\}$ 和 G 的所有的悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集，可得 $F(G)\le\ell+2$。选择两个顶点 $x,y\in V(C_1)$，$d(x,y)=dp(C_1)$ 并且 $\left|d(x,s)-d(y,s)\right|\le 1$，那么 G 的所有悬挂顶点和 $\{x,y\}$ 构成 G 的一个一般位置集，那么有 $gp(G)\ge\ell+\left|\{x,y\}\right|=\ell+2\ge F(G)$ (如图 3 所示)。

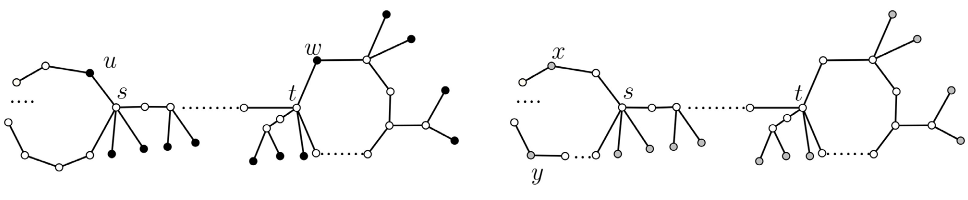


Figure 3. $\ell_{C_1}=0$，$\ell_{C_2}\ne 0$

图 3. $\ell_{C_1}=0$，$\ell_{C_2}\ne 0$

情形 1.3：如果 $\ell_{C_1}\ne 0$ 并且 $\ell_{C_2}\ne 0$。设 v 是 C_1 的一个分叉顶点并且 $u\in V(C_1)\setminus\{s\}$ 是它的一个邻点，$w\in V(C_2)$ 是 t 的一个邻点，那么 $\{u,w\}$ 和除一个外所有的悬挂顶点构成 G 的一个零强迫数，并且 $F(G)\le\ell-1+\left|\{u,w\}\right|=\ell+1$。$G$ 的所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，那么 $gp(G)\ge\ell$ (如图 4 所示)。然而，这时不能得到不等式(1)。

情形 2：$\left|V(C_1)\right|=\left|V(C_2)\right|=3$。

设 $\{u,v\}\in V(C_1)$ 和 $\{w,x\}\in V(C_2)$ 分别是顶点 s 和 t 的邻点。分下面三种子情况讨论。

情形 2.1：如果 $\ell_{C_1}=\ell_{C_2}=0$，则 $\{u,v,w\}$ 和所有的悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集，$\{u,v,w,x\}$ 和所有悬挂顶点为 G 的一个一般位置集，那么可得 $F(G)\le\ell+3<\ell+4\le gp(G)$。

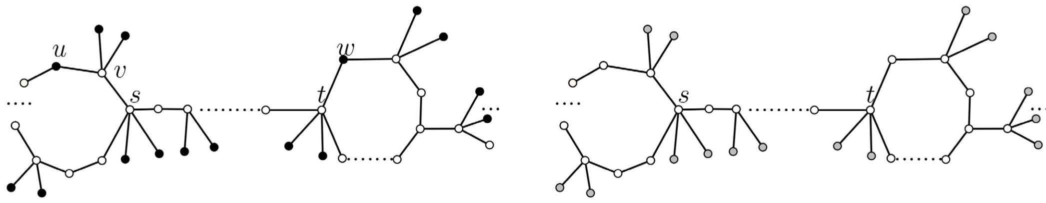


Figure 4. $\ell_{C_1} \neq 0$，$\ell_{C_2} \neq 0$
图 4. $\ell_{C_1} \neq 0$，$\ell_{C_2} \neq 0$

情形 2.2：如果 $\ell_{C_1} = 0$，$\ell_{C_2} \neq 0$ (或者 $\ell_{C_2} = 0$，$\ell_{C_1} \neq 0$)，则 $\{w,x\}$ 中至少有一个分叉顶点，不失一般性，假设 x 为分叉顶点，那么 $\{u,w\}$ 和所有悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集同时也构成 G 的一个一般位置集，那么可得 $F(G) \leq \ell + 2 \leq gp(G)$。

情形 2.3：如果 $\ell_{C_1} \neq 0$ 并且 $\ell_{C_2} \neq 0$。我们考虑 $\{u,v,w,x\}$ 中的分支顶点数。当恰好有一个分叉顶点在 $C_i\,(i=1,2)$ 中时，不失一般性，设 u，w 是分叉顶点，那么 v 和所有悬挂顶点构成一个零强迫集，而 $\{v,x\}$ 和所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，可得 $F(G) \leq \ell + 1 < \ell + 2 \leq gp(G)$ (如图 5 所示)；当 $\{u,v,w,x\}$ 中恰好只有一个不是分叉顶点时，不失一般性，假设 x 不是分叉顶点，那么x和所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，而所有悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集，可得 $F(G) \leq \ell < \ell + 1 \leq gp(G)$；当 $\{u,v,w,x\}$ 都是分叉顶点时，所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，而除一个外所有悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集，可得 $F(G) \leq \ell - 1 < \ell \leq gp(G)$。

Figure 5. $\ell_{C_1} \neq 0$，$\ell_{C_2} \neq 0$ and u,w are branch vertices
图 5. $\ell_{C_1} \neq 0$，$\ell_{C_2} \neq 0$ **且** u,w **为分叉顶点**

综上，当 $G \in \mathcal{A}$ 包含结构 α_1，并且 $G \notin \mathcal{B}$ 时，$gp(G) \geq F(G)$。证明完成。

引理 5：若 $G \in \mathcal{A}$ 包含结构 α_2，并且 $G \notin \mathcal{B}$，则 $gp(G) \geq F(G)$。

证明：设 $G \in \mathcal{A}$ 包含结构 α_2，我们首先根据双圈图中两个圈的圈长分下面两种情况进行讨论，再根据 C_1，C_2 上是否存在分叉顶点进行分类讨论。

情形 1：$|V(C_1)| \geq 3$ 且 $|V(C_2)| \geq 4$。

情形 1.1：如果 $\ell_{C_1} = \ell_{C_2} = 0$，选择两个相邻顶点 u，v 并且 $\{u,v\} \in V(C_1)$ 不同于顶点 s 及其邻点 $w \in V(C_2)$。显然，$\{u,v,w\}$ 及 G 的所有悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集，那么 $F(G) \leq |\{u,v,w\}| + \ell = \ell + 3$。选择四个顶点 x,y,m,n，其中 $x,y \in V(C_1)$，$m,n \in V(C_2)$，$d(x,y) = dp(C_1)$，$d(m,n) = dp(C_2)$ 并且 $|d(x,s) - d(y,s)| \leq 1$，$|d(m,t) - d(n,t)| \leq 1$，那么 G 的所有悬挂顶点及 $\{x,y,m,n\}$ 构成 G 的一个一般位置集，可得 $gp(G) \geq \ell + |\{x,y,m,n\}| = \ell + 4 > \ell + 3 \geq F(G)$。

情形 1.2：如果 $\ell_{C_1} = 0$，$\ell_{C_2} \neq 0$ (或者 $\ell_{C_2} = 0$，$\ell_{C_1} \neq 0$)，选择一个顶点 $w \in V(C_2)$ 是 C_2 中的一个分叉顶点的邻点，$u \in V(C_1)$ 是 C_1 中 s 的一个邻点，那么所有悬挂顶点及 $\{u,w\}$ 构成 G 的一个零强迫集，可得 $F(G) \leq \ell + |\{u,w\}| = \ell + 2$。选择两个顶点 $x,y \in V(C_1)$，$d(x,y) = dp(C_1)$ 并且 $|d(x,s) - d(y,s)| \leq 1$，那

DOI: 10.12677/aam.2023.124196

么 $\{x,y\}$ 和所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，可得 $gp(G) \ge \ell + |\{x,y\}| = \ell + 2$。

情形 1.3：如果 $\ell_{C_1} \ne 0$ 并且 $\ell_{C_2} \ne 0$，选取 C_1 中的一个分叉顶点的邻点 $u \in V(C_1) \setminus \{s\}$ 和 s 的一个邻点 $w \in V(C_2)$，那么 $\{u,w\}$ 及除 C_2 中一个悬挂顶点之外所有悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集，得到 $F(G) \le \ell - 1 + |\{u,w\}| = \ell + 1$。而所有的悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，得到 $gp(G) \ge \ell$。但无法直接得到不等式(1)。

情形 2：$|V(C_1)| = |V(C_2)| = 3$，$V(C_1) \cap V(C_2) = \{s\}$。

设 $\{u,v\} \in V(C_1)$ 和 $w,x \in V(C_2)$ 分别是顶点 s 在 C_1 和 C_2 中的邻点，分以下几种情况讨论。

情形 2.1：如果 $\ell_{C_1} = \ell_{C_2} = 0$，所有悬挂顶点和 $\{u,v,w\}$ 构成 G 的一个零强迫集，而 $\{u,v,w,x\}$ 和所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，可得 $F(G) \le \ell + 3 < \ell + 4 \le gp(G)$。

情形 2.2：如果 $\ell_{C_1} = 0$，$\ell_{C_2} \ne 0$（或者 $\ell_{C_2} = 0$，$\ell_{C_1} \ne 0$），$\{u,v\}$ 和所有悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集，同时也构成 G 的一个一般位置集，那么我们可得 $F(G) \le \ell + 2 < \ell + 3 \le gp(G)$。

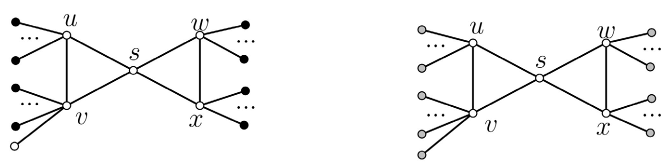
情形 2.3：如果 $\ell_{C_1} \ne 0$ 并且 $\ell_{C_2} \ne 0$，我们考虑 $\{u,v,w,x\}$ 中的分叉顶点数。当 C_1 和 C_2 中都恰好有一个分叉顶点时，不失一般性，假设 u，w 是分叉顶点，那么v和所有悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集，而 $\{v,x\}$ 和所有悬挂顶点形成 G 的一个一般位置集，可得 $F(G) \le \ell + 1 < \ell + 2 \le gp(G)$（如图 6 所示）；当 $\{u,v,w,x\}$ 中只有一个不是分叉顶点时，不失一般性，我们设 x 不是分叉顶点，那么 x 及 G 的所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，而所有悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集，那么 $F(G) \le \ell < l + 1 \le gp(G)$（如图 7 所示）；当 $\{u,v,w,x\}$ 都是分叉顶点时，所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，而除一个外所有悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集，可得 $F(G) \le \ell - 1 < \ell \le gp(G)$（如图 8 所示）。

图G的一个零强迫集　　图G的一个一般位置集

Figure 6. u,w are branch vertices
图 6. u,w **是分叉顶点**

图G的一个零强迫集　　图G的一个一般位置集

Figure 7. x is not a branch vertex
图 7. x **不是分叉顶点**



图G的一个零强迫集　　图G的一个一般位置集

Figure 8. u,v,w,x are branch vertices
图 8. u,v,w,x **是分叉顶点**

综上所述，$G\in\mathcal{A}$ 包含结构 α_2，并且 $G\notin\mathcal{B}$ 时，$gp(G)\ge F(G)$。证明完成。

引理 6：若 $G\in\mathcal{A}$ 包含结构 α_3，并且图 G 中两个圈恰好有一条公共边，则 $gp(G)\ge F(G)$。

证明：设 $G\in\mathcal{A}$ 包含结构 α_3，并且图 G 中两个圈恰好有一条公共边，不失一般性，假设 P_3 长为1，也就是说，$|V(P)|=|\{s,t\}|=2$。我们分一下两种情况讨论，并根据圈上分叉顶点的存在性分为几种子情况。

情形 1：$|V(P_1)|\ge 3$，$|V(P_2)|\ge 4$，其中 $V(P_1)\cap V(P_2)\cap V(P_3)=\{s,t\}$。

情形 1.1：如果 $\ell_{P_1}=\ell_{P_2}=0$，我们考虑 ℓ_s 和 ℓ_t 的值。设 $u\in V(P_1)$，$v\in V(P_2)$ 分别是 s 在 P_1 和 P_2 上的邻点，设 $x\in V(P_1)$，$y\in V(P_2)$ 分别是 t 在 P_1 和 P_2 上的邻点(u,x 可能为同一个顶点)。当 $\ell_s=\ell_t=0$ 时，$\{u,s\}$ 是 G 的一个零强迫集，$\{s,x,y\}$ 是 G 的一个一般位置集，则可得 $F(G)\le 2<3\le gp(G)$；当 $\ell_s=0$，$\ell_t\ne 0$ (或者 $\ell_s\ne 0$，$\ell_t=0$)时，根据引理 4.1.4，$\{u,v,s\}$ 和除一个外 G 的所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集，$\{x,y\}$ 和所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，可得 $F(G)\le \ell+2\le gp(G)$；当 $\ell_s\ne 0$ 并且 $\ell_t\ne 0$ 时，u 和所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集，x 和所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，则可得 $F(G)\le \ell+1\le gp(G)$。

情形 1.2：如果 $\ell_{P_1}=0$，$\ell_{P_2}\ne 0$ (或者 $\ell_{P_2}=0$，$\ell_{P_1}\ne 0$)，选取顶点 $u\in V(P_1)$ 是 s 的一个邻点(如果有必要，也可以假设为顶点 t 的邻点)，则 $\{u,s\}$ 和除一个外所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集，那么 $F(G)\le \ell+1$。任意 $x\in V(P_1)\setminus\{s,t\}$ 和所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，则可得 $gp(G)\ge \ell+1\ge F(G)$。

情形 1.3：如果 $\ell_{P_1}\ne 0$ 并且 $\ell_{P_2}\ne 0$，选择 P_1 中任意分叉顶点的一个邻点 $u\in V(P_1)$，u 和除一个外所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集，那么 $F(G)\le \ell$。而所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，可得 $gp(G)\ge \ell$。

情形 2：$|V(P_1)|=|V(P_2)|=3$ 并且 $V(P_1)\cap V(P_2)=\{s,t\}$。

设 $u\in V(P_1)\setminus\{s\}$，$v\in V(P_2)\setminus\{s\}$，分以下几种情况讨论。

情形 2.1：如果 $\ell_{P_1}=\ell_{P_2}=0$，$\{s,u\}$ 和所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集，而 $\{u,v\}$ 和所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，那么 $F(G)\le \ell+2\le gp(G)$。

情形 2.2：如果 $\ell_{P_1}=0$，$\ell_{P_2}\ne 0$ (或者 $\ell_{P_2}=0$，$\ell_{P_1}\ne 0$)，s 和所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集，所有悬挂顶点和 u 构成 G 的一个一般位置集，那么 $F(G)\le \ell+1\le gp(G)$。

情形 2.3：如果 $\ell_{P_1}\ne 0$ 并且 $\ell_{P_2}\ne 0$，s 和除一个外所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集，而所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，那么 $F(G)\le \ell\le gp(G)$。

因此，当 $G\in\mathcal{A}$ 包含结构 α_3，并且图 G 中两个圈恰好有一条公共边时，$gp(G)\ge F(G)$。证明完成。

引理 7：若 $G\in\mathcal{A}$ 包含结构 α_3，并且 $G\notin\mathcal{B}$，则 $gp(G)\ge F(G)$。

证明：设 $G\in\mathcal{A}$ 包含结构 α_3，由引理 6，我们只需考虑图 G 中两个圈至少有两条公共边的情况，也就是 $d(s,t)\ge 2$。

情形 1：$|V(P_1)|\ge 3,|V(P_2)|\ge 3$ 且 $V(P_3)\ge 4$。

情形 1.1：如果 $\ell_{P_1}=\ell_{P_2}=\ell_{P_3}=0$，设 $u\in V(P_1),v\in V(P_2)$ 和 $w\in V(P_3)$ 分别是 t 在 P_1,P_2,P_3 上的邻点。我们现在讨论 ℓ_s 和 ℓ_t 的值。当 $\ell_s=\ell_t=0$ 时，$\{u,v,t\}$ 是 G 的一个零强迫集并且 $F(G)\le 3$，$\{u,v,w\}$ 是 G 的一个一般位置集并且 $gp(G)\ge 3\ge F(G)$ (如图 9 所示)；当 $\ell_s=0$，$\ell_t\ne 0$ (或者 $\ell_s\ne 0$，$\ell_t=0$)时，$\{u,v\}$ 和所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集并且 $F(G)\le \ell+2$，$\{u,v,w\}$ 和所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集并且 $gp(G)\ge \ell+3>\ell+2\ge F(G)$ (如图 10 所示)；当 $\ell_s\ne 0$ 并且 $\ell_t\ne 0$ 时，所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集并且 $gp(G)\ge \ell$，而 $\{u,v\}$ 和除一个外所有悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集，并且 $F(G)\le \ell+1$ (如图 11 所示)。不能得到不等式(1)。特别地，如果 $\ell_s\le 2$，$\ell_t\ge 1$ (或者反过来)，那么 $\{u,v,w\}$ 和 $T(t)$ 的

所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，则可得 $F(G) \le \ell + 1 = 3 + \ell - 2 \le gp(G)$（如图 12 所示），即，当 $\ell_s, \ell_t \ge 3$ 时，不能得到不等式(1)。

Figure 9. $\ell_s = \ell_t = 0$
图 9. $\ell_s = \ell_t = 0$

Figure 10. $\ell_s = 0$， $\ell_t \ne 0$
图 10. $\ell_s = 0$， $\ell_t \ne 0$

Figure 11. $\ell_s = 0$ and $\ell_t \ne 0$
图 11. $\ell_s \ne 0$ 并且 $\ell_t \ne 0$

Figure 12. $\ell_s \le 2$， $\ell_t \ge 1$
图 12. $\ell_s \le 2$， $\ell_t \ge 1$

情形 1.2：如果 $\ell_{P_i} = \ell_{P_j} = 0$，$\ell_{P_k} \ne 0$，其中 $i, j, k = 1,2,3$ 并且 $i \ne j \ne k$，不失一般性，假设 $\ell_{P_1} = \ell_{P_2} = 0$ 并且 $\ell_{P_3} \ne 0$。设 $\{u,v\} \in V(P_3) \setminus \{s,t\}$ 是 P_3 中两个相邻顶点，$w \in V(P_2)$ 是 s 在 P_2 中的邻点，那么 $\{u,v,w\}$ 和除一个外所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集并且 $F(G) \le \ell + 2$，所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集并且 $gp(G) \ge \ell$，不能得到不等式(1)。

情形 1.3：如果 $\ell_{P_i} = 0$，$\ell_{P_j} \ne 0$，$\ell_{P_k} \ne 0$，不失一般性，假设 $\ell_{P_1} = 0$，$\ell_{P_2} \ne 0$ 并且 $\ell_{P_3} \ne 0$。设 $u \in V(P_1)$ 是 s 的邻点，$v \in V(P_2)$ 是 P_2 上的一个分叉顶点的邻点。那么 $\{u,v\}$ 和除一个外所有悬挂顶点是 G 的一个

零强迫集并且 $F(G)\le \ell+1$，而所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集并且 $gp(G)\ge \ell$，也不能得到不等式(1)。

情形 1.4：如果 $\ell_{P_i}\ne 0$，$\ell_{P_j}\ne 0$，$\ell_{P_k}\ne 0$，设 $u\in V(P_3)\setminus\{s,t\}$ 是一个分叉顶点，$v\in V(P_1)\setminus\{s,t\}$ 是 P_3 中 u 的一个邻点，$w\in V(P_2)$ 是 P_2 中 s 的一个邻点，那么 $\{v,w\}$ 和除一个外所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集并且 $F(G)\le \ell+1$，而所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集并且 $gp(G)\ge \ell$，同样不能得到不等式(1)。

情形 2：$|V(P_1)|=|V(P_2)|=|V(P_3)|=3$。

设 u,v,w 分别是 s 在 P_1,P_2,P_3 上的邻点，其中 $u\in V(P_1)$，$v\in V(P_2)$ 并且 $w\in V(P_3)$，分下面几种子情况讨论。

情形 2.1：如果 $\ell_{P_1}=\ell_{P_2}=\ell_{P_3}=0$，我们讨论 ℓ_s 和 ℓ_t 的值。当 $\ell_s=\ell_t=0$ 时，$\{u,v,s\}$ 是 G 的一个零强迫集并且 $F(G)\le 3$，$\{u,v,w\}$ 是 G 的一个一般位置集并且 $gp(G)\ge 3\ge F(G)$ (如图 13 所示)；当 $\ell_s=0$，$\ell_t\ne 0$ (或者 $\ell_s\ne 0$，$\ell_t=0$)时，$\{u,v\}$ 和所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集并且 $F(G)\le \ell+2$，$\{u,v,w\}$ 和所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集并且 $gp(G)\ge \ell+3>\ell+2\ge F(G)$ (如图 14 所示)；当 $\ell_s\ne 0$ 并且 $\ell_t\ne 0$ 时，所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集并且 $gp(G)\ge \ell$，$\{u,v\}$ 和除一个外所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集并且 $F(G)\le \ell+1$ (如图 15 所示)，不能得到不等式(1)。特别地，如果 $\ell_s\le 2$，$\ell_t\ge 1$ (或者 $\ell_t\le 2$，$\ell_s\ge 1$)，那么 $\{u,v\}$ 和除一个外所有悬挂顶点构成 G 的一个零强迫集并且 $F(G)\le \ell+1$，而 $\{u,v,w\}$ 和 $T(t)$ 的所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集，可得 $gp(G)\ge \ell_t+3=\ell-\ell_s+3\ge \ell+1\ge F(G)$ (如图 16 所示)，即，当 $\ell_s,\ell_t\ge 3$ 时，不能得到不等式(1)。

Figure 13. $\ell_s=\ell_t=0$

图 13. $\ell_s=\ell_t=0$

Figure 14. $\ell_s=0$, $\ell_t\ne 0$

图 14. $\ell_s=0$，$\ell_t\ne 0$

Figure 15. $\ell_s\ne 0$ and $\ell_t\ne 0$

图 15. $\ell_s \neq 0$ 并且 $\ell_t \neq 0$

图G的一个零强迫集　　图G的一个一般位置集

Figure 16. $\ell_s \le 2$, $\ell_t \ge 1$

图 16. $\ell_s \le 2$，$\ell_t \ge 1$

情形 2.2：如果 $\ell_{P_i} = \ell_{P_j} = 0$，$\ell_{P_k} \neq 0$，其中 $i,j,k = 1,2,3$ 并且 $i \neq j \neq k$，不失一般性，我们假设 $\ell_{P_1} = \ell_{P_2} = 0$ 并且 $\ell_{P_3} \neq 0$。当 $\ell_s = \ell_t = 0$ 时，$\{u,s\}$ 和所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集并且 $F(G) \le \ell + 2$，而 $\{u,v\}$ 和所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集并且 $gp(G) \ge \ell + 2 \ge F(G)$；当 $\ell_s = 0$，$\ell_t \neq 0$（或者 $\ell_s \neq 0$，$\ell_t = 0$）时，u 和所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集并且 $F(G) \le \ell + 1$，$\{u,v\}$ 和所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集并且 $gp(G) \ge \ell + 2$；当 $\ell_s \neq 0$ 并且 $\ell_t \neq 0$ 时，所有悬挂顶点构成 G 的一个一般位置集并且 $gp(G) \ge \ell$，u 和所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集并且 $F(G) \le \ell + 1 \le gp(G)$。

情形 2.3：如果 $\ell_{P_i} = 0$，$\ell_{P_j} \neq 0$，$\ell_{P_k} \neq 0$，不失一般性，假设 $\ell_{P_1} = 0$，$\ell_{P_2} \neq 0$ 并且 $\ell_{P_3} \neq 0$。当 $\ell_s = \ell_t = 0$ 时，s 和所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集并且 $F(G) \le \ell + 1$，而 u 和所有悬挂顶点是 G 的一个一般位置集并且 $gp(G) \ge \ell + 1$；当 $\ell_s = 0, \ell_t \neq 0$（或者反过来）时，所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集同时构成 G 的一个一般位置集，那么 $F(G) \le \ell \le gp(G)$；当 $\ell_s \neq 0$ 并且 $\ell_t \neq 0$ 时，s 和除一个外 G 的所有悬挂顶点是 G 的一个一般位置集，并且所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集，则可得 $F(G) \le \ell \le gp(G)$。

情形 2.4：如果 $\ell_{P_i} \neq 0$，$\ell_{P_j} \neq 0$，$\ell_{P_k} \neq 0$，当 $\ell_s = \ell_t = 0$ 时，s 和除一个外所有悬挂顶点是 G 的一个零强迫集并且所有悬挂顶点是 G 的一个一般位置集，那么 $F(G) \le \ell \le gp(G)$。

证明完成。

结合引理 4~引理 7，若 $G \in \mathcal{B}$，无法确定图 G 中零强迫数与一般位置数的关系，但 $G \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$，有 $gp(G) \ge F(G)$，即定理 3 成立。

3. 总结与展望

本文通过分析双圈图的三种结构得到零强迫数与一般位置数的关系，刻画了使得 $gp(G) \ge F(G)$ 成立的双圈图的结构。但是当 $G \in \mathcal{B}$ 时无法确定图 G 的零强迫数与一般位置数的关系，我们猜想，当 $G \in \mathcal{B}$ 时存在某些特殊结构，可以使 $F(G)$减小或者使 $gp(G)$增大从而得到 $F(G) \le gp(G)$，因此这个问题仍是我们需要研究的。

参考文献

[1] AIM Minimum Rank—Special Graphs Work Group (Barioli, F., Barrett, W., Butler, S., Cioaba, S.M., Cvetkovic, D., Fallat, S.M., Godsil, C., Haemers, W., Hogben, L., Mikkelson, R., Narayan, S., Pryporova, O., Sciriha, I., So, W., Stevanovic, D., van der Holst, H., Vander, M.K. and Wangsness, A.) (2008) Zero Forcing Sets and the Minimum Rank of Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **428**, 1628-1648. https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.10.009

[2] Barioli, F., Barrett, W., Fallat ,S.M., *et al.* (2010) Zero Forcing Parameters and Minimum Rank Problems. *Linear Algebra and Its Applications*, **433**, 401-411. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.03.008

[3] Edholm, C. J., Hogben, L., Huynh, M., *et al.* (2012) Vertex and Edge Spread of Zero Forcing Number, Maximum Nullity, and Minimum Rank of a Graph. *Linear Algebra and Its Applications*, **436**, 4352-4372. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.10.015

[4] Hogben, L. (2010) Minimum Rank Problems. *Linear Algebra and Its Applications*, **432**, 1961-1974. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.003

[5] Montazeri, Z. and Soltankhah, N. (2020) On the Relationship between the Zero Forcing Number and Path Cover Number for Some Graphs. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **46**, 767-776. https://doi.org/10.1007/s41980-019-00290-8

[6] Davila, R. and Kenter, F. (2015) Bounds for the Zero-Forcing Number of Graphs with Large Girth. *Theory and Applications of Graphs*, **2**, Article 1. https://doi.org/10.20429/tag.2015.020201

[7] Gentner, M., Penso, L.D., Rautenbach, D. and Souza, U.S. (2016) Extremal Values and Bounds for the Zero Forcing Number. *Discrete Applied Mathematics*, **214**, 196-200. https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.06.004

[8] Lu, L., Wu, B. and Tang, Z. (2016) Proof of a Conjecture on the Zero Forcing Number of a Graph. *Discrete Applied Mathematics*, **213**, 233-237. https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.05.009

[9] Zhang, W., Wang, J., Wang, W. and Ji, S.J. (2022) On the Zero Forcing Number and Spectral Radius of Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **29**, Article No. P1.33. https://doi.org/10.37236/10638

[10] Eroh, L., Kang, C.X. and Yi, E. (2017) A Comparison between the Metric Dimension and Zero Forcing Number of Trees and Unicyclic Graphs. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **33**, 731-747. https://doi.org/10.1007/s10114-017-4699-4

[11] Barioli, F., Barrett, W., Fallat, S.M., *et al.* (2013) Parameters Related to Tree-Width, Zero Forcing, and Maximum Nullity of a Graph. *Journal of Graph Theory*, **72**, 146-177. https://doi.org/10.1002/jgt.21637

[12] Anand, B.S., Sv, U.C., Changat M., *et al.* (2019) Characterization of General Position Sets and Its Applications to Cographs and Bipartite Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **359**, 84-89. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.04.064

[13] Klavžar, S., Tan, E. and Tian, J. (2023) Extremal Edge General Position Sets in Some Graphs. (Preprint)

[14] Hua, H., Hua, X. and Klavžar, S. (2021) Zero Forcing Number Versus General Position Number in Tree-Like Graphs. (Preprint)