

基于格子Boltzmann方法的顶盖驱动流数值模拟

韩晨雨

广州大学数学与信息科学学院, 广东 广州

收稿日期: 2023年3月26日; 录用日期: 2023年4月21日; 发布日期: 2023年4月28日

摘要

格子Boltzmann方法是一种从介观角度来模拟流体宏观行为的方法, 通过在时间和空间上使用完全离散的动力学模型来实现。利用Chapman-Enskog多尺度展开技术, 我们可以将基本模型恢复到符合标准的不可压Navier-Stokes方程, 给出了具体的求解过程。对于格子Boltzmann方程的边界处理, 我们采用非平衡外推格式并给出了详细的推导说明。对于顶盖方腔驱动流问题, 我们使用此方法进行了数值模拟, 以及对模拟结果进行了分析和讨论。通过与已有的试验及数值研究结果对比, 进行了鲁棒性分析, 验证了使用格子Boltzmann方法模拟顶盖方腔驱动流的正确性、准确性和稳定性。

关键词

格子Boltzmann方法, 顶盖方腔驱动流, Chapman-Enskog多尺度展开, 数值模拟, 非平衡外推格式

Numerical Simulation of Overhead-Driven Flow Based on the Lattice Boltzmann Method

Chenyu Han

School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong

Received: Mar. 26th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 28th, 2023

Abstract

Lattice Boltzmann method is a method to simulate the macroscopic behavior of fluid from a mesoscopic perspective, which is realized by using a completely discrete dynamic model in time and space. Using Chapman-Enskog multi-scale expansion technology, we can restore the basic model to the standard incompressible Navier-Stokes equation, and give the specific solution process. For the boundary treatment of lattice Boltzmann equation, we use the non-equilibrium extrapolation scheme and give a detailed derivation. For the problem of driving flow in the square cavity of the top cover, we use this method to carry out numerical simulation, and analyze and discuss the si-

mulation results. By comparing with the existing experimental and numerical results, the robustness analysis is carried out to verify the correctness, accuracy and stability of using the lattice Boltzmann method to simulate the driving flow in the square cavity of the top cover.

Keywords

Lattice Boltzmann Method, Roof Square Cavity Drive Flow, Chapman-Enskog Multi-Scale Expansion, Numerical Simulation, Non-Equilibrium Extrapolation Format

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

格子 Boltzmann 方法(lattice Boltzmann method)是最近三十年兴起的方法, 目的是为了解决计算流体力学问题。它以 Boltzmann 方程为基础, 并借助计算机技术发展而来[1]。

当今, 计算流体力学可分为三大类: 宏观方法, 介观方法, 微观方法[2]。介观层次上的格子 Boltzmann 方法相对于宏观和微观的计算流体力学和计算传热学方法而言, 具有物理意义明确, 边界条件处理简单, 程序执行容易, 并行性能好等性质。所以, 它被看作是最具有前景的数值模拟方法中的一种[3]。

在车辆行业中, 汽车风噪声是由车身上较小的凸起和空腔体引起的, 而揭示腔内流体的运动规律和物理机制长久以来是一个重要的研究课题。顶盖方腔驱动流的研究就是基于以上述问题为工程背景的[4]。因此, 研究这一问题既具有理论意义, 也包含工程意义。顶盖方腔驱动流问题是数学物理问题上一个可以用来检验各种求解方法的有效性的经典数值模型, 有许多科研工作者对其进行了数值求解。本文采用格子 Boltzmann 方法对其求解, 并验证该方法的正确性、准确性和稳定性。

2. 模型介绍

顶盖方腔驱动流是计算流体力学中的经典问题。如图 1 所示, 在一个每边长为 1 的正方形二维空腔中充满等密度的空气, 其顶盖以恒定为 0.1 的速度向右移动, 同时带动方腔内流体的流动, 其他三个边界保持静止不动[5]。我们的目的是通过数值模拟, 分析方腔中心线气体的流速, 绘制气体流动的流线图, 观察和研究方腔内气体的流动情况。

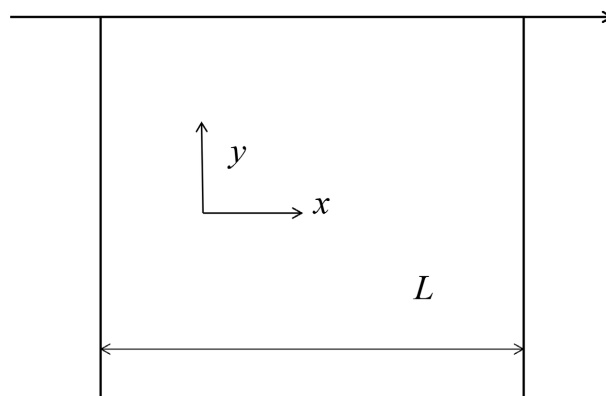


Figure 1. Schematic diagram of top cover drive flow

图 1. 顶盖驱动流示意图

选取笛卡儿坐标系，方腔左下角为坐标原点。计算区域： $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ 。初始条件如下：在方腔顶部，横坐标 x 方向上速度 $U = 0.1$ ，纵坐标 y 方向上速度 $V = 0$ ，在其余壁上 $U = V = 0$ ，方腔内部 $U = V = 0$ ，流场初始密度 $\rho_0 = 1$ 。

流体粒子的演化过程原始方程为偏微分方程 Boltzmann 方程，对其进行离散，得到代数方程格子 Boltzmann-BGK 方程(LBGK)。设速度分布函数为 f ， f 为空间 $r(x, y)$ 、分子速度 $\xi(\xi_x, \xi_y)$ 和时间 t 的函数 [5]。分布函数 $f(r, \xi, t)$ ，是一种从介观角度考虑的函数，表示每一个粒子处于某种状态下的概率，同时 $f(r, \xi, t)$ 也表示在 t 时刻，速度为 ξ 的粒子密度。

网格划分：格子间距比上时间步长等于格子离散速度，则为标准 LBM 的控制方程 [6]。以二维问题为例，即要求 $e_{ax} = \delta_x / \delta_t$ 和 $e_{ay} = \delta_y / \delta_t$ 。其中， e_{ax} 和 e_{ay} 分别为离散速度 e_α 在 x 和 y 方向上的分量； δ_x 和 δ_y 分别是 x 和 y 方向上的网格步长，均为常数。在此方法中，通常取 $e_{ax} = e_{ay} = 1$ ，因而有 $\delta_x = \delta_y = e_{ax} \delta_t = e_{ay} \delta_t = 1$ ，此时的物理量都做无量纲处理，均采用的是格子单位 [7]。

3. 数值计算方法

3.1. 从 Boltzmann 方程到格子 Boltzmann 方程

Boltzmann 方程是气体动理论基本方程，与流体力学基本方程关系密切，可以通过数值模拟，来描述流体的宏观运动 [8]。

设 f 为速度分布函数，先将 Boltzmann 方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + a \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} = (ff'_1 - ff_1) d_D^2 |g| \cos \theta d\Omega d\xi_1 = J(ff_1) \tag{1}$$

右端的碰撞项线性化处理，即 Boltzmann 方程中的碰撞项 $J(ff_1)$ 替换为一个简单的算子 Ω ，这就是 BGK 近似 [9]。得到 Boltzmann-BGK 方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + a \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} = \nu (f^{eq} - f) \tag{2}$$

局部平衡态分布函数 f^{eq} 随 t 和 $\xi(\xi_x, \xi_y)$ 变化 [5]。

再引入弛豫时间 τ_0 ，在不考虑外力的情况下，Boltzmann-BGK 方程可写作

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla f = \frac{1}{\tau_0} (f - f^{eq}) \tag{3}$$

然后将 ξ 离散为 $\{e_0, e_1, \dots, e_N\}$ ， N 表示速度种类数。与此同时，连续的分布函数 f 也相对应离散为 $\{f_0, f_1, \dots, f_N\}$ ，其中 $f_\alpha = f_\alpha(r, e_\alpha, t)$ ， $\alpha = 0, 1, \dots, N$ 。得到速度离散的 Boltzmann-BGK 方程为

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + e_\alpha \cdot \nabla f_\alpha = -\frac{1}{\tau_0} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) \tag{4}$$

还需要在时间和空间上差分离散，空间采用一阶迎风格式，时间采用一阶向前格式 [10]。

$$\begin{aligned} \frac{f_{\alpha_i}^{n+1} - f_{\alpha_i}^n}{\delta_t} + e_\alpha \frac{f_{\alpha_{i+1}}^n - f_{\alpha_i}^n}{\delta_r} &= -\frac{1}{\tau_0} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) \\ f_{\alpha_i}^{n+1} - f_{\alpha_i}^n + e_\alpha \delta_t \frac{f_{\alpha_{i+1}}^n - f_{\alpha_i}^n}{\delta_r} &= -\frac{\delta_t}{\tau_0} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) \\ (f_{\alpha_i}^{n+1} + f_{\alpha_{i+1}}^n) - (f_{\alpha_i}^n + f_{\alpha_{i+1}}^n) &= -\frac{1}{\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) \end{aligned}$$

得到完全离散化的 BGK 方程，即为格子 Boltzmann-BGK 方程

$$f_\alpha(r + e_\alpha \delta_t, t + \delta_t) - f_\alpha(r, t) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(r, t) - f_\alpha^{eq}(r, t)] \tag{5}$$

$$\tau = \tau_0 / \delta_t$$

3.2. 格子 Boltzmann 方法的基本模型

通常由三个要素构成一个完整的格子 Boltzmann 模型，分别为：格子——离散速度模型(DVM)，平衡态分布函数以及分布函数的演化方程[11]。如图 2 所示，本文使用 D2Q9 (2 维 9 速)模型[12]。其分布函数的演化方程为：

$$f_\alpha(r + e_\alpha \delta_t, t + \delta_t) - f_\alpha(r, t) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(r, t) - f_\alpha^{eq}(r, t)] \tag{6}$$

式中， f_α 为粒子沿 α 方向速度分布函数； r 为粒子空间位置； δ_t 为时间步长； τ 为无量纲松弛时间； e_α 表示速度配置：

$$e_\alpha = \begin{cases} (0, 0), & \alpha = 0 \\ \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha - 1)\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha - 1)\right) \right] c, & \alpha = 1 \sim 4 \\ \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha - 1) + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha - 1) + \frac{\pi}{2}\right) \right] c, & \alpha = 5 \sim 8 \end{cases} \tag{7}$$

式中， $c = \frac{\delta_x}{\delta_y}$ 分别为网格步长和时间步长，且通常有 $\delta_x = \delta_y$ 。

e_α 表示了粒子的运动方向，可表示为

$$e_0 = (0, 0), e_{1,3} = (\pm c, 0), e_{2,4} = (0, \pm c), e_{5,6} = (\pm c, c), e_{7,8} = (\mp c, -c)$$

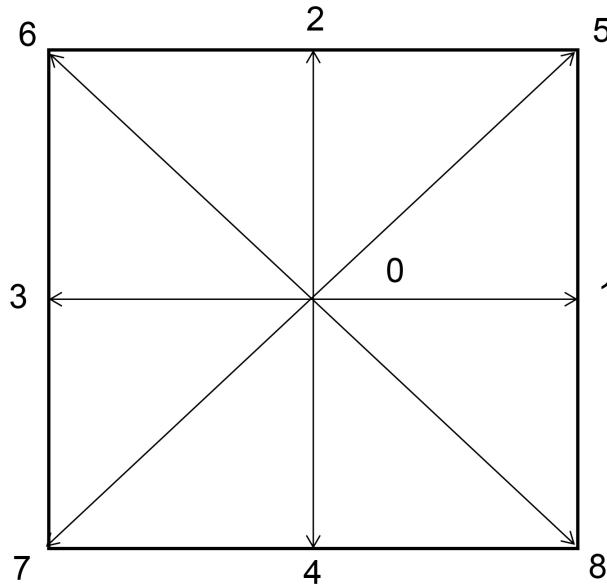


Figure 2. D2Q9 model
图 2. D2Q9 模型

$f_\alpha^{eq}(r, t)$ 为平衡态分布函数, 可表示为

$$f_\alpha^{eq} = \rho \omega_\alpha \left[1 + \frac{e_\alpha \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_\alpha \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right] \quad (8)$$

式中, c_s 为格子声速, ω_α 为权系数, $u = (u_1, u_2)$ 为气体宏观速度[5]。

$$f_\alpha^{eq} = \frac{4}{9} \rho \left(1 - \frac{3u^2}{2c^2} \right), \quad \alpha = 0$$

$$f_\alpha^{eq} = \frac{1}{9} \rho \left[1 + 3 \frac{e_\alpha \cdot u}{c^2} + \frac{9(e_\alpha \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

$$f_\alpha^{eq} = \frac{1}{36} \rho \left[1 + 3 \frac{e_\alpha \cdot u}{c^2} + \frac{9(e_\alpha \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], \quad \alpha = 5, 6, 7, 8$$

由分布函数, 可求得模型的宏观密度和速度:

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha, \quad u = \frac{1}{\rho} \sum_\alpha f_\alpha e_\alpha \quad (10)$$

应用 Chapman-Enskog 多尺度展开技术我们能从式(6)中恢复推导出其基本模型对应的宏观方程, 即能得到不可压缩的 Navier-Stokes 方程。以下是对此过程的详细求解过程。

在多尺度技术中, 通常使用以下三种形式的时间尺度: t^* (离散时间)、 $t_1 = kt^*$ (连续时间)、 $t_2 = k^2 t^*$ (连续时间), 两种空间尺度: r^* (离散空间)、 $r_1 = kr^*$ (连续空间) [5]。从而时间导数和空间导数有:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial t_1} + k^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial r} = k \frac{\partial}{\partial r_1} \quad (12)$$

Chapman-Enskog 展开还需要对分布函数进行展开, 即假设分布函数 $f_\alpha(r, t)$ 已经离平衡态不远, 并趋于平衡态。因此 $f_\alpha(r, t)$ 可以展开为 k 幂级数形式:

$$f_\alpha = f_\alpha^{eq} + k f_\alpha^{(1)} + k^2 f_\alpha^{(2)} + \dots \quad (13)$$

不考虑外力的格子 Boltzmann 方程如下:

$$f_\alpha(r + e_\alpha \delta_t, t + \delta_t) - f_\alpha(r, t) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(r, t) - f_\alpha^{eq}(r, t)] \quad (14)$$

对式(14)的左端对时间与空间做泰勒展开可得:

$$\begin{aligned} & f_\alpha(r + e_\alpha \delta_t, t + \delta_t) - f_\alpha(r, t) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot e_\alpha \delta_t + \frac{\partial}{\partial t} \delta_t \right) f_\alpha(r, t) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot e_\alpha \delta_t + \frac{\partial}{\partial t} \delta_t \right)^2 f_\alpha(r, t) \\ &= \delta_t \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_\alpha \cdot \nabla \right) f_\alpha(r, t) + \frac{1}{2!} \delta_t^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_\alpha \cdot \nabla \right)^2 f_\alpha(r, t) \\ &= -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(r, t) - f_\alpha^{eq}(r, t)] + O(\delta_t^3) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\delta_t \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_\alpha \cdot \nabla \right) f_\alpha + \frac{\delta_t^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_\alpha \cdot \nabla \right)^2 + \frac{1}{\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) + O(\delta_t^3) = 0 \quad (16)$$

把式(11)、(12)、(13)带到式(16)可以得到:

$$\begin{aligned} & \delta_t \left(k \frac{\partial}{\partial t_1} + k^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + k e_\alpha \cdot \nabla_1 \right) (f_\alpha^{eq} + k f_\alpha^{(1)} + k^2 f_\alpha^{(2)} + \dots) \\ & + \frac{\delta_t^2}{2} \left(k \frac{\partial}{\partial t_1} + k^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + k e_\alpha \cdot \nabla_1 \right)^2 (f_\alpha^{eq} + k f_\alpha^{(1)} + k^2 f_\alpha^{(2)} + \dots) \\ & + \frac{1}{\tau} (k f_\alpha^{(1)} + k^2 f_\alpha^{(2)} + \dots) + O(\delta_t^3) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

比较一下 k^1 和 k^2 的系数, 我们可以得到

$$k^1 : k \delta_t \frac{\partial}{\partial t_1} f_\alpha^{eq} + k \delta_t e_\alpha \cdot \nabla_1 f_\alpha^{eq} + \frac{1}{\tau} k f_\alpha^{(1)} = 0 \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + e_\alpha \cdot \nabla_1 \right) f_\alpha^{eq} + \frac{1}{\tau \delta_t} f_\alpha^{(1)} = 0 \quad (19)$$

$$k^2 : \delta_t k^2 \frac{\partial}{\partial t_2} f_\alpha^{eq} + \frac{\delta_t^2}{2} \left(k \frac{\partial}{\partial t_1} + k e_\alpha \cdot \nabla_1 \right)^2 f_\alpha^{eq} + \frac{k^2}{\tau} f_\alpha^{(2)} + \delta_t k^2 \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + e_\alpha \cdot \nabla_1 \right) f_\alpha^{(1)} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial f_\alpha^{eq}}{\partial t_2} + \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + e_\alpha \cdot \nabla_1 \right) f_\alpha^{(1)} + \frac{\delta_t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + e_\alpha \cdot \nabla_1 \right)^2 f_\alpha^{eq} + \frac{1}{\tau \delta_t} f_\alpha^{(2)} = 0 \quad (21)$$

由式(19), 可以将式(21)简化为

$$k^2 : \frac{\partial f_\alpha^{eq}}{\partial t_2} + \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + e_\alpha \cdot \nabla_1 \right) \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) f_\alpha^{(1)} + \frac{1}{\tau \delta_t} f_\alpha^{(2)} = 0 \quad (22)$$

平衡态分布函数需满足矩方程:

$$\sum_\alpha f_\alpha^{eq} = \rho, \quad \sum_\alpha f_\alpha^{eq} e_\alpha = \rho u$$

再根据式(10)密度、速度的定义, 我们可以得到:

$$\sum_\alpha f_\alpha^{eq} = \rho = \sum_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha (f_\alpha^{eq} + k f_\alpha^{(1)} + k^2 f_\alpha^{(2)} + \dots) = \sum_\alpha f_\alpha^{eq} + \sum_\alpha (k f_\alpha^{(1)} + k^2 f_\alpha^{(2)} + \dots) \quad (23)$$

因此我们能得到第一个关系式

$$\sum_\alpha k f_\alpha^{(1)} = \sum_\alpha k^2 f_\alpha^{(2)} = \dots = 0 \Rightarrow \sum_\alpha f_\alpha^{(n)} = 0 \quad (24)$$

同样, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \sum_\alpha f_\alpha^{eq} e_\alpha = u &= \frac{1}{\rho} \sum_\alpha f_\alpha e_\alpha = \frac{1}{\rho} \sum_\alpha (f_\alpha^{eq} + k f_\alpha^{(1)} + k^2 f_\alpha^{(2)} + \dots) e_\alpha \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_\alpha f_\alpha^{eq} e_\alpha + \frac{1}{\rho} \sum_\alpha (k f_\alpha^{(1)} e_\alpha + k^2 f_\alpha^{(2)} e_\alpha + \dots) \end{aligned} \quad (25)$$

所以我们得到第二个关系式

$$\sum_\alpha k f_\alpha^{(1)} e_\alpha = \sum_\alpha k^2 f_\alpha^{(2)} e_\alpha = \dots = 0 \Rightarrow \sum_\alpha f_\alpha^{(n)} e_\alpha = 0 \quad (26)$$

对式(19)求速度的零阶矩和一阶矩

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + e_{\alpha} \cdot \nabla_1 \right) f_{\alpha}^{eq} + \sum_{\alpha} \frac{1}{\tau \delta_t} f_{\alpha}^{(1)} = 0 \tag{27}$$

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_1} f_{\alpha}^{eq} = \frac{\partial \rho}{\partial t_1} \tag{28}$$

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} \cdot \nabla_1 f_{\alpha}^{eq} = \nabla_1 \cdot \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} e_{\alpha} = \nabla_1 \cdot (\rho u) \tag{29}$$

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\tau \delta_t} f_{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{\tau \delta_t} \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(1)} = 0 \tag{30}$$

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + e_{\alpha} \cdot \nabla_1 \right) f_{\alpha}^{eq} e_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{1}{\tau \delta_t} f_{\alpha}^{(1)} e_{\alpha} = 0 \tag{31}$$

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + e_{\alpha i} \cdot \nabla_{1i} \right) f_{\alpha}^{eq} e_{\alpha j} + \sum_{\alpha} \frac{1}{\tau \delta_t} f_{\alpha}^{(1)} e_{\alpha} = 0 \tag{32}$$

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_1} f_{\alpha}^{eq} e_{\alpha j} = \frac{\partial}{\partial t_1} \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} e_{\alpha j} = \frac{\partial}{\partial t_1} (\rho u_j) \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} \cdot \nabla_{1i} f_{\alpha}^{eq} e_{\alpha j} &= \sum_{\alpha} e_{\alpha i} \cdot \frac{\partial}{\partial r_{1i}} f_{\alpha}^{eq} e_{\alpha j} = \frac{\partial}{\partial r_{1i}} \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} e_{\alpha i} e_{\alpha j} \\ &= \frac{\partial}{\partial r_{1i}} \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} e_{\alpha i} e_{\alpha j} = \frac{\partial}{\partial r_{1i}} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) \end{aligned} \tag{34}$$

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\tau \delta_t} f_{\alpha}^{(1)} e_{\alpha} = \frac{1}{\tau \delta_t} \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(1)} e_{\alpha} = 0 \tag{35}$$

故，得到 t_1 时间尺度上的宏观方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_1} + \nabla_1 \cdot (\rho u) = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial r_{1i}} (\rho u_i u_j) = - \frac{\partial p}{\partial r_{1j}} \tag{37}$$

同理可得 t_2 时间尺度上的宏观方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_2} = 0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} (\rho u_j) + \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \frac{\partial}{\partial r_{1i}} \left(\sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} f_{\alpha}^{(1)} \right) = 0 \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} f_{\alpha}^{(1)} &= -\tau \delta_t \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + e_{\alpha} \cdot \nabla_1 \right) f_{\alpha}^{eq} \\ &= -\tau \delta_t \sum_{\alpha} \left(e_{\alpha i} e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial t_1} f_{\alpha}^{eq} + e_{\alpha i} e_{\alpha j} e_{\alpha l} \cdot \nabla_{1l} f_{\alpha}^{eq} \right) \\ &= -\tau \delta_t \left[\frac{\partial}{\partial t_1} (\rho u_i u_j + \rho c_s^2 \delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial r_{1i}} \left(\sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} e_{\alpha l} f_{\alpha}^{eq} \right) \right] \end{aligned} \tag{40}$$

由式(36)可得

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(\rho c_s^2 \delta_{ij}) = c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial t_1} \delta_{ij} = -c_s^2 \nabla_1 \cdot (\rho u) \delta_{ij} \tag{41}$$

由式(36)和(37)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1}(\rho u_i u_j) &= u_j \frac{\partial}{\partial t_1}(\rho u_i) + u_i \frac{\partial}{\partial t_1}(\rho u_j) - u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial t_1} \\ &= u_j \left[-\frac{\partial}{\partial r_{1l}}(\rho u_l u_i) - \frac{\partial}{\partial r_{1i}}(\rho c_s^2 \delta_{il}) \right] + u_i \left[-\frac{\partial}{\partial r_{1l}}(\rho u_l u_j) - \frac{\partial}{\partial r_{1j}}(\rho c_s^2 \delta_{jl}) \right] - u_i u_j \frac{\partial(\rho u_l)}{\partial r_{1l}} \\ &= -u_j \frac{\partial}{\partial r_{1l}}(\rho u_l u_i) - u_j c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial r_{1i}} - u_i \frac{\partial}{\partial r_{1l}}(\rho u_l u_j) - u_i c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial r_{1j}} + u_i u_j \frac{\partial(\rho u_l)}{\partial r_{1l}} \\ &= -u_j c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial r_{1i}} - u_i c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial r_{1j}} - \rho u_j u_i \frac{\partial u_l}{\partial r_{1l}} - u_i \frac{\partial}{\partial r_{1l}}(\rho u_l u_j) \\ &= -u_j c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial r_{1i}} - u_i c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial r_{1j}} - \frac{\partial}{\partial r_{1l}}(\rho u_l u_j u_i) \end{aligned} \tag{42}$$

根据 D2Q9 的平衡态分布函数

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_{1l}} \left(\sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} e_{\alpha l} f_{\alpha}^{eq} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_{1l}} \left(\sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} e_{\alpha l} \rho \omega_{\alpha} \left(1 + \frac{e_{\alpha} \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_{\alpha} \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_{1l}} \left(\sum_{\alpha=1}^4 e_{\alpha i} e_{\alpha j} e_{\alpha l} \rho \omega_{\alpha} \left(1 + \frac{e_{\alpha} \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_{\alpha} \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha=5}^8 e_{\alpha i} e_{\alpha j} e_{\alpha l} \rho \omega_{\alpha} \left(1 + \frac{e_{\alpha} \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_{\alpha} \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_{1l}} \left(\sum_{\alpha=1}^4 e_{\alpha i} e_{\alpha j} e_{\alpha l} \rho \frac{1}{9} \frac{e_{\alpha} \cdot u}{c_s^2} + \sum_{\alpha=5}^8 e_{\alpha i} e_{\alpha j} e_{\alpha l} \rho \frac{1}{36} \frac{e_{\alpha} \cdot u}{c_s^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_{1l}} \left(\frac{2\rho u_m}{9c_s^2} c^4 \delta_{ijlm} + \frac{\rho u_m}{36c_s^2} (4c^2 \Delta_{ijlm} - 8c^2 \delta_{ijlm}) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_{1l}} \left(\frac{2}{3} \rho u_m c^2 \delta_{ijlm} + \frac{1}{3} \rho u_m c^2 \Delta_{ijlm} - \frac{2}{3} \rho u_m c^2 \delta_{ijlm} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_{1l}} \left(\frac{1}{3} \rho u_m c^2 (\delta_{ij} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_{1l}} (\rho c_s^2 (\delta_{ij} u_l + \delta_{il} u_j + \delta_{jl} u_i)) \\ &= c_s^2 \nabla_1 \cdot (\rho u) \delta_{ij} + u_j c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial r_{1i}} + u_i c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial r_{1j}} + \rho c_s^2 \left(\frac{\partial u_j}{\partial r_{1i}} + \frac{\partial u_i}{\partial r_{1j}} \right) \end{aligned} \tag{43}$$

其中 $\frac{c^2}{c_s^2} = 3$ 。

将式(41)、(42)和(43)代入式(40)得

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} f_{\alpha}^{(1)} = -\tau \delta_i \left[\rho c_s^2 \left(\frac{\partial u_j}{\partial r_{1i}} + \frac{\partial u_i}{\partial r_{1j}} \right) - \frac{\partial}{\partial r_{1l}}(\rho u_l u_j u_i) \right] \tag{44}$$

联立 t_1 和 t_2 时间尺度方程可得模型对应的宏观方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \tag{45}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho uu) = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\rho \nu (\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{\nu}{\rho} \nabla \cdot (\rho uuu) \right) \tag{46}$$

其中 $\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \delta_t = \frac{1}{3} c^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \delta_t$, ν 为运动粘度系数。

与标准的可压缩 N-S 方程相比, 式(46)存在动量偏差[13]。对低马赫数流动来说 $\nabla \cdot (\rho uuu)$ 可以忽略, 如果流体密度为常数 $\rho = \rho_0$, 此时宏观方程为

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{47}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (uu) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla \cdot (\nabla u + (\nabla u)^T) \tag{48}$$

式中, $\nabla \cdot (\nabla u)^T = \nabla (\nabla \cdot u) = 0$, 于是上述方程为标准的不可压 N-S 方程组。

3.3. 格子 Boltzmann 方法的边界处理

本文采用 Guo 等人提出的非平衡外推格式, 即将边界节点上的分布函数分解成平衡态和非平衡态来讨论[14]。

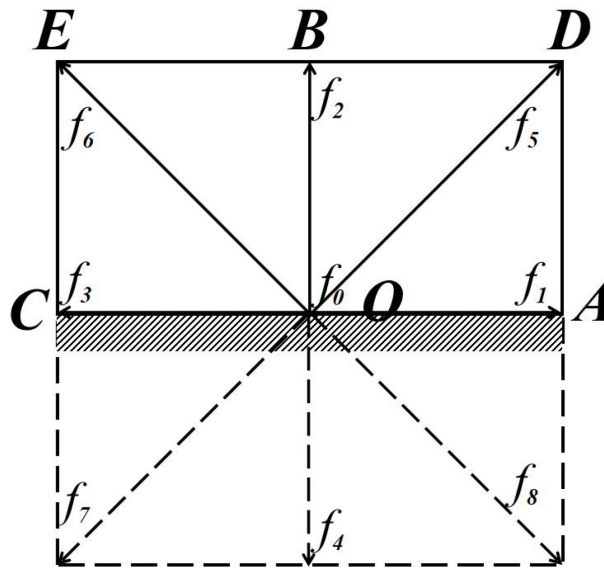


Figure 3. Unbalanced extrapolation format
图 3. 非平衡外推格式

如图 3 所示, 在 D2Q9 模型中, 假设边界上的是 TOP, 流场中的是 SRQ。在 t 时刻, 因为边界格点 O 处没有 f_2 、 f_5 和 f_6 方向迁移来的粒子, 因此分布函数 f_2 、 f_5 和 f_6 都是未知的, 但格点 Q 、 R 、 S 的分布函数、宏观密度和速度均已知。分布函数在 O 点的值是未知的, 为了确定在此处的值, 将此处分解为平衡态和非平衡态, 即

$$f_\alpha(O, t) = f_\alpha^{eq}(O, t) + f_\alpha^{neq}(O, t)$$

其中 $f_\alpha^{neq}(O, t)$ 是非平衡态部分。

对于平衡态部分，对速度边界条件， O 点速度 $u(O,t)$ 已知，密度 $\rho(O,t)$ 未知的情况下，可用临近的 R 点密度 $\rho(R,t)$ 来代替。 O 点的平衡态分布函数由 $f_\alpha^{eq}(O,t) = Feq(\rho(R,t), u(O,t))$ 近似获得。对于非平衡态部分，则可以使用临近格点 R 处的非平衡态函数来近似，即

$$f_\alpha^{neq}(O,t) = f_\alpha^{neq}(R,t) = f_\alpha(R,t) - f_\alpha^{eq}(R,t) = f_\alpha(R,t) - Feq(\rho(R,t), u(R,t))$$

因此，可得到 O 点的近似分布函数：

$$f_\alpha(O,t) = f_\alpha^{eq}(O,t) + [f_\alpha(R,t) - f_\alpha^{eq}(R,t)] \tag{49}$$

3.4. 小结

格子 Boltzmann 方法的计算过程是一个循环演化的过程，每前进一个时步，完成一次循环。

- 1、全场初始化，确定各节点上的宏观密度 ρ 和宏观速度 u 以及分布函数 f_α ；
- 2、接着可以得到此时的平衡态分布函数 f_α^{eq} ；
- 3、再根据 LBGK 碰撞模型可以得到碰撞后的密度分布函数 f_α^+ ；
- 4、再通过迁移，就可以得到下一时刻的密度分布函数 $f_\alpha(r + e_\alpha \delta_t, t + \delta_t)$ ；
- 5、由某一时刻的密度分布函数，可以计算出该时刻的宏观密度和宏观速度；
- 6、边界处理；
- 7、判断收敛性。重复上述 2~6 过程，可以实现整个过程的不断演化。

以上是对 LBM 的分析。

4. 数值模拟

4.1. 模拟过程

取边长为 1 的正方形腔体，选择笛卡儿坐标系，方腔左下角为坐标原点，格子取为 256×256 [4]。

初始条件：方腔顶部， $U = 0.1, V = 0$ ；其余壁面， $U = V = 0$ ；方腔内部， $U = V = 0$ ；初始密度 $\rho_0 = 1$ ，由式(8)计算平衡态分布函数 f_α^{eq} ，在 $t = 0$ 时刻， $f_\alpha = f_\alpha^{eq}$ 。

根据式(5)进行迭代计算，边界处理采用非平衡外推格式。在数值模拟中，运动黏度系数可由雷诺数定义式反算获得： $\nu = UL_N/Re$ ，其中， U 为顶盖驱动速度， L_N 为方腔顶部的格子数，即 $L_N = 256$ 。

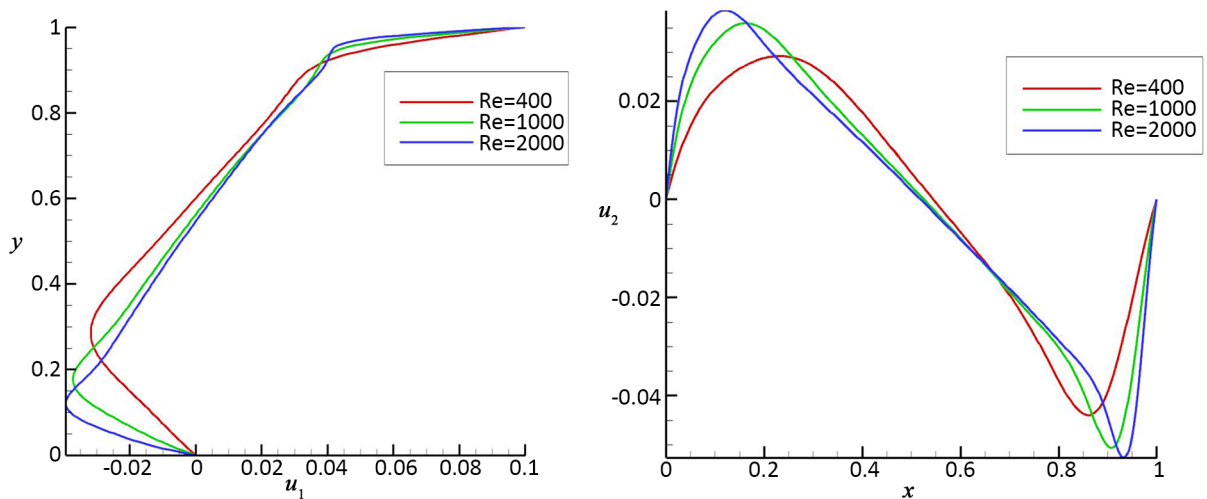


Figure 4. Center line velocity u_1, u_2 of square cavity

图 4. 方腔中心线速度 u_1, u_2

各参数均为格子单位，终止条件设为相邻两个时间步的最大流函数差值小于 10^{-6} [4]。

4.2. 模拟结果

图 4 表示出了雷诺数分别为 400、1000、2000 时，通过方腔中心 $x = 0.5$ ，水平方向的速度分量 u_1 随纵坐标 y 的变化，与通过方腔中心 $y = 0.5$ ，垂直方向的速度分量 u_2 随横坐标 x 的变化。可以观察到，随着雷诺数的增大，速度曲线的波峰变化越大。说明雷诺数越大(流体的惯性力越大和粘性力越小)，速度变化越大。

图 5 分别示出了雷诺数为 400 和 1000 时，中心线速度结果和 Ghia 的结果对比。通过对比发现，方腔的中心线速度分量 u_1 、 u_2 和 Ghia 的结果基本保持一致。表明了我们结果的正确性和准确性。

在图 6 中，对于不同的雷诺数，我们对水平初速度 U 作了一个微小的扰动，观察图形的变化，发现图形的形态几乎没有改变，即该系统在稳定状态下受到较小的扰动后仍能回到一个相近的稳定状态，表明了这个算法和模型具有鲁棒性。

在图 7 中，对于不同的雷诺数，我们画出了流线图。显然，可以看到在方腔内部生成了大小不同的旋涡。三个图的中心都出现一个一级涡，在左右下角都会出现一个二级涡。当 $Re = 2000$ 时，左上角出现了第三个二级涡。当 $Re = 400$ 时，一级涡中心在方腔中心偏右上。当雷诺数变大，左、右下角的涡也随

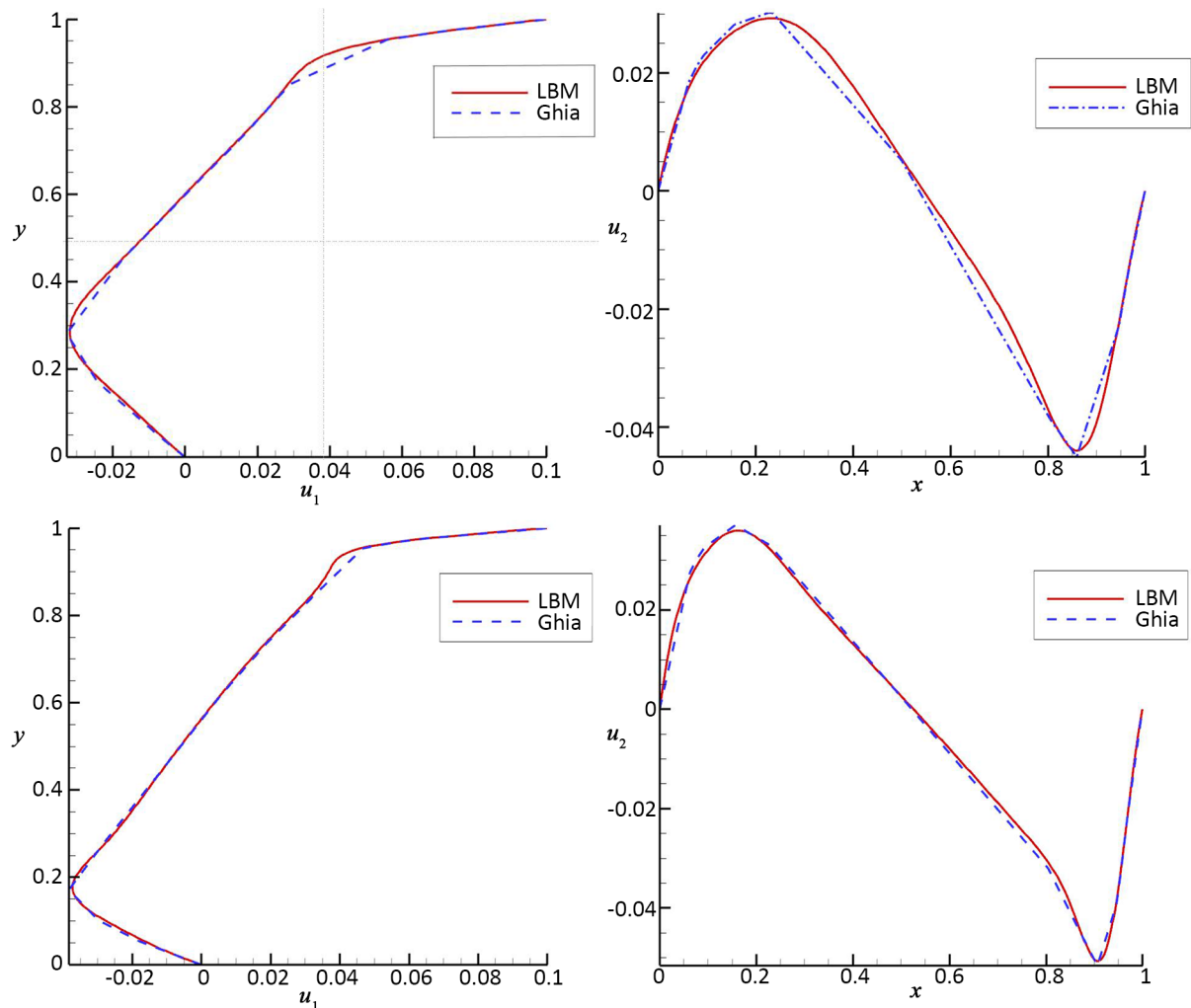


Figure 5. Comparison of centerline velocity results with Ghia

图 5. 中心线速度结果与 Ghia 的对比

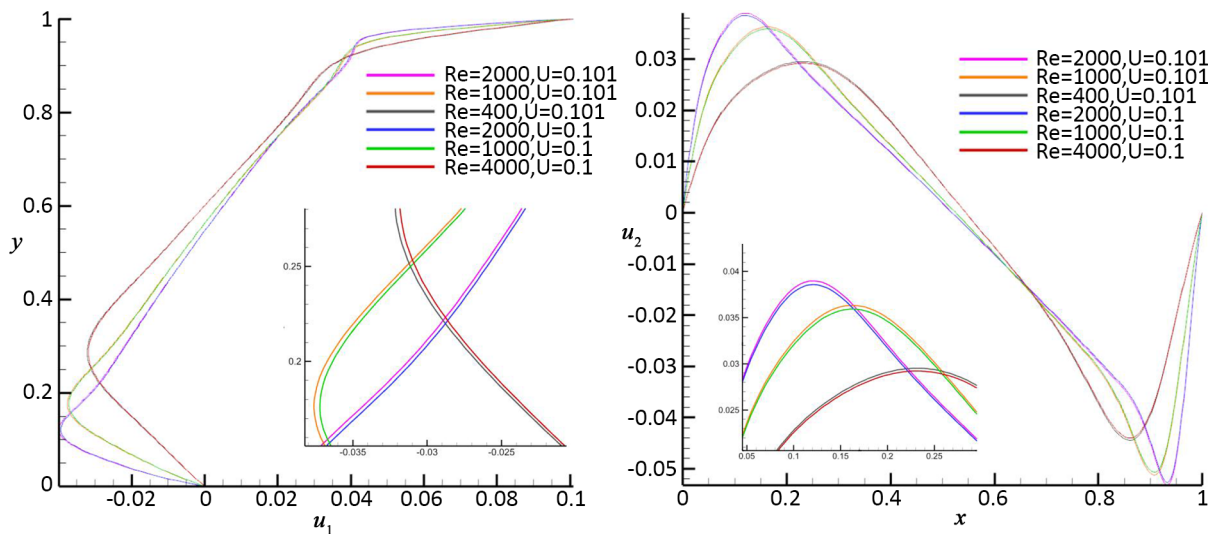


Figure 6. Comparison of centerline velocities at different Reynolds numbers and horizontal initial velocities
图 6. 不同雷诺数和水平初速度下中心线速度对比

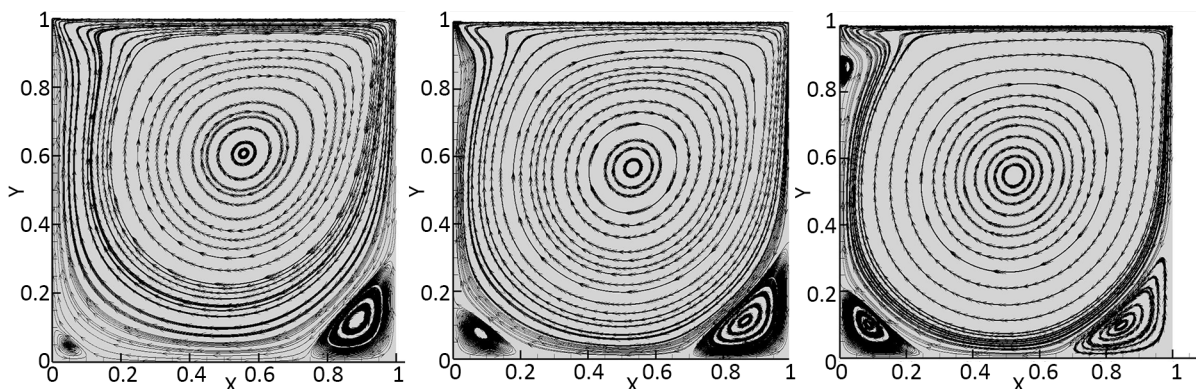


Figure 7. Streamline diagram of top cover drive flow with $Re = 400, 1000, 2000$
图 7. $Re = 400, 1000, 2000$ 顶盖驱动流的流线图

之增大，且一级涡中心向方腔中心移动[15]。因此，可以清晰地看出雷诺数对流动模式的影响。

5. 结束语

本文详细讨论了 LBM，并以 LBM 为基础，对顶盖方腔驱动流中的流场进行了数值模拟，采用的是 D2Q9 模型，在边界条件上采用非平衡外推格式，计算简单，易于实现。得到并详细讨论了雷诺数分别为 $Re = 400, 1000, 2000$ 时的数值结果。与前人已有的数值研究结果进行对比，表明了该方法的正确性、准确性和鲁棒性。LBM 对理解流体流动有现实意义，拥有广阔的研究前景。

参考文献

- [1] 张宗宁. 基于格子 Boltzmann 方法求解若干非线性偏微分方程[D]: [硕士学位论文]. 银川: 北方民族大学, 2022.
- [2] 陶文铨. 数值传热学[M]. 第 2 版. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.
- [3] Chen, S. and Doolen, G.D. (1998) Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **30**, 329-364. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.30.1.329>
- [4] 韩善灵, 朱平, 林忠钦. 基于格子 Boltzmann 方法模拟方腔顶盖驱动流[J]. 中国机械工程, 2005, 16(1): 64-66, 73.
- [5] 何雅玲, 王勇, 李庆. 格子 Boltzmann 方法的理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

-
- [6] 冉政, 陈健. 关于格子 Boltzmann 方法的几个问题(I) [J]. 空气动力学学报, 2016, 34(3): 333-340.
- [7] 郭照立, 郑楚光. 格子 Boltzmann 方法的原理及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [8] 李婷. 基于格子 Boltzmann 方法的自由表面模拟[D]: [硕士学位论文]. 沈阳: 东北大学, 2014.
- [9] Qian, Y.H., Succi, S. and Orszag, S.A. (1995) Recent Advances in Lattice Boltzmann Computing. *Annual Reviews of Computational Physics*, **3**, 1191-1251. https://doi.org/10.1142/9789812830647_0006
- [10] 许鹤林. 格子 Boltzmann 方法理论及其在流体动力学中的应用研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 复旦大学, 2010.
- [11] 陈宁光. 基于格子 Boltzmann 方法两相流流动与传热研究[D]: [硕士学位论文]. 郑州: 郑州大学, 2021.
- [12] 刘芳, 施卫平. 用格子 Boltzmann 方法模拟非线性热传导方程[J]. 应用数学和力学, 2015, 36(11): 1158-1166.
- [13] 马桂栋. 基于格子 Boltzmann 方法的多孔介质内多相流动的数值研究[D]: [硕士学位论文]. 青岛: 中国石油大学, 2019.
- [14] Guo, Z.-L., Zheng, C.-G. and Shi, B.-C. (2002) Non-Equilibrium Extrapolation Method for Velocity and Boundary Conditions in the Lattice Boltzmann Method. *Chinese Physics*, **11**, 366-374. <https://doi.org/10.1088/1009-1963/11/4/310>
- [15] 王广超. 流体流动的格子 Boltzmann 方法[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中科技大学, 2004.