Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(4), 1722-1731**
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124179

一类带扩散对流SIS模型的全局吸引子

李得旺，梅林锋*

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年3月24日；录用日期：2023年4月18日；发布日期：2023年4月27日

摘 要

本文研究一类SIS (Susceptible-Infected-Susceptible)反应扩散对流传染病模型。该模型在加入对流项q后，我们可以更好地模拟生物种群在受到被动影响时的动力行为。我们研究了该模型的基本再生数$\mathcal{R}$对模型两类平衡点稳定性的影响。当基本再生数$\mathcal{R}<1$时，无病平衡点是线性稳定的，当$\mathcal{R}>1$时，无病平衡点是不稳定的。此时通过动力系统的知识我们证明了正全局吸引子的存在性， 由此也可得到正疾病平衡点的存在性。

关键词

SIS模型，基本再生数，稳定性

Global Attractor of the SIS Epidemic Model with Diffusion and Convection

Dewang Li, Linfeng Mei*

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 24th, 2023; accepted: Apr. 18th, 2023; published: Apr. 27th, 2023

Abstract

In this paper, we study a class of SIS reaction diffusion convective infectious disease model. Adding convection term, we can better simulate the outcomes of biological populations. We study the effects of the basic reproduction number $\mathcal{R}$ on stability of the two types of equilibrium points of the model. When $\mathcal{R}<1$, disease-free equilibrium is linearly stable, while when $\mathcal{R}>1$, disease-free equilibrium is not linearly stable. In the later case, using theory of dynamical systems, we proved the existence of a positive global attractor of the system, and as a consequence, the existence of at least one positive equilibrium.

*通讯作者。

文章引用: 李得旺, 梅林锋. 一类带扩散对流 SIS 模型的全局吸引子[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1722-1731.
DOI: 10.12677/aam.2023.124179

Keywords

SIS Model, The Basic Reproduction Number, Stability

1. 引言

近几年，疾病在异质环境中的传播引起人们的广泛关注，一些学者研究的反应－扩散 SIS 传染病模型给了我们很好的启示，如参考文献[1] [2] [3]，但是对于生物种群所受的被动影响，此类模型却无法很好的体现出来。因此我们为了研究生物种群所受的被动影响，这个我们用对流项来进行模拟。在文献[4]中，Lou 和 Cui 研究是对流项为非负常数 q 的模型。他们关注了基本再生数 $\mathcal{R}$ 与 1 的大小关系对 EE (Endemic-Equilibrium)和 DFE (Disease-Free Equilibrium)的稳定性影响，同时他们也研究了基本再生数 $\mathcal{R}$ 随 $q \to 0$ 和 $q \to \infty$ 时的渐进行为。

在上面的研究基础上，Cui 等人在文献[5]中研究了具有群体作用机制的模型：

$$\begin{cases} \tilde{S}_t = d_S \tilde{S}_{xx} - q\tilde{S}_x - \beta(x)\tilde{S}\tilde{I} + \gamma(x)\tilde{I}, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ \tilde{I}_t = d_I \tilde{I}_{xx} - q\tilde{I}_x + \beta(x)\tilde{S}\tilde{I} - \gamma(x)\tilde{I}, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ d_S \tilde{S}_x - q\tilde{S} = d_I \tilde{I}_x - q\tilde{I} = 0, & x = 0, L,\ t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

并且

$$\int_0^L \left(\tilde{S}(x,t) + \tilde{I}(x,t)\right)\mathrm{d}x = N, \quad t \ge 0. \tag{2}$$

其中 $\tilde{S}(x,t)$ 和 $\tilde{I}(x,t)$ 分别表示在给定区间 $[0,L]$ 位置在 x 点，时间为 t 时易感人群和感染人群的密度。正常数 d_S 和 d_I 分别表示在 x 点易感人群和感染人群的扩散系数；$\beta(x)$ 和 $\gamma(x)$ 是 $[0,L]$ 上正的 Hölder 连续函数，分别表示在 x 点的传播和恢复速率，N 表示在 $t=0$ 时人口总数。当 $q>0$ 时，$x=0$ 表示上游，$x=L$ 表示下游。作者讨论了方程(1)中当基本再生数 $\mathcal{R}>1$ 时，EE 的存在性，研究了在扩散系数和对流系数变化时 EE 的渐进行为。

在文献[6]中 Zhang 和 Cui 研究了下面的方程

$$\begin{cases} \bar{S}_t - d_S \Delta\bar{S} = a(x)\bar{S} - b(x)S^2 - \beta(x)\dfrac{\bar{S}\bar{I}}{\bar{S}+\bar{I}} + \gamma(x)\bar{I} - \eta(x)\bar{S}, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \bar{I}_t - d_I \Delta\bar{I} = \beta(x)\dfrac{\bar{S}\bar{I}}{\bar{S}+\bar{I}} - \gamma(x)\bar{I} + \eta(x)\bar{S}, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial\bar{S}}{\partial\nu} = \dfrac{\partial\bar{I}}{\partial\nu} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ \bar{S}(x,0) = \bar{S}_0(x) \ge 0, \bar{I}(x,0) = \bar{I}_0(x) \ge 0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

其中 $a(x)\bar{S} - b(x)S^2$ 作为非线项表示易感人群受 logistic 的影响。$a(x), b(x), \eta(x), \beta(x)$ 以及 $\gamma(x)$ 都是正的 Hölder 函数。且 $\beta(x)$ 表示传播率，$\gamma(x)$ 表示恢复率。作者研究该模型平衡系统正解的存在有界性，以及当两类扩散系数 d_I 和 d_S 变化时，正解的渐近行为。

2. 主要结果及证明

受到以上作者们研究的启发，我们研究了如下具有扩散及对流 SIS 传染病模型：

$$\begin{cases} S_t-\nabla\cdot\left(d_S\nabla S-q_S S\nabla m\right)=aS-bS^2-\beta SI-\gamma I, & x\in\Omega,t>0,\\ I_t-\nabla\cdot\left(d_I\nabla I-q_I I\nabla m\right)=\beta SI-\gamma I-\alpha I, & x\in\Omega,t>0,\\ d_S\dfrac{\partial S}{\partial n}-q_S S\dfrac{\partial m}{\partial n}=d_I\dfrac{\partial I}{\partial n}-q_I I\dfrac{\partial m}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,t>0,\\ S(x,0)=S_0(x)\gneq 0, I(x,0)=I_0(x)\gneq 0, & x\in\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

其中 Ω 是 R^n 一有界区域并且边界 $\partial\Omega$ 是光滑的。$S(x,t)$ 和 $I(x,t)$ 分别表示位于 x 处，时间为 t 时刻时的易感染人群和感染人群的密度。d_S 和 d_I 都大于零，分别表示易感染人群和感染人群的迁移速率。∇ 为梯度算子，$m_i\in C^2(\Omega)$ 表示非均匀资源的密度，∇m 表示沿资源迁移的定向运动。β 和 γ 表示位于 x 处疾病的传播率和恢复率，并且都是正的 Hölder 函数。非线性项 $aS-bS^2$ 表示易感染人群受到 logistic 增长的影响，并且 α,a 和 b 都是正的 Hölder 函数。n 为单位外法向量。

方程(4)的平衡系统是下面的椭圆方程

$$\begin{cases} -\nabla\cdot\left(d_S\nabla S-q_S S\nabla m\right)=aS-bS^2-\beta SI+\gamma I, & x\in\Omega,t>0,\\ -\nabla\cdot\left(d_I\nabla I-q_I I\nabla m\right)=\beta SI-\gamma I-\alpha I, & x\in\Omega,t>0,\\ d_S\dfrac{\partial S}{\partial n}-q_S S\dfrac{\partial m}{\partial n}=d_I\dfrac{\partial I}{\partial n}-q_I I\dfrac{\partial m}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,t>0. \end{cases} \tag{5}$$

对于方程(4)，参考文献[7] [8]方法，我们定义如下的基本再生数 $\mathcal{R}$：

$$\mathcal{R}=\sup_{\phi\in H^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega\beta\hat{S}\mathrm{e}^{-\frac{q_I m}{d_I}}\phi^2\mathrm{d}x}{\int_\Omega d_I\mathrm{e}^{-\frac{q_I m}{d_I}}\phi_x^2\mathrm{d}x+\int_\Omega(\gamma+\alpha)\mathrm{e}^{-\frac{q_I m}{d_I}}\phi^2\mathrm{d}x}. \tag{6}$$

其中 $\hat{S}$ 满足下面的方程

$$\begin{cases} -\nabla\cdot\left(d_S\nabla S-q_S S\nabla m\right)=aS-bS^2, & x\in\Omega,t>0,\\ d_S\dfrac{\partial S}{\partial n}-q_S S\dfrac{\partial m}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,t>0, \end{cases} \tag{7}$$

引理 1：$1-\mathcal{R}$ 与 λ 同号，其中 λ 是下面问题的主特征值：

$$\begin{cases} d_I\Delta\overline{\psi}+q_I\nabla m\nabla\overline{\psi}+\left(\beta\hat{S}-\gamma-\alpha\right)\overline{\psi}+\lambda\overline{\psi}=0, & x\in\Omega,t>0,\\ \dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial n}=0 & x\in\partial\Omega,t>0, \end{cases} \tag{8}$$

其中 $\overline{\psi}>0$ 是特征值 λ 所对应的特征函数。

证明：根据基本再生数 $\mathcal{R}$ 的定义，则存在正的函数 $\zeta\in C^2(\Omega)$，使得

$$\begin{cases} \nabla\cdot\left(d_I\nabla\zeta-q_I\zeta\nabla m\right)-(\gamma+\alpha)\zeta=-\dfrac{1}{\mathcal{R}}\beta\hat{S}\zeta, & x\in\Omega,t>0,\\ d_I\dfrac{\partial\zeta}{\partial n}-q_I\zeta\dfrac{\partial m}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,t>0. \end{cases} \tag{9}$$

(8)式等号两边同乘 $\mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}$，再令 $\overline{\psi}=\mathrm{e}^{-\frac{q_I m}{d_I}}\psi$，则有

$$\begin{cases}\nabla\cdot\left(d_I\nabla\psi-q_I\psi\nabla m\right)+\left(\beta\hat{S}-\gamma-\alpha\right)\psi+\lambda\psi=0, & x\in\Omega,t>0,\\ d_I\dfrac{\partial\psi}{\partial n}-q_I\psi\dfrac{\partial m}{\partial n}=0 & x\in\partial\Omega,t>0.\end{cases}\tag{10}$$

(9)式两端同乘 $\mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}\psi$，(10)式两端同乘 $\mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}\zeta$ 然后在 $\bar{\Omega}$ 上分部积分，则有

$$\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}\psi\left\{\nabla\cdot\left(d_I\nabla\zeta-q_I\zeta\nabla m\right)-\left(\gamma+\alpha\right)\zeta\right\}\mathrm{d}x=-\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}\psi\frac{1}{\mathcal{R}}\beta\hat{S}\zeta\,\mathrm{d}x$$

即

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}\left\{d_I\nabla\zeta\cdot\nabla\psi-\frac{q_I^2\left|\nabla m\right|^2}{d_I}\zeta\psi\right\}\mathrm{d}x-\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}\zeta\left\{\left(\gamma+\alpha\right)\psi\right\}\mathrm{d}x\\&=-\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}\psi\frac{1}{\mathcal{R}}\beta\hat{S}\zeta\,\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{11}$$

$$\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}\zeta\left\{\nabla\cdot\left(d_I\nabla\psi-q_I\psi\nabla m\right)+\left(\beta\hat{S}-\gamma-\alpha\right)\psi\right\}\mathrm{d}x=-\lambda\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}\zeta\psi\,\mathrm{d}x,$$

即

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}\left\{d_I\nabla\zeta\cdot\nabla\psi-\frac{q_I^2\left|\nabla m\right|^2}{d_I}\zeta\psi\right\}\mathrm{d}x+\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}\zeta\left\{\left(\beta\hat{S}-\gamma-\alpha\right)\psi\right\}\mathrm{d}x\\&=-\lambda\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{q_I m}{d_I}}\zeta\psi\,\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{12}$$

由(12)式减去(11)式，整理可得

$$\left(\frac{1}{\mathcal{R}}-1\right)\int_0^L\beta\left(x\right)\bar{S}\zeta\psi\mathrm{e}^{-\frac{q_I\cdot x}{d_I}}\mathrm{d}x=\lambda\int_0^L\zeta\psi\mathrm{e}^{-\frac{q_I\cdot x}{d_I}}\mathrm{d}x.\tag{13}$$

所以 $1-\mathcal{R}$ 与 λ 同号。

引理证毕。

引理 2 (Young’s 不等式)对任意的 $a,b>0$ 以及 $\varepsilon>0$，对于 $1<p,q<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，有

$$ab\le\varepsilon a^p+C\left(\varepsilon\right)b^q\tag{14}$$

其中 $C\left(\varepsilon\right)=\frac{1}{q}\left(\varepsilon\right)^{-\frac{q}{p}}$。

定理 1 (全局有界性)对于方程(4)的解 $\left(S,I\right)$，对于任意的 $t\ge0$，存在正常数 C_1，使得

$$\left\|S\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\left\|I\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_1.$$

其中 C_1 依赖于初值 S_0,I_0。

取充分大的 $T>0$，当 $t\ge T$ 时，存在正常数 C_2 使得

$$\left\|S\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\left\|I\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_2.$$

其中 C_2 依赖于初值 S_0,I_0。

证明： 对于方程(4)中的第一个式子我们利用 Young’s 不等式，则有

$$
\begin{aligned}
& S_t-\nabla\cdot\left(d_S\nabla S-q_S S\nabla m\right) \\
& =aS-bS^2-\beta SI+\gamma I \\
& \le\left(\frac{b}{4}S^2+\frac{a^2}{b}\right)-bS^2-\beta SI+\gamma I \\
& \le\frac{3b}{4}\left(\frac{c^2}{4}-cS\right)+\frac{a^2}{b}-\beta SI+\gamma I \\
& =\frac{a^2}{b}+\frac{3bc^2}{16}+\gamma I-\left(\frac{3bc}{4}+\beta I\right)S \\
& =\left[\beta I+\frac{3bc}{4}\right]\left[\frac{\frac{a^2}{b}+\frac{3bc^2}{16}+\gamma I}{\frac{3bc}{4}+\beta I}-S\right] \\
& \le\left[\beta I+\frac{3bc}{4}\right]\left[\frac{\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{3bc^2}{16}\right)+\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\gamma\cdot I}{\frac{3c}{4}\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}b+\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}\beta\cdot I}-S\right] \\
& \le\left[\beta I+\frac{3bc}{4}\right]\left[\max\left\{\frac{\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{3bc^2}{16}\right)}{\frac{3c}{4}\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}b},\frac{\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\gamma}{\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}\beta}\right\}-S\right],
\end{aligned}
$$

令

$$
\frac{C_1}{2}=\max\left\{\frac{\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{3bc^2}{16}\right)}{\frac{3c}{4}\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}b},\frac{\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\gamma}{\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}\beta}\right\}.
$$

考虑下面的方程

$$
\begin{cases}
u_t-\nabla\cdot\left(d_S\nabla u-q_S u\nabla m\right)=\left[\beta I+\frac{3bc}{4}\right]\left(\frac{C_1}{2}-u\right), & x\in\Omega,t>0, \\
d_S\frac{\partial u}{\partial n}-q_S u\frac{\partial m}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,t>0, \\
u(x,0)=\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}S_0(x)\ge 0, & x\in\Omega,
\end{cases}
\tag{15}
$$

其中 u 是方程(15)的唯一解，并且 S 是方程(15)的一个下解，$\max\left\{\frac{C_1}{2},\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}S_0(x)\right\}$ 是方程(15)的一个上解，进一步有抛物方程的比较原理可得

$$
S(x,t)\le u(x,t)\le\max\left\{\frac{C_1}{2},\max_{x\in\bar{\Omega}}S_0(x)\right\},\quad x\in\bar{\Omega},t\ge 0,
$$

显然

$$
\omega(t)=\frac{C_1}{2}+\max_{x\in\bar{\Omega}}S_0(x)\mathrm{e}^{-t},t\ge 0,
$$

也是方程(15)的一个上解，因此

$$S(x,t)\le u(x,t)\le \omega(t),\quad x\in\bar{\Omega}, t\ge 0.$$

故对任意的 $x\in\bar{\Omega}$ 有

$$\limsup_{t\to\infty} S(x,t)\le \omega(t)=\frac{C_1}{2},$$

由上可知存在一个充分大的时间 $T>0$，使得

$$S(x,t)\le C_1,\quad x\in\bar{\Omega}, t\ge T_0.$$

令 $k=\min\left\{\frac{3c}{4}\min_{x\in\bar{\Omega}} b, \min_{x\in\bar{\Omega}}\alpha\right\}$，并且令

$$U(t)=\int_\Omega \big(S(x,t)+I(x,t)\big)\mathrm{d}x,\quad t\ge 0.$$

由方程(4)及分部积分法可得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}&=\int_\Omega\left(aS-bS^2-\alpha\right)\mathrm{d}x\\
&\le\int_\Omega\left\{\frac{3b}{4}\left(\frac{c^2}{4}-cS\right)+\frac{a^2}{b}-\alpha I\right\}\mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega\left(\frac{a^2}{b}+\frac{3bc^2}{16}-\frac{3bc}{4}S-\alpha I\right)\mathrm{d}x\\
&\le\int_\Omega\left(\frac{a^2}{b}+\frac{3bc^2}{16}\right)\mathrm{d}x-\frac{3c}{4}\min_{x\in\bar{\Omega}} b\int_\Omega S\mathrm{d}x-\min_{x\in\bar{\Omega}}\alpha\int_\Omega I\mathrm{d}x\\
&\le\int_\Omega\left(\frac{a^2}{b}+\frac{3bc^2}{16}\right)\mathrm{d}x-kU(t)
\end{aligned}$$

根据上式的推导结果，我们有

$$\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}+kU(t)\le\int_\Omega\left(\frac{a^2}{b}+\frac{3bc^2}{16}\right)\mathrm{d}x\le\int_\Omega\frac{a^2}{b}\mathrm{d}x+\frac{3c^2}{16}|\Omega|\max_{x\in\bar{\Omega}} b.$$

因此

$$U(t)\le U(0)\mathrm{e}^{-kt}+\frac{\int_\Omega\frac{a^2}{b}\mathrm{d}x+\frac{3c^2}{16}|\Omega|\max_{x\in\bar{\Omega}} b}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-kt}\right),\quad t\ge 0.$$

故对所有的 $t\ge 0$，有

$$\int_\Omega\big(S(x,t)+I(x,t)\big)\mathrm{d}x\le \mathrm{e}^{-kt}\int_\Omega\big(S_0(x)+I_0(x)\big)\mathrm{d}x+\frac{\int_\Omega\frac{a^2}{b}\mathrm{d}x+\frac{3c^2}{16}|\Omega|\max_{x\in\bar{\Omega}} b}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-kt}\right).$$

并且

$$\limsup_{t\to\infty}\int_\Omega I(x,t)\mathrm{d}x\le\limsup_{t\to\infty}\int_\Omega\big(S(x,t)+I(x,t)\big)\mathrm{d}x\le\frac{\int_\Omega\frac{a^2}{b}\mathrm{d}x+\frac{3c^2}{16}|\Omega|\max_{x\in\bar{\Omega}} b}{k}.$$

令 $H=\left(C_1\beta-\gamma-\alpha\right)$，则

$$
\begin{aligned}
I_t-\nabla\cdot\left(d_I\nabla I-q_I I\nabla m\right)&=\beta SI-\gamma I-\alpha I\\
&\le\left(C_1\beta-\gamma-\alpha\right)I\\
&\le HI.
\end{aligned}
$$

我们利用文献([9]，引理2.1)，可知当T足够大时，存在一个正常数C_1，使得

$$I\left(x,t\right)\le C_1,\quad x\in\Omega,t>0.$$

由此我们完成了有界性的证明。

对于足够大的$\bar{b}>0$，则有

$$\bar{b}S^2-\beta SI+\gamma I\ge 0,$$

故$\bar{b}\ge\dfrac{\beta^2}{4\gamma}I$，进一步可知$\bar{b}\ge\dfrac{\beta^2}{4\gamma}C_1$。对于下面的问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial S}{\partial t}-\nabla\cdot\left(d_S\nabla S-q_S S\nabla m\right)\ge aS-\left(b+\bar{b}\right)S^2, & x\in\Omega,t>0,\\
d_S\dfrac{\partial S}{\partial n}-q_S S\dfrac{\partial m}{\partial n}=0 & x\in\partial\Omega,t>0,\\
S\left(x,0\right)=\min\limits_{x\in\Omega}S_0\left(x\right), & x\in\Omega.
\end{cases}
$$

由极值原理可知，存在$t_0>0$，使得$S\left(x,t_0\right)>0$，考虑以下方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\psi}{\partial t}-\nabla\cdot\left(d_S\nabla\psi-q_S\psi\nabla m\right)=a\psi-\left(b+\bar{b}\right)\psi^2, & x\in\Omega,t>0,\\
d_S\dfrac{\partial\psi}{\partial n}-q_S\psi\dfrac{\partial m}{\partial n}=0 & x\in\partial\Omega,t>0,\\
\psi\left(t_0\right)=S\left(t_0\right), & x\in\Omega.
\end{cases}
$$

则$S\ge\dfrac{a}{b+b}$，对于椭圆问题

$$
\begin{cases}
-\nabla\cdot\left(d_S\nabla S-q_S S\nabla m\right)=aS-bS^2, & x\in\Omega,\\
d_S\dfrac{\partial S}{\partial n}-q_S S\dfrac{\partial m}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega.
\end{cases}
$$

有唯一一个正解$\hat{S}$，并且$\left(\hat{S},0\right)$是方程(4)的一个平衡解，且是唯一的无病平衡点(DFE)。

定理证毕。

定理2：当$\mathcal{R}<1$时，$DFE\left(\hat{S},0\right)$是线性稳定的；当$\mathcal{R}>1$时，$DFE\left(\hat{S},0\right)$是线性不稳定的。

证明：对方程(4)在$\left(\hat{S},0\right)$附近进行线性化，令$\eta\left(x,t\right)=S\left(x,t\right)-\hat{S}\left(x,t\right),\xi\left(x,t\right)=I\left(x,t\right)$。则有

$$
\begin{cases}
\eta_t-\nabla\cdot\left(d_S\nabla\eta-q_S\eta\nabla m\right)=\left(a-2b\hat{S}\right)\eta+\left(\gamma-\beta\hat{S}\right)\xi, & x\in\Omega,t>0,\\
\xi_t-\nabla\cdot\left(d_I\nabla\xi-q_I\xi\nabla m\right)=\left(\beta\hat{S}-\gamma-\alpha\right)\xi, & x\in\Omega,t>0,\\
d_S\dfrac{\partial\eta}{\partial n}-q_S\eta\dfrac{\partial m}{\partial n}=d_I\dfrac{\partial\xi}{\partial n}-q_I\xi\dfrac{\partial m}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,t>0.
\end{cases}
$$

进一步假设$\eta\left(x,t\right)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\phi\left(x\right),\xi\left(x,t\right)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\psi\left(x\right)$，其中$\lambda$为复数线性系统的解。我们可以得到

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\left(d_S\nabla\phi-q_S\phi\nabla m\right)+\left(a-2b\hat{S}\right)\phi+\left(\gamma-\beta\hat{S}\right)\psi+\lambda\phi=0, & x\in\Omega,t>0,\\
\nabla\cdot\left(d_I\nabla\psi-q_I\psi\nabla m\right)+\left(\beta\hat{S}-\gamma-\alpha\right)\psi+\lambda\psi=0, & x\in\Omega,t>0,\\
d_S\dfrac{\partial\phi}{\partial n}-q_S\phi\dfrac{\partial m}{\partial n}=d_I\dfrac{\partial\psi}{\partial n}-q_I\psi\dfrac{\partial m}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,t>0.
\end{cases}
\tag{16}
$$

当$\mathcal{R}<1$，若(λ,ϕ,ψ)是方程(16)的任意一解，并且ϕ或ψ不恒为零，则$Re(\lambda)>0$。我们假设$\psi\neq 0$，则 1) $\phi=0$或 2) $\phi\neq 0,\psi\neq 0$。对于(1)，则(λ,ϕ)是下面问题的一特征对：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\left(d_I\nabla u-q_I u\nabla m\right)+\left(\beta\hat{S}-\gamma-\alpha\right)u+\lambda u=0, & x\in\Omega,\\ d_I\dfrac{\partial u}{\partial n}-q_I u\dfrac{\partial m}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{17}$$

因此(λ,ψ)是特征值问题(17)的一个特征对，所以λ是实数并且$\lambda\geq\lambda^*>0$。由上可知当$\mathcal{R}<1$时，$DFE(\hat{S},0)$是线性稳定的。

对于$\mathcal{R}>1$时，对于下面问题

$$\begin{cases}\nabla\cdot\left(d_S\nabla\phi-q_S\phi\nabla m\right)+\left(a-2b\hat{S}\right)\phi+\lambda^*\phi=\left(\beta\overline{S}-\gamma\right)\psi^*, & x\in\Omega,t>0,\\ d_S\dfrac{\partial\phi}{\partial n}-q_S\phi\dfrac{\partial m}{\partial n}=0 & x\in\partial\Omega,t>0.\end{cases}$$

有一个解ϕ^*，故$(\lambda^*,\phi^*,\psi^*)$是方程(16)的解，并且$\lambda^*<0,\psi^*>0$，所以当$\mathcal{R}>1$时，$DFE(\hat{S},0)$不是线性稳定的。

定理证毕。

定理 3：当$\mathcal{R}>1$时，存在常数$\eta>0$，对于方程(4)任意的解$(S(x,t),I(x,t))$，且$I_0(x)\neq 0$，则对任意$x\in\Omega$一致地有

$$\liminf_{t\to\infty}\overline{S}(x,t)\geq\eta,\quad \liminf_{t\to\infty}\overline{I}(x,t)\geq\eta\text{。}$$

证明：$X=C(\overline{\Omega},R^2)$表示 Banach 空间，$\|\cdot\|$表示上确界范数。定义$X^+=C(\overline{\Omega},R_+^2)$，则$(X,X^+)$是一个强序空间，令

$$W_0:=\left\{\left(\overline{S}_0,\overline{I}_0\right)\in X^+:\overline{I}\neq 0\right\}$$

并且

$$\partial W_0:=X^+\setminus W_0=\left\{\left(\overline{S}_0,\overline{I}_0\right)\in X^+:\overline{I}=0\right\}$$

显然W_0和∂W_0是X^+的相对开集和相对闭集，并且W_0是凸集。根据抛物方程的正则性理论，对于任意的$(\overline{S}_0,\overline{I}_0)\in X^+$，系统(4)都产生一个半流，即$\Phi(t):X^+\mapsto X^+$

$$\Phi(t)\left(\overline{S}_0,\overline{I}_0\right)=\left(\overline{S}(x,t),\overline{I}(x,t)\right),\ \left(\overline{S}_0,\overline{I}_0\right)\in X^+,\quad t\geq 0,$$

其中$(\overline{S}(x,t),\overline{I}(x,t))\in X^+$是与初值有关的方程(4)的唯一解。并且$W_0$是关于$\Phi(t)$正的不变集，即对任意的$t\geq 0$，有$\Phi(t)W_0\subset W_0$。根据定理 1，可知$\Phi(t)$在$W_0$中是点耗散的。由标准的抛物理论和嵌入定理可知对任意的$t>0$，$\Phi(t):W_0\mapsto W_0$是紧的。令$\omega(\overline{S},\overline{I})$表示轨道$\gamma^+(\overline{S}_0,\overline{I}_0)=\{\Phi(t)(\overline{S}_0,\overline{I}_0):t\geq 0\}$的$\omega$极限集，定义$E_0=(\hat{S},0)$。由于$(\overline{S}_0,\overline{I}_0)\in\partial W_0$故对任意的$t\geq 0$有$\omega(\overline{S}_0,\overline{I}_0)=\{E_0\}$。当$I(x,t)=0$时，由抛物的极值原理可知，对任意的$t\geq 0,x\in\Omega$，则有$S(x,t)>0$。并且对于下面方程的解

$$\begin{cases}S_t-\nabla\cdot\left(d_S\nabla S-q_S S\nabla m\right)=aS-bS^2 & x\in\Omega,t>0,\\ d_S\dfrac{\partial S}{\partial n}-q_S S\dfrac{\partial m}{\partial n}=0 & x\in\partial\Omega,t>0\end{cases}$$

对任意的$x\in\Omega$，当$t\to\infty$，我们有$S(x,t)\to\hat{S}(x)$。因此∂W_0是关于$\Phi(t)$正的不变集。

下面我们证明，存在$\delta>0$使得

$$\limsup_{t\to\infty}\left\|\Phi\left(\bar{S}_0,\bar{I}_0\right)-E_0\right\|\geq\delta,\quad\forall\left(\bar{S}_0,\bar{I}_0\right)\in W_0.$$

根据定理 1 和 $\mathcal{R}>1$ 即 $\lambda<0$。由主特征值 λ 的连续性，存在一个足够小的常数 ϵ_0 使得 $\lambda(\epsilon_0)+\epsilon_0<0$，其中 $\lambda(\epsilon_0)$ 是下面特征值问题的主特征值：

$$\begin{cases}-\nabla\cdot\left(d_I\nabla\psi-q_I\psi\nabla m\right)-\left(\beta\hat{S}-\gamma-\alpha\right)\psi=\lambda\psi, & x\in\Omega,t>0,\\ d_I\dfrac{\partial\psi}{\partial n}-q_I\psi\dfrac{\partial m}{\partial n}=0 & x\in\partial\Omega,t>0,\end{cases}\tag{18}$$

ψ_{ϵ_0} 表示 $\lambda(\epsilon_0)$ 所对应的正的特征函数。我们利用反证法进行证明，假设存在 $\left(\bar{S}_0^*,\bar{I}_0^*\right)\in W_0$ 使得 $\limsup\limits_{t\to\infty}\left\|\Phi\left(\bar{S}_0^*,\bar{I}_0^*\right)-E_0\right\|\geq\epsilon_1$。其中 $\left(\bar{S}_0^*,\bar{I}_0^*\right)$ 是满足 $\Phi\left(\bar{S}_0^*,\bar{I}_0^*\right)=\bar{S}^*(x,t),\bar{I}^*(x,t)$ 的唯一解。因此对于 $\epsilon_1<\epsilon_0$，存在 $T_0>0$ 使得对所有的 $x\in\bar{\Omega},t\geq T_0$， 都有

$$\hat{S}(x)-\epsilon_1\leq\bar{S}^*(x,t)\leq\hat{S}(x)+\epsilon_1.\tag{19}$$

根据抛物方程的强极值原理，存在正常数 c^* 使得当 $x\in\bar{\Omega}$ 时有 $\bar{I}_0^*\geq c^*\psi_{\epsilon_0}$ 。根据(19)式，以及 ϵ_1 的选择。我们可以计算出 $\bar{I}^*(x,t)$ 是下面方程的一个上解：

$$\begin{cases}w_t=\nabla\cdot\left(d_I\nabla w-q_I w\nabla m\right)+\beta\left(\hat{S}-\epsilon_0\right)w+(\gamma+\alpha)w=0, & x\in\Omega,t>0,\\ d_I\dfrac{\partial w}{\partial n}-q_I w\dfrac{\partial m}{\partial n}=0 & x\in\partial\Omega,t>0,\\ w(x,T_0)=c^*\psi_{\epsilon_0}, & x\in\Omega.\end{cases}\tag{20}$$

易知 $c^*\mathrm{e}^{-\lambda(\epsilon_0)t}\psi_{\epsilon_0}(x)$ 是方程(20)。根据抛物方程的比较原理，在 $x\in\bar{\Omega}$ 上，当 $t\to\infty$ 时，一致地有

$$\bar{I}^*(x,t)\geq c^*\mathrm{e}^{-\lambda(\epsilon_0)t}\psi_{\epsilon_0}(x)\to\infty,$$

这与定理 1 矛盾，因此，存在 $\delta>0$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\left\|\Phi\left(\bar{S}_0,\bar{I}_0\right)-E_0\right\|\geq\delta,\quad\forall\left(\bar{S}_0,\bar{I}_0\right)\in W_0.$$

由上面的结论，可知 E_0 在 X 中是孤立集，并且 $W^s(E_0)\cap W_0=\varnothing$，其中 $W^s(E_0)$ 是集合 E_0 关于 Φ 的稳定集。根据([10]，定理 3)，存在 $\delta_1>0$ 使得任意的 $\left(\bar{S}_0,\bar{I}_0\right)\in W_0$ 有

$$\liminf_{t\to\infty}\bar{I}(\cdot,t)\geq\delta_1.$$

由抛物方程的比较原理可知，

存在 $\delta_2>0$ 和 $T_1>0$ 使得任意的 $\left(\bar{S}_0,\bar{I}_0\right)\in W_0$，及任意的 $x\in\bar{\Omega}$，有

$$\liminf_{t\to\infty}\bar{S}(\cdot,t)\geq\delta_2.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则一致存在性成立。并且由文献([11]，定理 3.7，注记 3.10)可知 $\Phi(t):W_0\mapsto W_0$ 在 W_0 中有一个全局紧的吸引子。因此根据文献([12]，定理 1.3.11)知 $\Phi(t)$ 有一个平衡点 $\left(S^*,I^*\right)\in W_0$，由抛物方程的极值原理可知 $\left(S^*,I^*\right)$ 是方程(4)的一个正的稳态解。

定理证毕。

由前面的定理，我们可以得到下面的结论

定理 4： 当 $\mathcal{R}>1$ 时，方程(4)存在一个全局正吸引子。

推论 1： 当 $\mathcal{R}>1$ 时，方程(4)至少存在一个正的平衡解。

3. 结论

本文主要研究扩散及对流情况下系统正平衡解的存在性和全局渐进稳定性的情况，其中为模拟生物种群受到的被动影响加入的对流项是文章重要创新点。就此模型我们还可以对基本再生数 $\mathcal{R}$ 以及系统正平衡解 EE 随着相应扩散及对流系数的变化所反映出的动力学行为进行深入探讨、研究。

基金项目

浙江师范大学 2021 年校自主设计科研课题(第一期) (ZZ323205020521005075)。

参考文献

[1] Allen, L.J.S., Bolker, B.M., Lou, Y. and Nevai, A.L. (2008) Asymptotic Profiles of the Steady States for an SIS Epidemic Reaction-Diffusion Model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **21**, 1-20. https://doi.org/10.3934/dcds.2008.21.1

[2] Deng, K. and Wu, Y. (2016) Dynamics of a Susceptible-Infected-Susceptible Epidemic Reaction-Riffusion Model. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, **146**, 929-946. https://doi.org/10.1017/S0308210515000864

[3] Wu, Y. and Zou, Z. (2016) Asymptotic Profiles of Steady States for a Diffusive SIS Epidemic Model with Mass Action Infection Mechanism. *Journal of Differential Equations*, **261**, 4424-4447. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.06.028

[4] Cui, R. and Lou, Y. (2016) A Spatial SIS Model in Advective Heterogeneous Environments. *Journal of Differential Equations*, **261**, 3305-3343. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.05.025

[5] Cui, R., Li, H., Peng, R. and Zhou, M. (2021) Concentration Behavior of Endemic Equilibrium for a Reaction-Diffusion-Advection SIS Epidemic Model with Mass Action Infection Mechanism. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **60**, Article No. 184. https://doi.org/10.1007/s00526-021-01992-w

[6] Zhang, J. and Cui, R. (2020) Qualitative Analysis on a Diffusive SIS Epidemic System with Logistic Source and Spontaneous Infection in a Heterogeneous Environment. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **55**, 103115. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2020.103115

[7] Cui, R., Lam, K.-Y., *et al*. (2017) Dynamics and Asymptotic Profiles of Steady States of an Epidemic Model in Advective Environments. *Journal of Differential Equations*, **263**, 2343-2373. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.03.045

[8] Wang, W. and Zhao, X.Q. (2012) Basic Reproduction Numbers for Reaction-Diffusion Epidemic Models. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **11**, 1652-1673. https://doi.org/10.1137/120872942

[9] Du, Z. and Peng, R. (2016) A Priori L^∞ Estimates for Solutions of a Class of Reaction-Diffusion Systems. *Journal of Mathematical Biology*, **72**, 1429-1439. https://doi.org/10.1007/s00285-015-0914-z

[10] Smith, H.L. and Zhao, X.-Q. (2001) Robust Persistence for Semidynamical Systems. *Nonlinear Analysis*, **47**, 6169-6179. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(01)00678-2

[11] Magal, P. and Zhao, X.-Q. (2005) Global Attractors and Steady States for Uniformly Persistent Dynamical Systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **37**, 251-275. https://doi.org/10.1137/S0036141003439173

[12] Zhao, X.-Q. (2003) Dynamical Systems in Population Biology. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York.