Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(4), 1620-1633**
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124167

Hans汉斯

加权Bergman空间上具有调和符号的斜Toeplitz算子的正规性及亚正规性

刘朝美，蒋志娟

大连交通大学理学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年3月24日；录用日期：2023年4月18日；发布日期：2023年4月26日

摘 要

本文对单位圆盘的加权Bergman空间上斜Toeplitz算子的正规性及亚正规性展开研究，得到了以有界解析函数、共轭解析函数及调和多项式函数为符号的斜Toeplitz算子是正规算子或亚正规算子的充要条件是其符号函数是零函数，当且仅当该类算子是零算子，也得到了该类算子的正规性和亚正规性是等价的。

关键词

加权Bergman空间，斜Toeplitz算子，正规性，亚正规性

The Normality and Hyponormality of Slant Toeplitz Operators with Harmonic Symbols on the Weighted Bergman Spaces

Chaomei Liu, Zhijuan Jiang

School of Science, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: Mar. 24th, 2023; accepted: Apr. 18th, 2023; published: Apr. 26th, 2023

Abstract

The normality and hyponormality of slant Toeplitz operators on the weighted Bergman space of the unit disk are studied, and obtain the sufficient and necessary conditions for slant Toeplitz operators with bounded analytic function, conjugate analytic function and harmonic polynomial function to be normal or hyponormal are that their symbol functions are zero function, if and only if such operators are zero operator, and also get the normality and the hyponormality of such operators are equivalent.

文章引用: 刘朝美, 蒋志娟. 加权 Bergman 空间上具有调和符号的斜 Toeplitz 算子的正规性及亚正规性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1620-1633. DOI: 10.12677/aam.2023.124167

Keywords

Weighted Bergman Space, Slant Toeplitz Operator, Normality, Hyponormality

1. 引言

斜 Toeplitz 算子是 Toeplitz 算子的一类推广，由于它在小波分析、方程求解等方面的关联以及与 Toeplitz 算子的联系，人们对该类算子及其推广进行深入探讨，得到众多结论。本文主要对加权 Bergman 空间上斜 Toeplitz 算子的正规性和亚正规性展开研究。

关于斜 Toeplitz 算子性质的研究最早是由 Mark 给出的[1] [2] [3] [4]，主要是单位圆周的 $L^2(T)$ 空间和 Hardy 空间 $H^2(T)$ 上斜 Toeplitz 算子及其共轭算子的表达式、判别标准、谱和谱半径等性质。之后 Arora 与 Batra 将 $L^2(T)$ 和 Hardy 空间 $H^2(T)$ 上斜 Toeplitz 算子的概念推广为广义斜 Toeplitz 算子，并探讨了广义斜 Toeplitz 算子的若干性质[5] [6] [7]。此后人们又对该类算子的性质展开研究，并推广到各类空间上，如：Bergman 空间、Dirichlet 空间、Fock 空间以及环面的 Hardy 空间和 Lebesgue 空间等[8]-[25]。

设 H 是 Hilbert 空间，$B(H)$ 是 H 上的所有有界线性算子构成的空间。对于 $T\in B(H)$，如果 $T^*T=TT^*$，则称算子 T 是正规的；如果 $T^*T\ge TT^*$，则称算子 T 是亚正规的。

在本文中设实数 $\alpha>-1$，D 是复平面内的单位开圆盘，dA 表示单位圆盘 D 上的正规化面积测度，

$$dA_\alpha(z)=(1+\alpha)\left(1-|z|^2\right)^\alpha dA(z)，\quad z\in D。$$

$L^2(D,dA_\alpha)$ 是 D 上关于测度 dA_α 平方可积的可测函数全体组成的希尔伯特空间，其中内积和范数分别是

$$\langle f,g\rangle=\int_D f(z)\overline{g(z)}dA_\alpha(z)，\quad \|f\|=\left(\int_D|f(z)|^2dA_\alpha(z)\right)^{1/2}。$$

加权 Bergman 空间 $A_\alpha^2(D)$ 是 $L^2(D,dA_\alpha)$ 中所有解析函数构成的闭线性空间，且其正交基为 $\{z^n\}_{n\in N}$，其中 N 和 N_+ 分别表示非负整数集和正整数集。设 $L^\infty(D)$ 表示 D 上关于测度 dA_α 本性有界的复值可测函数全体构成的巴拿赫空间，$H^\infty(D)$ 表示 D 上有界解析函数构成的代数。

对任意的 $\varphi\in L^\infty(D)$，定义在空间 $A_\alpha^2(D)$ 上的斜 Toeplitz 算子定义为 $B_\varphi=WT_\varphi$，其中 T_φ 是空间 $A_\alpha^2(D)$ 上以函数 φ 为符号的 Toeplitz 算子，算子 W 定义为 $Wz^{2n}=z^n$，$Wz^{2n+1}=0$，$n\in N$，其共轭算子是 $W^*(z^n)=\dfrac{n!\Gamma(2n+2+\alpha)}{(2n)!\Gamma(n+2+\alpha)}z^{2n}$，$n\in N$。而且算子 W 及其共轭算子都是有界线性算子。

设 $\Gamma(x)$ 是实数域 R 上的伽玛函数，该函数具有以下性质：$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，$x>0$；$\Gamma(n)=(n-1)!$，$n\in N_+$。

2. 斜 Toeplitz 算子的正规性

算子正规性问题是一个较为久远且结论较为丰富的问题。而对于斜 Toeplitz 算子正规性的探讨最早是由 Arora 和 Batra 得到的，结论是单位圆周的 $L^2(T)$ 空间和 Hardy 空间 $H^2(T)$ 上广义斜 Toeplitz 算子是

正规的当且仅当该算子的符号函数是零函数，即该算子是零算子[5]。由于单位圆盘上的可测函数比单位圆周上的可测函数结构更为复杂，文献[6]仅给出了单位圆盘的 Bergman 空间上带有特殊调和符号的广义斜 Toeplitz 算子是正规的当且仅当其符号是零函数，该结论与 $L^2(T)$ 空间和 Hardy 空间 $H^2(T)$ 上的结论类似。本节将对加权 Bergman 空间上带有调和符号的斜 Toeplitz 算子的正规性进行探讨，首先考虑正规斜 Toeplitz 算子的符号函数具有什么性质。

对任意的 $\varphi\in L^\infty(D)$，如果斜 Toeplitz 算子 B_φ 是正规算子，那么由正规算子的定义可得算子 B_φ 应满足 $B_\varphi^*B_\varphi=B_\varphi B_\varphi^*$，且空间 $A_\alpha^2(D)$ 的正交基是 $\{z^n\}_{n\in N}$，所以可得对任意的 $\beta\in N$，有

$$B_\varphi^*B_\varphi z^\beta=B_\varphi B_\varphi^* z^\beta。\tag{1}$$

而随着函数 φ 的不同，(1)式两端计算得到的函数也随之变化，所以这里将函数 φ 分为三类情况逐步展开，即解析情况、共轭解析情况和调和多项式情况。

定理 2.1 如果函数 $\varphi\in H^\infty(D)$，那么 B_φ 是正规算子的充分必要条件是函数 φ 恒等于零。

证明既然函数 $\varphi\in H^\infty(D)$，所以函数 φ 可表示为 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$， $z\in D$。如果函数 φ 恒等于零，那么显然可以得到 B_φ 是正规的。

如果 B_φ 是正规的，那么由(1)可得对任意的 $\beta\in N$， $B_\varphi^*B_\varphi z^\beta=B_\varphi B_\varphi^* z^\beta$，下面将按照 β 的不同取值展开讨论。

当 $\beta=0$ 时，那么由 B_φ 及其共轭算子的定义可得

$$B_\varphi z^0=WT_\varphi\left(z^0\right)=W\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}z^n，$$

$$B_\varphi^* z^0=T_{\overline{\varphi}}W^*\left(z^0\right)=\overline{a_0}z^0，$$

从而可得

$$\begin{aligned}B_\varphi^*B_\varphi z^0&=B_\varphi^*\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}z^n\right)=T_{\overline{\varphi}}W^*\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}z^n\right)=T_{\overline{\varphi}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\frac{n!\Gamma(2n+2+\alpha)}{(2n)!\Gamma(n+2+\alpha)}z^{2n}\right],\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n}\overline{a_m}a_{2n}\frac{n!\Gamma(2n-m+2+\alpha)}{(2n-m)!\Gamma(n+2+\alpha)}z^{2n-m}\end{aligned}$$

$$B_\varphi B_\varphi^* z^0=B_\varphi\left(\overline{a_0}z^0\right)=WT_\varphi\left(\overline{a_0}z^0\right)=W\left(\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_0}a_nz^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_0}a_{2n}z^n。$$

于是由算子 B_φ 的正规性及(1)式可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n}\overline{a_m}a_{2n}\frac{n!\Gamma(2n-m+2+\alpha)}{(2n-m)!\Gamma(n+2+\alpha)}z^{2n-m}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_0}a_{2n}z^n，$$

从而由上述等式两端 z^0 项的系数相等可得 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_{2n}|^2\frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)}=|a_0|^2$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|^2\frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)}=0$，

所以可得 $a_{2n}=0$， $n\in N_+$。

当 $\beta=1$ 时，那么由算子 B_φ 及其共轭算子的定义可得

$$B_\varphi z=WT_\varphi(z)=W\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}z^{n+1}，$$

$$B_\varphi^* z=T_{\overline{\varphi}}W^*(z)=T_{\overline{\varphi}}\left[\frac{\Gamma(4+\alpha)}{2\Gamma(3+\alpha)}z^2\right]=\sum_{n=0}^{2}\overline{a_n}\frac{\Gamma(4-n+\alpha)}{(2-n)!\Gamma(3+\alpha)}z^{2-n}=\overline{a_0}\frac{\Gamma(4+\alpha)}{2\Gamma(3+\alpha)}z^2+\overline{a_1}z，$$

从而有

$$B_\varphi^* B_\varphi z = T_{\bar{\varphi}} W^* \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{n+1} \right) = T_{\bar{\varphi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \frac{(n+1)!\Gamma(2n+4+\alpha)}{(2n+2)!\Gamma(n+3+\alpha)} z^{2n+2} \right],$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2n+2} a_{2n+1} \overline{a_s} \frac{(n+1)!\Gamma(2n+4-s+\alpha)}{(2n+2-s)!\Gamma(n+3+\alpha)} z^{2n+2-s}$$

$$B_\varphi B_\varphi^* z = WT_\varphi \left[\overline{a_0} \frac{\Gamma(4+\alpha)}{2\Gamma(3+\alpha)} z^2 + \overline{a_1} z \right] = W \left[\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_0} a_n \frac{\Gamma(4+\alpha)}{2\Gamma(3+\alpha)} z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_1} a_n z^{n+1} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_1} a_{2n+1} z^{n+1},$$

所以由算子 B_φ 的正规性及(1)式可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2n+2} a_{2n+1} \overline{a_s} \frac{(n+1)!\Gamma(2n+4-s+\alpha)}{(2n+2-s)!\Gamma(n+3+\alpha)} z^{2n+2-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_1} a_{2n+1} z^{n+1},$$

从而由等式两端 z 项系数相等可得 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{2n+1}|^2 \frac{(n+1)!\Gamma(3+\alpha)}{\Gamma(n+3+\alpha)} = |a_1|^2$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n+1}|^2 \frac{(n+1)!\Gamma(3+\alpha)}{\Gamma(n+3+\alpha)} = 0$，所以可得 $a_{2n+1} = 0$， $n \in N_+$，即可得 $\varphi(z) = a_0 + a_1 z$。

当 $\beta = 3$ 时，那么由算子 B_φ 及其共轭算子的定义可得

$$B_\varphi z^3 = WT_\varphi (z^3) = a_1 z^2,$$

$$B_\varphi^* z^3 = T_{\bar{\varphi}} W^* (z^3) = T_{\bar{\varphi}} \left[\frac{3!\Gamma(8+\alpha)}{6!\Gamma(5+\alpha)} z^6 \right] = \frac{\Gamma(8+\alpha)}{120\Gamma(5+\alpha)} \overline{a_0} z^6 + \frac{\Gamma(7+\alpha)}{20\Gamma(5+\alpha)} \overline{a_1} z^5,$$

从而有

$$B_\varphi^* B_\varphi z^3 = T_{\bar{\varphi}} W^* (a_1 z^2) = T_{\bar{\varphi}} \left[a_1 \frac{2!\Gamma(6+\alpha)}{4!\Gamma(4+\alpha)} z^4 \right] = \overline{a_0} a_1 \frac{\Gamma(6+\alpha)}{12\Gamma(4+\alpha)} z^4 + \frac{\Gamma(5+\alpha)}{3\Gamma(4+\alpha)} |a_1|^2 z^3,$$

$$B_\varphi B_\varphi^* z^3 = WT_\varphi \left[\frac{\Gamma(8+\alpha)}{120\Gamma(5+\alpha)} \overline{a_0} z^6 + \frac{\Gamma(7+\alpha)}{20\Gamma(5+\alpha)} \overline{a_1} z^5 \right] = \frac{\Gamma(8+\alpha)}{120\Gamma(5+\alpha)} |a_0|^2 z^3 + \frac{\Gamma(7+\alpha)}{20\Gamma(5+\alpha)} |a_1|^2 z^3,$$

所以由算子 B_φ 的正规性及(1)式可得

$$\overline{a_0} a_1 \frac{\Gamma(6+\alpha)}{12\Gamma(4+\alpha)} z^4 + \frac{\Gamma(5+\alpha)}{3\Gamma(4+\alpha)} |a_1|^2 z^3 = \frac{\Gamma(8+\alpha)}{120\Gamma(5+\alpha)} |a_0|^2 z^3 + \frac{\Gamma(7+\alpha)}{20\Gamma(5+\alpha)} |a_1|^2 z^3,$$

从而由等式两端 z^3 项和 z^4 项的系数分别相等可得

$$\overline{a_0} a_1 \frac{\Gamma(6+\alpha)}{12\Gamma(4+\alpha)} = 0,$$

$$\frac{\Gamma(5+\alpha)}{3\Gamma(4+\alpha)} |a_1|^2 = \frac{\Gamma(8+\alpha)}{120\Gamma(5+\alpha)} |a_0|^2 + \frac{\Gamma(7+\alpha)}{20\Gamma(5+\alpha)} |a_1|^2 。$$

由于 $\alpha > -1$，所以由 Gamma 函数的性质上式可得

$$\overline{a_0} a_1 \frac{(5+\alpha)(4+\alpha)}{12} = 0,$$

$$|a_1|^2 = \frac{(7+\alpha)(6+\alpha)(5+\alpha)}{2(3\alpha+5)(\alpha+2)} |a_0|^2,$$

从而可得 $a_0=0$， $a_1=0$，即可得函数 φ 恒等于零。

定理 2.2 如果函数 φ 的共轭函数 $\overline{\varphi}\in H^{\infty}(D)$，那么算子 B_φ 是正规算子当且仅当函数 φ 恒等于零。

证明既然函数 $\overline{\varphi}\in H^{\infty}(D)$，所以函数 $\overline{\varphi}$ 可表示为 $\overline{\varphi}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}z^n$， $z\in D$，从而可得函数 φ 可表示为 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{z}^n$， $z\in D$。如果函数 φ 恒等于零，那么显然可以得到算子 B_φ 是正规的。

如果算子 B_φ 是正规的，那么由(1)可见对任意的 $\beta\in N$， $B_\varphi^*B_\varphi z^\beta=B_\varphi B_\varphi^* z^\beta$，下面将按照 β 的不同取值展开讨论。

当 $\beta=0$ 时，那么由算子 B_φ 及其共轭算子的定义可得

$$B_\varphi z^0=WT_\varphi\left(z^0\right)=W\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nP\left(\overline{z}^nz^0\right)\right]=W\left(a_0z^0\right)=a_0z^0,$$

$$B_\varphi^*z^0=T_{\overline{\varphi}}W^*\left(z^0\right)=T_{\overline{\varphi}}\left(z^0\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}z^n,$$

从而有

$$B_\varphi^*B_\varphi z^0=B_\varphi^*\left(a_0z^0\right)=a_0B_\varphi^*\left(z^0\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_0\overline{a_n}z^n,$$

$$\begin{aligned}B_\varphi B_\varphi^*z^0&=B_\varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}z^n\right)=WT_\varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}z^n\right)=W\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}a_s\overline{a_n}\frac{n!\Gamma(n-s+2+\alpha)}{(n-s)!\Gamma(n+2+\alpha)}z^{n-s}\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\overline{a_n}a_{n-2m}\frac{n!\Gamma(2m+2+\alpha)}{(2m)!\Gamma(n+2+\alpha)}z^m\end{aligned},$$

这里 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分。于是由算子 B_φ 的正规性可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_0\overline{a_n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\overline{a_n}a_{n-2m}\frac{n!\Gamma(2m+2+\alpha)}{(2m)!\Gamma(n+2+\alpha)}z^m,$$

从而由等式两端 z^0 项的系数相等可得 $|a_0|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)}=0$，即得对所有的 $n\in N_+$， $a_n=0$。于是可得 $\varphi(z)=a_0$，又因为常值函数都是解析函数，所以由定理 2.1 可以得到函数 φ 恒等于零。

接着讨论的是带有调和多项式符号的斜 Toeplitz 算子的正规性，由于在分析论证的过程中需要用到关于 Gamma 函数的不等式，所以这里首先给出以下引理。

引理 2.3 已知非负整数 p,s 满足 $p>s$，那么对满足 $0\le l\le s$ 的任意整数 l，有

$$\frac{\left[(2p)!\right]^2\Gamma(4p-2l+2+\alpha)}{(4p-2l)!\left[\Gamma(2p+2+\alpha)\right]^2}-\frac{(l+p)!}{\Gamma(l+p+2+\alpha)}>0, \tag{2}$$

$$\frac{(4p+2l)!\left[\Gamma(4p+2+\alpha)\right]^2}{\left[(4p)!\right]^2\Gamma(4p+2l+2+\alpha)}-\frac{(p-l)!\left[\Gamma(2p-2l+2+\alpha)\right]^2}{\left[(2p-2l)!\right]^2\Gamma(p-l+2+\alpha)}>0, \tag{3}$$

$$\frac{\left[(2p+1)!\right]^2\Gamma\left[4p-2l+3+\alpha\right]}{(4p-2l+1)!\left[\Gamma(2p+3+\alpha)\right]^2}-\frac{(l+p+1)!}{\Gamma(l+p+3+\alpha)}>0。 \tag{4}$$

证明为了简化证明下面记$\gamma=1+\alpha$，因为$\alpha>-1$，所以$\gamma>0$。

令$f(x)=1+\frac{\gamma}{x}$，$x>0$，则显然$f'(x)=-\frac{\gamma}{x^2}<0$，所以可得$f(x)$在$(0,\infty)$上严格单调递减，即如果$x>y$，$f(x)<f(y)$。

为了证明(2)式，记$A=\frac{[(2p)!]^2\Gamma(4p-2l+2+\alpha)}{(4p-2l)![\Gamma(2p+2+\alpha)]^2}-\frac{(l+p)!}{\Gamma(l+p+2+\alpha)}$，那么通过简单计算可得

$$A=\frac{[(2p)!]^2(l+p)!(4p-2l)!}{(4p-2l)![\Gamma(2p+1+\gamma)]^2\Gamma(l+p+1+\gamma)}\left\{\frac{\Gamma(4p-2l+1+\gamma)\Gamma(l+p+1+\gamma)}{(l+p)!(4p-2l)!}-\frac{[\Gamma(2p+1+\gamma)]^2}{[(2p)!]^2}\right\},$$

所以由题意可得$A>0$等价于$\frac{\Gamma(4p-2l+1+\gamma)\Gamma(l+p+1+\gamma)}{(l+p)!(4p-2l)!}-\frac{[\Gamma(2p+1+\gamma)]^2}{[(2p)!]^2}>0$。而由 Gamma 函数的性质计算可得

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(4p-2l+1+\gamma)\Gamma(l+p+1+\gamma)}{(l+p)!(4p-2l)!}-\frac{[\Gamma(2p+1+\gamma)]^2}{[(2p)!]^2}\\&=\frac{\prod_{i=1}^{l+p}(i+\gamma)}{(l+p)!}\frac{\prod_{i=1}^{2p}(i+\gamma)}{(2p)!}[\Gamma(1+\gamma)]^2\left[\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{2p+2i-1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2p+2i}\right)-\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{l+p+i}\right)\right]\end{aligned},$$

所以可得$A>0$等价于$\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{2p+2i-1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2p+2i}\right)-\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{l+p+i}\right)>0$。

而对任意的$t=1,2,\cdots,p-l$，

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\gamma}{2p+2t-1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2p+2t}\right)&=1+\frac{\gamma}{2p+2t-1}+\frac{\gamma}{2p+2t}+\frac{\gamma^2}{(2p+2t-1)(2p+2t)}\\&>1+2\frac{\gamma}{2p+2t}=1+\frac{\gamma}{p+t}>1+\frac{\gamma}{p+l+t}\end{aligned},$$

所以显然可得$\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{2p+2i-1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2p+2i}\right)-\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{l+p+i}\right)>0$，即$A>0$。

为了证明(3)式，记$B=\frac{(4p+2l)![\Gamma(4p+2+\alpha)]^2}{[(4p)!]^2\Gamma(4p+2l+2+\alpha)}-\frac{(p-l)![\Gamma(2p-2l+2+\alpha)]^2}{[(2p-2l)!]^2\Gamma(p-l+2+\alpha)}$，那么经过简单计算可得

$$\begin{aligned}B=&\frac{(4p+2l)![(2p-2l)!]^2(p-l)![(4p)!]^2}{[(4p)!]^2[(2p-2l)!]^2\Gamma(4p+2l+1+\gamma)\Gamma(p-l+1+\gamma)}\\&\times\left\{\frac{[\Gamma(4p+1+\gamma)]^2\Gamma(p-l+1+\gamma)}{(p-l)![(4p)!]^2}-\frac{[\Gamma(2p-2l+1+\gamma)]^2\Gamma(4p+2l+1+\gamma)}{(4p+2l)![(2p-2l)!]^2}\right\}\end{aligned},$$

所以显然$B>0$等价于$\frac{[\Gamma(4p+1+\gamma)]^2\Gamma(p-l+1+\gamma)}{(p-l)![(4p)!]^2}-\frac{[\Gamma(2p-2l+1+\gamma)]^2\Gamma(4p+2l+1+\gamma)}{(4p+2l)![(2p-2l)!]^2}>0$。而由 Gamma 函数的性质可得

$$\frac{\left[\Gamma(4p+1+\gamma)\right]^2\Gamma(p-l+1+\gamma)}{(p-l)!\left[(4p)!\right]^2}-\frac{\left[\Gamma(2p-2l+1+\gamma)\right]^2\Gamma(4p+2l+1+\gamma)}{(4p+2l)!\left[(2p-2l)!\right]^2}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{p-l}(i+\gamma)}{(p-l)!}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{2p-2l}(i+\gamma)}{(2p-2l)!}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{4p}(i+\gamma)}{(4p)!}\left[\Gamma(1+\gamma)\right]^3\left[\prod_{i=1}^{2p+2l}\left(1+\frac{\gamma}{2p-2l+i}\right)-\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{p-l+i}\right)\cdot\prod_{i=1}^{2l}\left(1+\frac{\gamma}{4p+i}\right)\right],$$

所以可得 $B>0$ 等价于 $\prod_{i=1}^{2p+2l}\left(1+\frac{\gamma}{2p-2l+i}\right)-\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{p-l+i}\right)\cdot\prod_{i=1}^{2l}\left(1+\frac{\gamma}{4p+i}\right)>0$。

于是由函数 $f(x)$ 的单调性，计算可得当 $i=1,2,\cdots,p-l$ 时，

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{\gamma}{2p-2l+2i-1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2p-2l+2i}\right)\\&=1+\frac{\gamma}{2p-2l+2i-1}+\frac{\gamma}{2p-2l+2i}+\frac{\gamma^2}{(2p-2l+2i-1)(2p-2l+2i)},\\&>1+2\frac{\gamma}{2p-2l+2i}=1+\frac{\gamma}{p-l+i}\end{aligned}$$

当 $i=p-l+1,p-l+2,\cdots,p+l$ 时，令 $t=i-(p-l)$，则可得 $t=1,2,\cdots,2l$，且

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{\gamma}{2p-2l+2i-1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2p-2l+2i}\right)\\&=\left(1+\frac{\gamma}{4p-4l+2t-1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{4p-4l+2t}\right)\\&=1+\frac{\gamma}{4p-4l+2t-1}+\frac{\gamma}{4p-4l+2t}+\frac{\gamma^2}{(4p-4l+2t-1)(4p-4l+2t)},\\&>1+2\frac{\gamma}{4p-4l+2t}=1+\frac{\gamma}{2p-2l+t}>1+\frac{\gamma}{4p+t}\end{aligned}$$

即 $\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{2p-2l+2i-1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2p-2l+2i}\right)>\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{p-l+i}\right)$，

$$\prod_{t=1}^{2l}\left(1+\frac{\gamma}{4p-4l+2t-1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{4p-4l+2t}\right)>\prod_{t=1}^{2l}\left(1+\frac{\gamma}{4p+t}\right),$$

所以 $\prod_{i=1}^{2p+2l}\left(1+\frac{\gamma}{2p-2l+i}\right)-\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{p-l+i}\right)\cdot\prod_{i=1}^{2l}\left(1+\frac{\gamma}{4p+i}\right)>0$，即 $B>0$。

为了证明(4)式，记 $G=\frac{\left[(2p+1)!\right]^2\Gamma\left[4p-2l+3+\alpha\right]}{(4p-2l+1)!\left[\Gamma(2p+3+\alpha)\right]^2}-\frac{(l+p+1)!}{\Gamma(l+p+3+\alpha)}$，经过简单计算可得

$$G=\frac{\left[(2p+1)!\right]^2(l+p+1)!}{\left[\Gamma(2p+2+\gamma)\right]^2\Gamma(l+p+2+\gamma)}\left\{\frac{\Gamma(4p-2l+2+\gamma)\Gamma(l+p+2+\gamma)}{(l+p+1)!(4p-2l+1)!}-\frac{\left[\Gamma(2p+2+\gamma)\right]^2}{\left[(2p+1)!\right]^2}\right\},$$

于是由 Gamma 函数的性质计算可得

$$G=\frac{(2p+1)!\prod_{i=1}^{l+p+1}(i+\gamma)\prod_{i=1}^{2p+1}(i+\gamma)}{\left[\Gamma(2p+2+\gamma)\right]^2\Gamma(l+p+2+\gamma)}\left[\Gamma(1+\gamma)\right]^2\left[\prod_{i=2}^{2p-2l+1}\left(1+\frac{\gamma}{2p+i}\right)-\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{l+p+1+i}\right)\right],$$

所以可得 $G>0$ 等价于 $\prod_{i=2}^{2p-2l+1}\left(1+\frac{\gamma}{2p+i}\right)-\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{l+p+1+i}\right)>0$。

而由函数 $f(x)$ 的单调性，计算可得当 $i=1,2,\cdots,p-l$ 时，

$$\left(1+\frac{\gamma}{2p+2i}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2p+2i+1}\right)=1+\frac{\gamma}{2p+2i}+\frac{\gamma}{2p+2i+1}+\frac{\gamma^2}{(2p+2i)(2p+2i+1)}>1+2\frac{\gamma}{2p+2i+1},$$

$$>1+2\frac{\gamma}{2p+2i+2}=1+\frac{\gamma}{p+i+1}\ge 1+\frac{\gamma}{l+p+i+1}$$

所以可得 $\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{2p+2i}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2p+2i+1}\right)-\prod_{i=1}^{p-l}\left(1+\frac{\gamma}{l+p+1+i}\right)>0$，即 $G>0$。

定理 2.4 已知函数 $\varphi(z)=\sum_{l=0}^{m}a_l z^l+\sum_{l=1}^{n}b_l\bar{z}^l\in L^\infty(D)$，其中 m 和 n 均是正整数，则算子 B_φ 是正规的当且仅当函数 φ 恒等于零。

证明 如果函数 φ 恒等于零，那么显然可以得到算子 B_φ 是正规的。

如果算子 B_φ 是正规的，那么由(1)式可得对任意的非负整数 β，$B_\varphi^*B_\varphi z^\beta=B_\varphi B_\varphi^* z^\beta$。

既然 m 和 n 均为正整数，不妨设 $m=2s+q_1$，$n=2t+q_2$，其中 s,t,q_1,q_2 是非负整数且 $q_1\le 1$，$q_2\le 1$。由于(1)式中 β 的任意性，不妨取 $\beta=2p$，$p=s+t+q\ge 0$，$q=\max\{q_1,q_2\}$，那么由算子 B_φ 及其共轭算子的定义可得

$$\begin{aligned}B_\varphi z^\beta&=B_\varphi z^{2p}=WT_\varphi\left(z^{2p}\right)=W\left[\sum_{l=0}^{m}a_l z^{l+2p}+\sum_{l=1}^{n}b_l\frac{(2p)!\Gamma(2p-l+2+\alpha)}{(2p-l)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{2p-l}\right]\\&=\sum_{l=0}^{s}a_{2l}z^{l+p}+\sum_{l=1}^{t}b_{2l}\frac{(2p)!\Gamma(2p-2l+2+\alpha)}{(2p-2l)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{p-l}\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}B_\varphi^* z^\beta&=B_\varphi^* z^{2p}=T_{\bar\varphi}W^*\left(z^{2p}\right)=T_{\bar\varphi}\left[\frac{(2p)!\Gamma(4p+2+\alpha)}{(4p)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{4p}\right]\\&=\sum_{l=0}^{m}\overline{a_l}\frac{(2p)!\Gamma(4p-l+2+\alpha)}{(4p-l)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{4p-l}+\sum_{l=1}^{n}\overline{b_l}\frac{(2p)!\Gamma(4p+2+\alpha)}{(4p)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{4p+l}\end{aligned},$$

从而可得

$$\begin{aligned}B_\varphi^*B_\varphi z^\beta&=B_\varphi^*\left(B_\varphi z^\beta\right)=T_{\bar\varphi}W^*\left[\sum_{l=0}^{s}a_{2l}z^{l+p}+\sum_{l=1}^{t}b_{2l}\frac{(2p)!\Gamma(2p-2l+2+\alpha)}{(2p-2l)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{p-l}\right]\\&=T_{\bar\varphi}\left\{\sum_{l=0}^{s}a_{2l}\frac{(l+p)!\Gamma(2l+2p+2+\alpha)}{(2l+2p)!\Gamma(l+p+2+\alpha)}z^{2l+2p}\right.\\&\quad\left.+\sum_{l=1}^{t}b_{2l}\frac{(2p)!(p-l)!\left[\Gamma(2p-2l+2+\alpha)\right]^2}{\left[(2p-2l)!\right]^2\Gamma(2p+2+\alpha)\Gamma(p-l+2+\alpha)}z^{2p-2l}\right\}\\&=\sum_{l=0}^{s}\sum_{i=0}^{m}a_{2l}\overline{a_i}\frac{(l+p)!\Gamma(2l+2p-i+2+\alpha)}{(2l+2p-i)!\Gamma(l+p+2+\alpha)}z^{2l+2p-i}+\sum_{l=0}^{s}\sum_{i=1}^{n}a_{2l}\overline{b_i}\frac{(l+p)!\Gamma(2l+2p+2+\alpha)}{(2l+2p)!\Gamma(l+p+2+\alpha)}z^{2l+2p+i}\\&\quad+\sum_{l=1}^{t}\sum_{i=0}^{m}b_{2l}\overline{a_i}\frac{(2p)!(p-l)!\Gamma(2p-2l+2+\alpha)\Gamma(2p-2l-i+2+\alpha)}{(2p-2l)!(2p-2l-i)!\Gamma(2p+2+\alpha)\Gamma(p-l+2+\alpha)}z^{2p-2l-i}\\&\quad+\sum_{l=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}b_{2l}\overline{b_i}\frac{(2p)!(p-l)!\left[\Gamma(2p-2l+2+\alpha)\right]^2}{\left[(2p-2l)!\right]^2\Gamma(2p+2+\alpha)\Gamma(p-l+2+\alpha)}z^{2p-2l+i}\end{aligned},\quad(5)$$

$$
\begin{aligned}
B_\varphi B_\varphi^* z^\beta &= B_\varphi\left(B_\varphi^* z^\beta\right) = WT_\varphi\left[\sum_{l=0}^{m}\overline{a_l}\frac{(2p)!\Gamma(4p-l+2+\alpha)}{(4p-l)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{4p-l}+\sum_{l=1}^{n}\overline{b_l}\frac{(2p)!\Gamma(4p+2+\alpha)}{(4p)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{4p+l}\right]\\
&= W\left[\sum_{l=0}^{m}\sum_{i=0}^{m}\overline{a_l}a_i\frac{(2p)!\Gamma(4p-l+2+\alpha)}{(4p-l)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{4p-l+i}+\sum_{l=0}^{m}\sum_{i=1}^{n}\overline{a_l}b_i\frac{(2p)!\Gamma(4p-l-i+2+\alpha)}{(4p-l-i)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{4p-l-i}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=0}^{m}\overline{b_l}a_i\frac{(2p)!\Gamma(4p+2+\alpha)}{(4p)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{4p+l+i}+\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{b_l}b_i\frac{(2p)!(4p+l)!\Gamma(4p+2+\alpha)\Gamma(4p+l-i+2+\alpha)}{(4p)!(4p+l-i)!\Gamma(2p+2+\alpha)\Gamma(4p+l+2+\alpha)}z^{4p+l-i}\right]\\
&= \sum_{l=0}^{s}\sum_{i=0}^{s}\overline{a_{2l}}a_{2i}\frac{(2p)!\Gamma(4p-2l+2+\alpha)}{(4p-2l)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{2p-l+i}+\sum_{l=0}^{s-1+q_1}\sum_{i=0}^{s-1+q_1}\overline{a_{2l+1}}a_{2i+1}\frac{(2p)!\Gamma\left[4p-(2l+1)+2+\alpha\right]}{\left[4p-(2l+1)\right]!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{2p-l+i}\\
&\quad+\sum_{l=0}^{s}\sum_{i=1}^{t}\overline{a_{2l}}b_{2i}\frac{(2p)!\Gamma(4p-2l-2i+2+\alpha)}{(4p-2l-2i)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{2p-l-i}\\
&\quad+\sum_{l=0}^{s-1+q_1}\sum_{i=0}^{t-1+q_2}\overline{a_{2l+1}}b_{2i+1}\frac{(2p)!\Gamma\left[4p-(2l+1)-(2i+1)+2+\alpha\right]}{\left[4p-(2l+1)-(2i+1)\right]!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{2p-l-i-1}\\
&\quad+\sum_{l=1}^{t}\sum_{i=0}^{s}\overline{b_{2l}}a_{2i}\frac{(2p)!\Gamma(4p+2+\alpha)}{(4p)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{2p+l+i}+\sum_{l=0}^{t-1+q_2}\sum_{i=0}^{s-1+q_1}\overline{b_{2l+1}}a_{2i+1}\frac{(2p)!\Gamma(4p+2+\alpha)}{(4p)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{2p+l+i+1}\\
&\quad+\sum_{l=1}^{t}\sum_{i=1}^{t}\overline{b_{2l}}b_{2i}\frac{(2p)!(4p+2l)!\Gamma(4p+2+\alpha)\Gamma(4p+2l-2i+2+\alpha)}{(4p)!(4p+2l-2i)!\Gamma(2p+2+\alpha)\Gamma(4p+2l+2+\alpha)}z^{2p+l-i}\\
&\quad+\sum_{l=0}^{t-1+q_2}\sum_{i=0}^{t-1+q_2}\overline{b_{2l+1}}b_{2i+1}\frac{(2p)!(4p+2l+1)!\Gamma(4p+2+\alpha)\Gamma(4p+2l-2i+2+\alpha)}{(4p)!(4p+2l-2i)!\Gamma(2p+2+\alpha)\Gamma(4p+2l+3+\alpha)}z^{2p+l-i}
\end{aligned}\quad, \tag{6}
$$

所以由算子 B_φ 的正规性和(1)式可得(5)式与(6)式相等，从而(5)式和(6)式中 z^{2p} 项的系数应相等，即

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{s}\left|a_{2l}\right|^2\left[\frac{(l+p)!\Gamma(2p+2+\alpha)}{(2p)!\Gamma(l+p+2+\alpha)}-\frac{(2p)!\Gamma(4p-2l+2+\alpha)}{(4p-2l)!\Gamma(2p+2+\alpha)}\right]-\sum_{l=0}^{s-1+q_1}\left|a_{2l+1}\right|^2\frac{(2p)!\Gamma(4p-2l+1+\alpha)}{(4p-2l-1)!\Gamma(2p+2+\alpha)}\\
&+\sum_{l=1}^{t}\left|b_{2l}\right|^2\left\{\frac{(2p)!(p-l)!\left[\Gamma(2p-2l+2+\alpha)\right]^2}{\left[(2p-2l)!\right]^2\Gamma(2p+2+\alpha)\Gamma(p-l+2+\alpha)}-\frac{(2p)!(4p+2l)!\left[\Gamma(4p+2+\alpha)\right]^2}{\left[(4p)!\right]^2\Gamma(2p+2+\alpha)\Gamma(4p+2l+2+\alpha)}\right\}\text{。}\\
&-\sum_{l=0}^{t-1+q_2}\left|b_{2l+1}\right|^2\frac{(2p)!(4p+2l+1)!\left[\Gamma(4p+2+\alpha)\right]^2}{\left[(4p)!\right]^2\Gamma(2p+2+\alpha)\Gamma(4p+2l+3+\alpha)}=0
\end{aligned}
$$

而由引理 2.3 可得对于任意满足 $0\le l\le s$ 的整数 l，

$$
\frac{(l+p)!\Gamma(2p+2+\alpha)}{(2p)!\Gamma(l+p+2+\alpha)}-\frac{(2p)!\Gamma(4p-2l+2+\alpha)}{(4p-2l)!\Gamma(2p+2+\alpha)}<0,
$$

对于任意满足 $1\le l\le t$ 的整数 l，

$$
\frac{(2p)!(p-l)!\left[\Gamma(2p-2l+2+\alpha)\right]^2}{\left[(2p-2l)!\right]^2\Gamma(2p+2+\alpha)\Gamma(p-l+2+\alpha)}-\frac{(2p)!(4p+2l)!\left[\Gamma(4p+2+\alpha)\right]^2}{\left[(4p)!\right]^2\Gamma(2p+2+\alpha)\Gamma(4p+2l+2+\alpha)}<0,
$$

且由 Gamma 函数的性质可得对于任意满足 $0\le l\le s$ 的整数 l，$\frac{(2p)!\Gamma(4p-2l+1+\alpha)}{(4p-2l-1)!\Gamma(2p+2+\alpha)}>0$，对于任意满足 $1\le l\le t$ 的整数 l，$\frac{(2p)!(4p+2l+1)!\left[\Gamma(4p+2+\alpha)\right]^2}{\left[(4p)!\right]^2\Gamma(2p+2+\alpha)\Gamma(4p+2l+3+\alpha)}>0$，所以可得对任意的非负整数 l 有 $a_l=0$

和 $b_l=0$，即 $\varphi(z)\equiv 0$，$\forall z\in D$。

通过本节的分析我们得到了加权 Bergman 空间上以有界解析函数、有界共轭解析函数和调和多项式函数为符号的斜 Toeplitz 算子是正规算子当且仅当其符号函数是零函数，而斜 Toeplitz 算子的定义显示符号函数是零函数的该类算子必是零算子，所以加权 Bergman 空间上以有界解析函数、有界共轭解析函数和调和多项式函数为符号的斜 Toeplitz 算子中仅有零算子是正规算子，这与 $L^2(T)$ 空间和 Hardy 空间 $H^2(T)$ 上的结论类似。

3. 斜 Toeplitz 算子的亚正规性

由正规性和亚正规性的定义可以看出正规算子必定是亚正规算子，但反之不一定成立。而由上面的讨论我们发现带有特殊调和符号的斜 Toeplitz 算子是正规算子当且仅当该算子的符号函数是零函数，即该算子是零算子，那么人们自然地会考虑：亚正规的斜 Toeplitz 算子具有什么性质？亚正规的斜 Toeplitz 算子是否是正规的？本节主要讨论带有特殊调和符号的亚正规斜 Toeplitz 算子的性质，得到以下结论。

对任意的 $\varphi\in L^\infty(D)$，若算子 B_φ 是亚正规的，那么由定义可得算子 B_φ 应满足对任意的 $f\in A_\alpha^2(D)$，

$$\left\|B_\varphi f\right\|^2\ge\left\|B_\varphi^* f\right\|^2,\quad \beta\in N。\tag{7}$$

由于(7)式两端的量随着符号函数 φ 的不同而发生变化，所以这里将按照符号函数 φ 的不同展开讨论。

定理 3.1 如果函数 $\varphi\in H^\infty(D)$ 且 $W(\varphi z^r)$ 是一个多项式函数，这里 r 是满足 $0\le r\le 1$ 的整数，那么算子 B_φ 是亚正规的当且仅当函数 φ 恒等于零。

证明 由于 $\varphi\in H^\infty(D)$，那么可设 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$。既然对满足 $0\le r\le 1$ 的整数 r，$W(\varphi z^r)$ 是一个多项式，则下面将根据函数 φ 的性质以及(7)式展开以下讨论。

若 $r=0$，即 $W(\varphi)$ 是一个多项式，那么不妨设 $W(\varphi)=\sum_{n=0}^{m}a_{2n}z^n$，这里 m 是非负整数。现取(7)式中的函数 $f(z)=z^{2\beta}$，这里 β 是大于 m 的任意正整数，那么可得

$$B_\varphi\left(z^{2\beta}\right)=WT_\varphi\left(z^{2\beta}\right)=W\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+2\beta}\right)=\sum_{n=0}^{m}a_{2n}z^{n+\beta},$$

$$B_\varphi^*\left(z^{2\beta}\right)=T_{\bar\varphi}\left[\frac{(2\beta)!\Gamma(4\beta+2+\alpha)}{(4\beta)!\Gamma(2\beta+2+\alpha)}z^{4\beta}\right]=\sum_{n=0}^{4\beta}\overline{a_n}\frac{(2\beta)!\Gamma(4\beta-n+2+\alpha)}{(4\beta-n)!\Gamma(2\beta+2+\alpha)}z^{4\beta-n},$$

从而可得

$$\left\|B_\varphi\left(z^{2\beta}\right)\right\|^2=\sum_{n=0}^{m}\frac{(n+\beta)!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+\beta+2+\alpha)}\left|a_{2n}\right|^2,\quad \left\|B_\varphi^*\left(z^{2\beta}\right)\right\|^2=\sum_{n=0}^{4\beta}\frac{\left[(2\beta)!\right]^2\Gamma(4\beta-n+2+\alpha)\Gamma(2+\alpha)}{(4\beta-n)!\left[\Gamma(2\beta+2+\alpha)\right]^2}\left|a_n\right|^2。$$

于是由(7)式可得

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(n+\beta)!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+\beta+2+\alpha)}\left|a_{2n}\right|^2\ge\sum_{n=0}^{4\beta}\frac{\left[(2\beta)!\right]^2\Gamma(4\beta-n+2+\alpha)\Gamma(2+\alpha)}{(4\beta-n)!\left[\Gamma(2\beta+2+\alpha)\right]^2}\left|a_n\right|^2,$$

而 $W(\varphi)=\sum_{n=0}^{m}a_{2n}z^n$，所以上式等价于

$$\sum_{n=0}^{m}\left\{\frac{\left[(2\beta)!\right]^2\Gamma(4\beta-2n+2+\alpha)}{(4\beta-2n)!\left[\Gamma(2\beta+2+\alpha)\right]^2}-\frac{(n+\beta)!}{\Gamma(n+\beta+2+\alpha)}\right\}\left|a_{2n}\right|^2+\sum_{n=0}^{2\beta-1}\frac{\left[(2\beta)!\right]^2\Gamma(4\beta-2n+1+\alpha)}{(4\beta-2n-1)!\left[\Gamma(2\beta+2+\alpha)\right]^2}\left|a_{2n+1}\right|^2\le 0。$$

而由引理 2.3 知 $\dfrac{\left[(2\beta)!\right]^2\Gamma(4\beta-2n+2+\alpha)}{(4\beta-2n)!\left[\Gamma(2\beta+2+\alpha)\right]^2}-\dfrac{(n+\beta)!}{\Gamma(n+\beta+2+\alpha)}>0$，所以可得对任意满足 $\beta>m$ 的 β，若 $0\le n\le 4\beta$，$a_n=0$。于是由 β 的任意性可得对任意的非负整数 n，$a_n=0$，即得函数 $\varphi\equiv 0$。

若 $r=1$，即 $W(\varphi z)$ 是一个多项式，那么不妨设 $W(\varphi)=\sum_{n=0}^{m}a_{2n+1}z^{n+1}$，这里 m 是非负整数。现取(7)式中的函数 $f(z)=z^{2\beta+1}$，这里 β 是大于 m 的任意正整数，则由算子 B_φ 及其共轭算子的定义可得

$$B_\varphi\left(z^{2\beta+1}\right)=W\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+2\beta+1}\right)=\sum_{n=0}^{m}a_{2n+1}z^{n+\beta+1},$$

$$B_\varphi^*\left(z^{2\beta+1}\right)=T_{\overline{\varphi}}W^*\left(z^{2\beta+1}\right)=T_{\overline{\varphi}}\left[\frac{(2\beta+1)!\Gamma(4\beta+4+\alpha)}{(4\beta+2)!\Gamma(2\beta+3+\alpha)}z^{4\beta+2}\right]=\sum_{n=0}^{4\beta+2}\overline{a_n}\frac{(2\beta+1)!\Gamma(4\beta-n+4+\alpha)}{(4\beta-n+2)!\Gamma(2\beta+3+\alpha)}z^{4\beta-n+2},$$

从而可得

$$\left\|B_\varphi\left(z^{2\beta+1}\right)\right\|^2=\sum_{n=0}^{m}\frac{(n+\beta+1)!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+\beta+3+\alpha)}\left|a_{2n+1}\right|^2,\quad \left\|B_\varphi^*\left(z^{2\beta+1}\right)\right\|^2=\sum_{n=0}^{4\beta+2}\frac{\left[(2\beta+1)!\right]^2\Gamma(4\beta-n+4+\alpha)\Gamma(2+\alpha)}{(4\beta-n+2)!\left[\Gamma(2\beta+3+\alpha)\right]^2}\left|a_n\right|^2。$$

于是由(7)式可得

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(n+\beta)!}{\Gamma(n+\beta+2+\alpha)}\left|a_{2n+r}\right|^2\ge\sum_{n=0}^{4\beta+2}\frac{\left[(2\beta)!\right]^2\Gamma(4\beta-n+4+\alpha)}{(4\beta-n+2)!\left[\Gamma(2\beta+3+\alpha)\right]^2}\left|a_n\right|^2,$$

而 $W(\varphi)=\sum_{n=0}^{m}a_{2n+1}z^{n+1}$，所以上式等价于

$$\sum_{n=0}^{m}\left\{\frac{\left[(2\beta+1)!\right]^2\Gamma\left[4\beta-2n+3+\alpha\right]}{(4\beta-2n+1)!\left[\Gamma(2\beta+3+\alpha)\right]^2}-\frac{(n+\beta+1)!}{\Gamma(n+\beta+3+\alpha)}\right\}\left|a_{2n+1}\right|^2+\sum_{n=0}^{2\beta+1}\frac{\left[(2\beta+1)!\right]^2\Gamma(4\beta-2n+4+\alpha)}{(4\beta-2n+2)!\left[\Gamma(2\beta+3+\alpha)\right]^2}\left|a_{2n}\right|^2\le 0。$$

又由引理 2.3 知 $\dfrac{\left[(2\beta+1)!\right]^2\Gamma\left[4\beta-2n+3+\alpha\right]}{(4\beta-2n+1)!\left[\Gamma(2\beta+3+\alpha)\right]^2}-\dfrac{(n+\beta+1)!}{\Gamma(n+\beta+3+\alpha)}>0$，所以可得对任意满足 $\beta>m$ 的 β，若 $0\le n\le 2\beta+2$，$a_n=0$。于是由 β 的任意性可得对任意的非负整数 n，$a_n=0$，即得函数 $\varphi\equiv 0$。

反之，若函数 φ 恒等于零，那么显然可得算子 B_φ 是亚正规的。

定理 3.2 如果函数 φ 的共轭函数 $\overline{\varphi}\in H^\infty(D)$，那么算子 B_φ 是亚正规的当且仅当函数 φ 恒等于零。

证明若 B_φ 是亚正规的，现取(7)式中得函数 $f(z)=z^0$，那么由算子 B_φ 及其共轭算子的定义可得

$$B_\varphi z^0=WT_\varphi\left(z^0\right)=W\left(a_0z^0\right)=a_0,\quad B_\varphi^*z^0=T_{\overline{\varphi}}W^*\left(z^0\right)=T_{\overline{\varphi}}z^0=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}z^n,$$

从而可得 $\left\|B_\varphi f\right\|^2=\left|a_0\right|^2$，$\left\|B_\varphi^*f\right\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)}\left|a_n\right|^2$，于是由(7)式可得 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)}\left|a_n\right|^2\le\left|a_0\right|^2$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)}\left|a_n\right|^2\le 0$。而显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)}\left|a_n\right|^2\ge 0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)}\left|a_n\right|^2=0$，从而对所有的正整数 n，$a_n=0$，于是可得 $\varphi(z)=a_0$.又因为常值函数也是解析函数，所以由定理 3.1 可得函数 $\varphi\equiv 0$。

反之，若函数 $\varphi\equiv 0$，则显然可得 B_φ 是亚正规的。

定理 3.3 如果函数 $\varphi(z)=\sum_{l=0}^{m}a_l z^l+\sum_{l=1}^{n}b_l\overline{z}^l\in L^\infty(D)$，其中 m 和 n 均是正整数，那么算子 B_φ 是亚正规

的当且仅当函数 φ 恒等于零。

证明既然 m 和 n 都是非负整数，不妨设 $m=2s+q_1$， $n=2t+q_2$，其中 s,t,q_1,q_2 是非负整数且 $q_1\le 1$，$q_2\le 1$。如果算子 B_φ 是亚正规的，那么由(7)式中 f 的任意性，不妨取 $f(z)=z^{2p}$， $p=s+t+q\ge 0$，$q=\max\{q_1,q_2\}$，则由算子 B_φ 及其共轭算子的定义计算可得

$$B_\varphi f=\sum_{l=0}^{s}a_{2l}z^{l+p}+\sum_{l=1}^{t}b_{2l}\frac{(2p)!\Gamma(2p-2l+2+\alpha)}{(2p-2l)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{p-l},$$

$$B_\varphi^* f=\sum_{l=0}^{m}\overline{a_l}\frac{(2p)!\Gamma(4p-l+2+\alpha)}{(4p-l)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{4p-l}+\sum_{l=1}^{n}\overline{b_l}\frac{(2p)!\Gamma(4p+2+\alpha)}{(4p)!\Gamma(2p+2+\alpha)}z^{4p+l},$$

从而可得

$$\left\|B_\varphi f\right\|^2=\sum_{l=0}^{s}\left|a_{2l}\right|^2\frac{(l+p)!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(l+p+2+\alpha)}+\sum_{l=1}^{t}\left|b_{2l}\right|^2\frac{\left[(2p)!\right]^2(p-l)!\left[\Gamma(2p-2l+2+\alpha)\right]^2\Gamma(2+\alpha)}{\left[(2p-2l)!\right]^2\left[\Gamma(2p+2+\alpha)\right]^2\Gamma(p-l+2+\alpha)},$$

$$\left\|B_\varphi^* f\right\|^2=\sum_{l=0}^{m}\left|a_l\right|^2\frac{\left[(2p)!\right]^2\Gamma(4p-l+2+\alpha)\Gamma(2+\alpha)}{(4p-l)!\left[\Gamma(2p+2+\alpha)\right]^2}+\sum_{l=1}^{n}\left|b_l\right|^2\frac{\left[(2p)!\right]^2(4p+l)!\left[\Gamma(4p+2+\alpha)\right]^2\Gamma(2+\alpha)}{\left[(4p)!\right]^2\left[\Gamma(2p+2+\alpha)\right]^2\Gamma(4p+l+2+\alpha)},$$

于是由(7)式可得

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{s}\left|a_{2l}\right|^2\left\{\frac{(l+p)!}{\Gamma(l+p+2+\alpha)}-\frac{\left[(2p)!\right]^2\Gamma(4p-2l+2+\alpha)}{(4p-2l)!\left[\Gamma(2p+2+\alpha)\right]^2}\right\}-\sum_{l=0}^{s-1+q_1}\left|a_{2l+1}\right|^2\frac{\left[(2p)!\right]^2\Gamma(4p-2l+1+\alpha)}{(4p-2l-1)!\left[\Gamma(2p+2+\alpha)\right]^2}\\&+\sum_{l=1}^{t}\left|b_{2l}\right|^2\left\{\frac{\left[(2p)!\right]^2(p-l)!\left[\Gamma(2p-2l+2+\alpha)\right]^2}{\left[(2p-2l)!\right]^2\left[\Gamma(2p+2+\alpha)\right]^2\Gamma(p-l+2+\alpha)}-\frac{\left[(2p)!\right]^2(4p+2l)!\left[\Gamma(4p+2+\alpha)\right]^2}{\left[(4p)!\right]^2\left[\Gamma(2p+2+\alpha)\right]^2\Gamma(4p+2l+2+\alpha)}\right\}\\&-\sum_{l=0}^{t-1+q_2}\left|b_{2l+1}\right|^2\frac{\left[(2p)!\right]^2(4p+2l+1)!\left[\Gamma(4p+2+\alpha)\right]^2}{\left[(4p)!\right]^2\left[\Gamma(2p+2+\alpha)\right]^2\Gamma(4p+2l+3+\alpha)}\ge 0\end{aligned}\tag{8}$$

而由引理 2.3 可得对任意满足 $0\le l\le s$ 的 l，

$$\frac{(l+p)!}{\Gamma(l+p+2+\alpha)}-\frac{\left[(2p)!\right]^2\Gamma(4p-2l+2+\alpha)}{(4p-2l)!\left[\Gamma(2p+2+\alpha)\right]^2}<0,$$

对任意满足 $1\le l\le t$ 的 l，

$$\frac{\left[(2p)!\right]^2(p-l)!\left[\Gamma(2p-2l+2+\alpha)\right]^2}{\left[(2p-2l)!\right]^2\left[\Gamma(2p+2+\alpha)\right]^2\Gamma(p-l+2+\alpha)}-\frac{\left[(2p)!\right]^2(4p+2l)!\left[\Gamma(4p+2+\alpha)\right]^2}{\left[(4p)!\right]^2\left[\Gamma(2p+2+\alpha)\right]^2\Gamma(4p+2l+2+\alpha)}<0,$$

所以(8)式左端的式子小于等于 0，从而可得(8)式左端等于 0，于是可得 $a_l=0$， $b_j=0$，其中 $l=0,1,\cdots,m$， $j=1,2,\cdots,n$，即可得函数 $\varphi\equiv 0$。

反之，若函数 φ 恒等于零，则显然可得算子 B_φ 是亚正规的。

通过本节的分析我们得到了加权 Bergman 空间上以特殊有界解析函数、有界共轭解析函数和调和多项式函数为符号的斜 Toeplitz 算子是亚正规算子当且仅当其符号函数是零函数，而斜 Toeplitz 算子的定义显示符号函数是零函数的该类算子必是零算子，所以加权 Bergman 空间上以特殊有界解析函数、有界共轭解析函数和调和多项式函数为符号的斜 Toeplitz 算子中仅有零算子是亚正规算子，这与 $L^2(T)$ 空间和 Hardy 空间 $H^2(T)$ 上的结论类似。此外，结合上一节的分析显然可得加权 Bergman 空间上以特殊有界解

析函数、有界共轭解析函数和调和多项式函数为符号的斜 Toeplitz 算子是亚正规算子当且仅当该算子是正规算子，且该算子只能是零算子。

4. 总结

本文运用函数论和 Gamma 函数的性质研究了单位圆盘的 Bergman 空间上带有调和符号斜 Toeplitz 算子的正规性和亚正规性，得到了分别以有界解析函数、共轭解析函数和调和多项式函数为符号的斜 Toeplitz 算子是正规算子或亚正规算子的充分必要条件，所得结论具有原创性和创新性。今后，我们将根据空间 $L^2(D)$ 的正交分解、Mellin 变换和矩阵理论对带有更一般符号的斜 Toeplitz 算子的正规性和亚正规性展开深入的探讨。

基金项目

国家自然科学基金项目(No: 11301046)；辽宁省教育厅科学研究经费项目(JDL2019026)。

参考文献

[1] Ho, M.C. (1996) Properties of Slant Toeplitz Operators. *Indiana University Mathematics Journal*, **45**, 843-862. https://doi.org/10.1512/iumj.1996.45.1973

[2] Ho, M.C. (1997) Spectra of Slant Toeplitz Operators with Continuous Symbol. *Michigan Mathematical Journal*, **44**, 157-166. https://doi.org/10.1307/mmj/1029005627

[3] Ho, M.C. (1997) Adjoints of Slant Toeplitz Operators. *Integral Equations and Operator Theory*, **29**, 301-312. https://doi.org/10.1007/BF01320703

[4] Ho, M.C. (2001) Adjoints of Slant Toeplitz Operators II. *Integral Equations and Operator Theory*, **41**, 179-188. https://doi.org/10.1007/BF01295304

[5] Arora, S.C. and Batra, R. (2003) On Generalized Slant Toeplitz Operators. *Indian Journal of Mathematics*, **45**, 121-134.

[6] Arora, S.C. and Batra, R. (2004) On Generalized Slant Toeplitz Operators with Continuous Symbols. *Yokohama Mathematical Journal*, **51**, 1-9.

[7] Arora, S.C. and Batra, R. (2005) Generalized Slant Toeplitz Operators on H^2. *Mathematische Nachrichten*, **278**, 347-355. https://doi.org/10.1002/mana.200310244

[8] 安恒斌, 蹇人宜. Bergman 空间上的斜 Toeplitz 算子[J]. 数学学报, 2004, 47(1): 103-110.

[9] Yang, J., Leng, A. and Lu, Y. (2007) K-Order Slant Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Northeastern Mathematical Journal*, **23**, 403-412.

[10] Lu, Y., Liu, C. and Yang, J. (2010) Commutativity of k^{th}-Order Slant Toeplitz Operators. *Mathematische Nachrichten*, **283**, 1304-1313. https://doi.org/10.1002/mana.200710100

[11] 章国凤,于涛. Dirichlet 空间上的斜 Toeplitz 算子[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2011, 29(2): 50-55.

[12] 朱洪敏. 单位多圆盘上 Bergman 空间上的 k 阶斜 Toeplitz 算子的一些研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2012.

[13] Liu, C. and Lu, Y. (2013) Product and Commutativity of Slant Toeplitz Operators. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **33**, 122-126.

[14] Liu, C. and Lu, Y. (2013) Product and Commutativity of *k*th-Order Slant Toeplitz Operators. *Abstract and Applied Analysis*, **45**, 900-914

[15] 刘朝美, 倪维丹. Bergman 空间上 k 阶斜 Toeplitz 算子的正规性及亚正规性[J]. 大连交通大学学报, 2016, 37(1): 113-116.

[16] 刘朝美, 高娇娇. 双圆盘的 Bergman 空间上 k 阶斜 Toeplitz 算子的交换性[J]. 大连交通大学学报, 2017, 38(5): 115-117+120.

[17] Singh, S.K. and Gupta, A. (2017) *k*TH-Order Slant Toeplitz Operators on the Fock Space. *Advances in Operator Theory*, **2**, 318-333.

[18] Datt, G. and Ohri, N. (2018) Properties of Slant Toeplitz Operators on the Torus. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, **12**, 195-209.

[19] Datt, G. and Ohri, N. (2019) Slant Toeplitz Operators on the Lebesgue Space of the Torus. *Khayyam Journal of Mathematics*, **5**, 65-76.

[20] Datt, G. and Pandey, S.K. (2020) Compression of Slant Toeplitz Operators on the Hardy Space of n-Dimensional Torus. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **70**, 997-1018. https://doi.org/10.21136/CMJ.2020.0088-19

[21] Hazarika, M. and Marik, S. (2020) Reducing and Minimal Reducing Subspaces of Slant Toeplitz Operators. *Advances in Operator Theory*, **5**, 336-346. https://doi.org/10.1007/s43036-019-00022-z

[22] 杜巧玲, 许安见. Hardy 空间上的斜 Toeplitz 算子的极小约化子空间[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2021, 35(8): 224-229.

[23] Pandey, S.K. and Datt, G. (2021) Multivariate Version of Slant Toeplitz Operators on the Lebesgue Space. *Asian-European Journal of Mathematics*, **14**, 1-15. https://doi.org/10.1142/S1793557121501527

[24] Hazarika, M. and Marik, S. (2021) Toeplitz and Slant Toeplitz Operators on the Polydisk. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, **27**, 73-93. https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2019.02.003

[25] Łanucha, B. and Michalska, M. (2022) Compressions of *k*th-Order Slant Toeplitz Operators to Model Spaces. *Lithuanian Mathematical Journal*, **62**, 69-87. https://doi.org/10.1007/s10986-021-09548-3