Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(4), 2020-2034
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124206

(3 + 1)维幂律3 Zakharov-Kuznetsov方程的行波解

——兼论幂律n

王双特[1]，于恒国[2]，刘环艺[2]，戴文周[1]

[1]乐清市柳市镇第三中学，浙江 温州
[2]温州大学数理学院，浙江 温州

收稿日期：2023年3月26日；录用日期：2023年4月21日；发布日期：2023年4月29日

摘　要

借助于平面动力系统理论，定性分析了非线性(3 + 1)维幂律3 Zakharov-Kuznetsov方程的行波解，同时给出了行波解的分类及近似解计算方法。结合相关文献，整体上讨论了幂律为n时Zakharov-Kuznetsov方程的行波解，由此推广了本文及相应文献中的结果。

关键词

Zakharov-Kuznetsov方程，平衡点，行波解，幂律

Travelling Wave Solutions of a (3 + 1) Dimensional Zakharov-Kuznetsov Equation with Power Law 3

—On Power Law n

Shuangte Wang[1], Hengguo Yu[2], Huanyi Liu[2], Wenzhou Dai[1]

[1]Yueqing Liushi No.3 Middle School, Wenzhou Zhejiang
[2]College of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang

Received: Mar. 26th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 29th, 2023

Abstract

With the aid of the theory of planar dynamical system, it has qualitatively analysis travelling wave solutions of a nonlinear (3 + 1) dimensional Zakharov-Kuznetsov equation with power law 3. The

文章引用: 王双特, 于恒国, 刘环艺, 戴文周. (3 + 1)维幂律 3 Zakharov-Kuznetsov 方程的行波解[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 2020-2034. DOI: 10.12677/aam.2023.124206

classification and approximate calculation methods of travelling wave solutions are also derived. Combining corresponding literature, in general, travelling wave solutions the of Zakharov-Kuznetsov equation with power law n are discussed. Therefore, it extends outcomes in this paper and corresponding literature.

Keywords

Zakharov-Kuznetsov Equation, Equilibrium, Travelling Wave Solution, Power Law

1. 引言

众所周知，(2 + 1)维Zakharov-Kuznetsov方程(ZK方程)

$$u_t+\alpha uu_x+u_{xxx}+u_{xxy}=0 \tag{1}$$

是KdV方程在二维空间的推广形式，它是应用渐进多尺度技术在磁场中发现的一种磁等离子子波，在物理学领域有着广泛的应用[1]，许多学者对其进行了广泛的研究[2]-[16]。一般的，具有幂律 n 非线性(3 + 1)维Zakharov-Kuznetsov方程[6] [7] [16]为

$$u_t+\alpha u^n u_x+(\Delta u)_x=0, \tag{2}$$

其中 α 是非零常数，$\Delta=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2$ 是Laplace算子，$u=u(t,x,y,z)$。受文[6] [7] [10] [11] [12] [16]的启发，本文重点考虑幂律3 ZK方程的行波解，整体安排如下。首先，给出相应常微分系统的平衡点情况，如个数和类型；其次，针对行波解的分类及形式进行了讨论，同时给出其近似解的计算方法，基于此，在形式上给出了ZK方程对称的一种表达式；最后，对幂律 n 为正整数时的ZK方程作初步定性分析。

2. 准备工作

对于幂律为3的ZK方程

$$u_t+\alpha u^3 u_x+(\Delta u)_x=0, \tag{3}$$

作行波变换 $u=u(\xi)$，$\xi=x+y+z-ct$，$c\neq 0$ 为波速，积分一次后化为二阶常微分方程(ODE)

$$u''=\tfrac{1}{3}cu-\tfrac{1}{12}\alpha u^4+C_1, \tag{4}$$

其中 C_1 是积分常数，上标'(撇)指对 ξ 求导，下同。为简便，设 $x=u$ 和 $y=u'$，上述ODE化为常微分系统

$$x'=y, y'=\tfrac{1}{3}cx-\tfrac{1}{12}\alpha x^4+C_1:=f(x)。 \tag{5}$$

显然首次积分为 $H(x,y):=\frac{1}{3}cx^2-\frac{1}{30}\alpha x^5+2C_1x-y^2=const.$，所定义的轨线为 $\Gamma(h)=\{(x,y)|$ $H(x,y)=h\}$。注意，如果设首次积分形式为 $H(x,y)=\sum_{k=0}^{m}a_k(x)y^k=0$，$a_k(x)$ 为关于 x 的多项式，由交换代数理论的除法定理[17] [18]知，存在复数域上多项式 $q(x,y)=g(x)+h(x)y$，使得 $\frac{dH}{d\xi}=q(x,y)H(x,y)$，再取 $m=2$，比较系数有 $a_0g=a_1f$，$a_1g+a_0h=a_0'+2a_2f$，$a_2g+a_1h=a_1'$，$a_2h=a_2'$。计算得 a_2 为非零常数，$a_1=g=h=0$，而 $a_0=-2a_2\left(\frac{1}{6}cx^2-\frac{1}{60}\alpha x^5+D_1x+D_2\right)$，又回到上述形式。

当 $C_1 = 0$ 时，系统(5)的平衡点为 $O=(0,0)$ 和 $E_* = \left(\sqrt[3]{\frac{4c}{\alpha}},0\right)$。当 $c>0$ 时，O 为鞍点，由对称原理[19]知 E_* 为中心；当 $c<0$ 时，O 为中心，而 E_* 为鞍点。而轨线经过点 O 和点 E_* 时临界值分别为 $h_0 = 0$ 和 $h_* = \frac{4^{\frac{2}{3}}c^{\frac{5}{3}}}{5\alpha^{\frac{2}{3}}}$，$h_*$ 与 c 同号。图 1 给出了 $\alpha=\alpha_0$ 时四种轨线图。

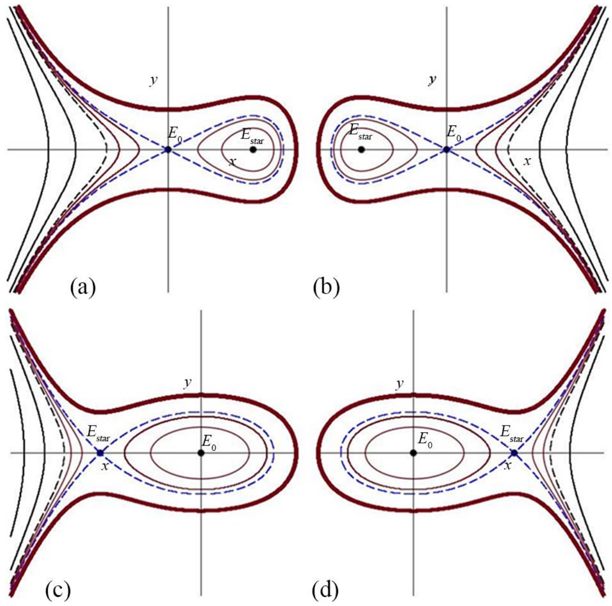

Figure 1. Trajectories with $C_1 = 0$: (a) $c,\alpha>0$; (b) $c>0,\alpha<0$; (c) $c<0,\alpha>0$; (d) $c,\alpha<0$

图 1. $C_1 = 0$ 时轨线：(a) $c,\alpha>0$；(b) $c>0,\alpha<0$；(c) $c<0,\alpha>0$；(d) $c,\alpha<0$

3. $C_1 \neq 0$ 时的行波解分支

3.1. 平衡点的个数

引入四次方程 $f(x)=0$ 的判别式 $A_x = -\frac{1}{9}\alpha^3 C_1 \neq 0$，$B_x = -\frac{1}{324}\alpha^4 c^4 < 0$，$C_x = \frac{1}{729}\alpha^6 C_1^2 > 0$，$\Delta_x = \frac{1}{104976}\alpha^8\left(64\alpha C_1^3 + c^4\right)$，分为三种情形进行考虑：情形1. $\Delta_x = 0$ 或 $\alpha = \alpha_0 := -\frac{c^4}{64C_1^3}$，此时方程有一对二重实根和一对共轭复根，即仅有一个平衡点；情形2. $\Delta_x > 0$ 或 $64\alpha C_1^3 + c^4 > 0$，此时方程有两个不等实根和一对共轭复根，即有两个平衡点；情形3. $\Delta_x < 0$ 或 $64\alpha C_1^3 + c^4 < 0$，此时方程有两对不等的共轭复根，即没有平衡点。

如果改写方程 $f(x)=0$ 为 $\frac{1}{3}cx - \frac{1}{12}\alpha x^4 = -C_1$，则实根情况转化为两个函数 $f_0(x) = \frac{1}{3}cx - \frac{1}{12}\alpha x^4$ 和直线 $y=-C_1$ 的交点情况。显然，当 $\alpha>0$ （$\alpha<0$）时函数 $f_0(x)$ 有最大(小)值 $f_0\left(\sqrt[3]{\frac{c}{\alpha}}\right) = \frac{c}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{c}{\alpha}}$。以 $\alpha>0$ 为例，当 $f_0\left(\sqrt[3]{\frac{c}{\alpha}}\right) < -C_1$，$f_0\left(\sqrt[3]{\frac{c}{\alpha}}\right) = -C_1$ 和 $f_0\left(\sqrt[3]{\frac{c}{\alpha}}\right) > -C_1$ 时，分别对应 0 个，1 个和 2 个交点，即又回到了上述三种情形。类似的，可以说明 $\alpha<0$ 时的三种情形。图 2 说明了以上分析。

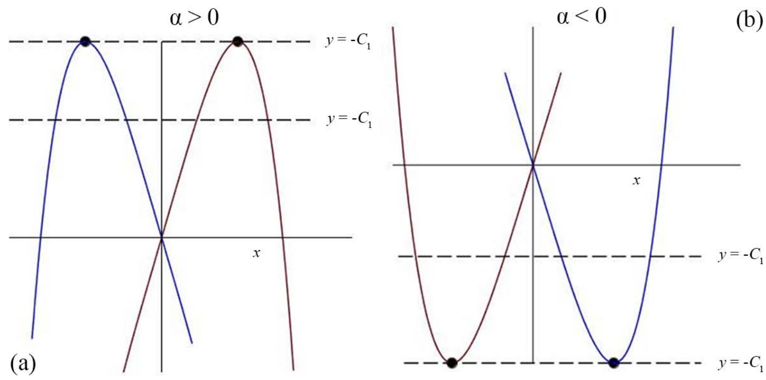

Figure 2. The figures of functions $f_0(x)$ and $y=-C_1$: (a) $\alpha>0$; (b) $\alpha<0$

图 2. 函数 $f_0(x)$ 与直线 $y=-C_1$ 的图象：(a) $\alpha>0$；(b) $\alpha<0$

3.2. 情形 1：$\Delta_x=0$ 或 $\alpha=\alpha_0$

此时唯一的平衡点 $E_*=\left(-\frac{4C_1}{c},0\right)$ 为高阶奇点，因Jacobi矩阵 $J(E)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3}\left(c-\alpha x^3\right) & 0\end{pmatrix}$ 的行列式和迹均为零。取变换 $u=x-x_*$，$v=y$ 和 $u=Au_1$，$v=Av_1$，$A=\frac{1}{a_2}$，$a_2=\frac{c^2}{8C_1}$，化为系统

$$u_1'=v_1,\quad v_1'=u_1^2-\frac{4}{3c}u_1^3+\frac{2}{3c^2}u_1^4。\tag{6}$$

这等价于系统 $x'=y$，$y'=x^2+o\left(|x,y|^4\right)$，因此 $E_*=\left(-\frac{4C_1}{c},0\right)$ 是余维至少为4的尖点[20]。轨线经过该奇点的临界值为 $h_*=H(x_*,0)=-\frac{16C_1^2}{5c}$，$h_*$ 与c同号。表1说明了参数间关系，+、−分别表示大于、小于零(下同)。

Table 1. Relationship of parameters with $\alpha=\alpha_0$ ($\Delta_x=0$)

表 1. $\alpha=\alpha_0$ ($\Delta_x=0$)时参数间关系

c	C_1	α	E_*位置	h_*
+	+	−	负x轴	−
+	−	+	正x轴	−
−	+	−	正x轴	+
−	−	+	负x轴	+

图3则给出了 $\alpha=\alpha_0$ ($\Delta_x=0$)时的四种轨线图。

3.3. 情形 2：$\Delta_x>0$

由Sylvester结式知轨线经过平衡点时的临界值h满足方程

$$R_{x_*}(f,f_h)=\frac{\alpha^3}{1944000}\left[-\frac{125}{16}\alpha^2h^4+\frac{75}{2}C_1c^2\alpha h^2+\left(320C_1^3c\alpha+c^5\right)h+\left(\frac{3072}{5}C_1^5\alpha+3C_1^2c^4\right)\right]=0,\tag{7}$$

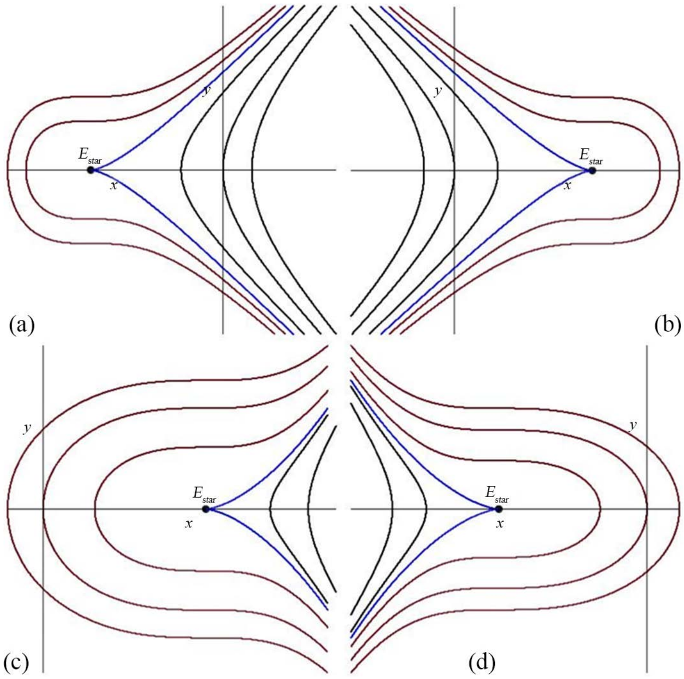

Figure 3. Trajectories with $\alpha = \alpha_0$ ($\Delta_x = 0$): (a) $c, C_1 > 0$; (b) $c > 0, C_1 < 0$; (c) $c < 0, C_1 > 0$; (d) $c, C_1 < 0$

图 3. $\alpha = \alpha_0$ ($\Delta_x = 0$)时轨线：(a) $c, C_1 > 0$；(b) $c > 0, C_1 < 0$；(c) $c < 0, C_1 > 0$；(d) $c, C_1 < 0$

相应的判别式为 $\Delta_h = \dfrac{\alpha^{52}}{M_\Delta}\left(256C_1^3\alpha - c^4\right)^2\left(64C_1^3\alpha + c^4\right)^3 \ge 0$，其中正数

$$M_\Delta = 632688466200978010631161657879326901519002365853696000000000000\text{。}$$

当 $\alpha = \alpha_1 := \dfrac{c^4}{256C_1^3}$ 时 $\Delta_h = 0$，方程 $R_{x*}\left(f, f_h\right) = 0$ 有三个实根，因判别式 $A_h = \dfrac{c^{76}}{M_A C_1^{52}} > 0$，$B_h = \dfrac{c^{114}}{M_B C_1^{78}} > 0$，$C_h = \dfrac{c^{152}}{M_C C_1^{104}} > 0$，其中正数

$$M_A = 3623780345657850005644790908754083620719987184324962785689600000,$$

$$\begin{aligned}M_B = {} & 68983114411677238344661429879743499255523000100797245410360614534 \\ & 56294006942750363090944000000,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_C = {} & 525271359743045074650409252939292990280578433510056992259425731596 \\ & 08449221340580454007933867026008065023779594190192640000000000.\end{aligned}$$

但一个二重实根 $h_3 = -\dfrac{96C_1^2}{5c}$ 为增根，两个一重实根 $h_1 = \dfrac{32\left(3-2\sqrt{2}\right)C_1^2}{5c}$ 和 $h_2 = \dfrac{32\left(3+2\sqrt{2}\right)C_1^2}{5c}$ 分别对应平衡点 $E_\alpha^{(1)} = \left(\dfrac{4\left(1-\sqrt{3}\right)C_1}{c}, 0\right)$ 和 $E_\alpha^{(2)} = \left(\dfrac{4\left(1+\sqrt{3}\right)C_1}{c}, 0\right)$，相应平衡点处Jacobi矩阵的行列式分别为 $\det J\left(E_\alpha^{(1)}\right) = \dfrac{1}{2}c\left(1-\sqrt{3}\right)$ 和 $\det J\left(E_\alpha^{(2)}\right) = \dfrac{1}{2}c\left(1+\sqrt{3}\right)$。表2说明了 $\alpha = \alpha_1$ 时参数间关系。

Table 2. Relationship of parameters with $\alpha = \alpha_1$

表 2. $\alpha = \alpha_1$ 时参数间关系

c	C_1	α_1	$E_\alpha^{(1)}$ 类型及位置	$E_\alpha^{(2)}$ 类型及位置	h_1	h_2	h_3	h_k 大小关系
+	+	+	鞍点，负x轴	中心，正x轴	−	+	−	$h_3 < h_1 < 0 < h_2$
+	−	−	鞍点，正x轴	中心，负x轴	−	+	−	$h_3 < h_1 < 0 < h_2$
−	+	+	中心，正x轴	鞍点，负x轴	+	−	+	$h_2 < 0 < h_1 < h_3$
−	−	−	中心，负x轴	鞍点，正x轴	+	−	+	$h_2 < 0 < h_1 < h_3$

当 $\alpha \ne \alpha_1$ 时 h_3 不存在，方程 $R_{x_*}(f, f_h) = 0$ 仅有两个实根。引入变换 $x = \sqrt[3]{\frac{c}{\alpha}}z$，方程 $f(x) = 0$ 化简为

$$f_1(z) = \frac{1}{3}z - \frac{1}{12}z^4 + \sqrt[3]{\frac{C_1^3\alpha}{c^4}} = 0, \tag{8}$$

显然 $f_1(z) = 0$ 有两个实根 $z_*^{(1)} < 1$ 和 $z_*^{(2)} > 1$，即有 $x_*^{(k)} = z_*^{(k)}$，$k = 1,2$。由Jacobi矩阵的行列式 $\det J\left(E_*^{(k)}\right) = \frac{1}{3}\alpha\left[\left(x_*^{(k)}\right)^3 - \frac{c}{\alpha}\right]$ 可知平衡点 $E_*^{(k)}$ 的类型，$k = 1,2$，另见表3。当然，利用 $f'\left(x_*^{(k)}\right)$ 的符号也可说明。再考虑轨线过平衡点 $E_*^{(k)}$ 时的临界值 h_k，简记 $x_k = x_*^{(k)}$ 和 $z_k = z_*^{(k)}$，$k = 1,2$，作差有 $h_k - h_l = \frac{c^{\frac{4}{3}}}{\alpha^{\frac{1}{3}}}(x_k - x_l)g(z_k, z_l)$，其中对称函数

$$g(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{-1}{30}\left(\lambda_1^3\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2^3\right) + \frac{1}{20}\left(\lambda_1^4 + \lambda_2^4\right) = \frac{1}{60}(\lambda_1 - \lambda_2)^2\left[(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 2\left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2\right)^2 + \frac{3}{2}\lambda_2^2\right]$$
$$> 0, \lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1,$$

可得 h_1 和 h_2 的大小关系，见表3 (同表2)。图4给出了 $\Delta_x > 0$ 时四种轨线图。

Table 3. Relationship of parameters with $\Delta_x > 0$ and $\alpha \ne \alpha_1$

表 3. $\Delta_x > 0$ 且 $\alpha \ne \alpha_1$ 时参数关系

α	c	$E_*^{(1)}$ 类型	$E_*^{(2)}$ 类型	$x_*^{(1)}$ 和 $x_*^{(2)}$	h_1 和 h_2
+	+	鞍点	中心	$x_*^{(1)} < \sqrt[3]{\frac{c}{\alpha}} < x_*^{(2)}$	$h_1 < h_2$
+	−	中心	鞍点	$x_*^{(2)} < \sqrt[3]{\frac{c}{\alpha}} < x_*^{(1)}$	$h_2 < h_1$
−	+	鞍点	中心	$x_*^{(2)} < \sqrt[3]{\frac{c}{\alpha}} < x_*^{(1)}$	$h_1 < h_2$
−	−	中心	鞍点	$x_*^{(1)} < \sqrt[3]{\frac{c}{\alpha}} < x_*^{(2)}$	$h_2 < h_1$

3.4. 情形 3：$\Delta_x < 0$

显然 $\alpha C_1 < 0$。当 $\alpha > 0$ (或 $\alpha < 0$)时轨线开口向左(或右)，每支轨线的定义区间为 $(-\infty, x_h)$ (或 $(x_h, +\infty)$)，且唯一的 x_h 随 h 增大而增大(或减小)，而行波解是无界的。图5给出了 $\Delta_x < 0$ 时两种轨线图。

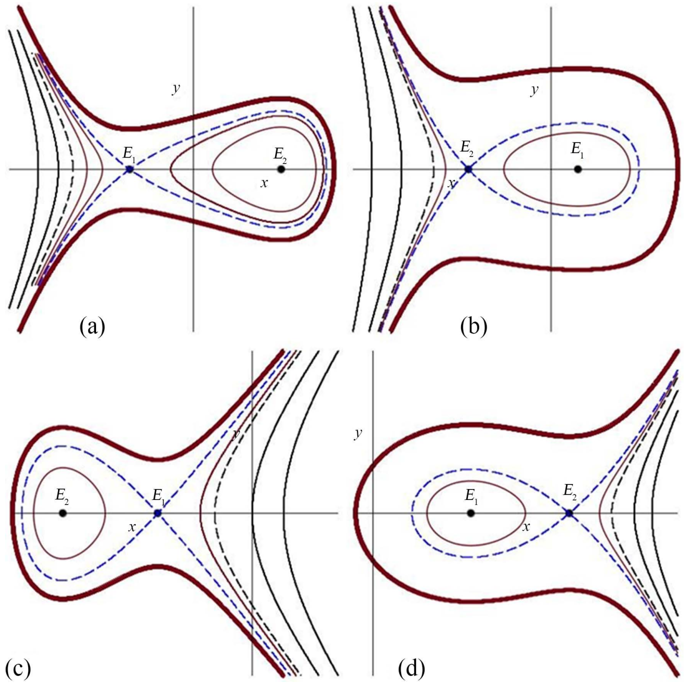

Figure 4. Trajectories with $\Delta_x > 0$: (a) $c, C_1 > 0$; (b) $c > 0, C_1 < 0$; (c) $c < 0, C_1 > 0$; (d) $c, C_1 < 0$

图 4. $\Delta_x > 0$ 时轨线图：(a) $c, C_1 > 0$ ；(b) $c > 0, C_1 < 0$ ；(c) $c < 0, C_1 > 0$ ；(d) $c, C_1 < 0$

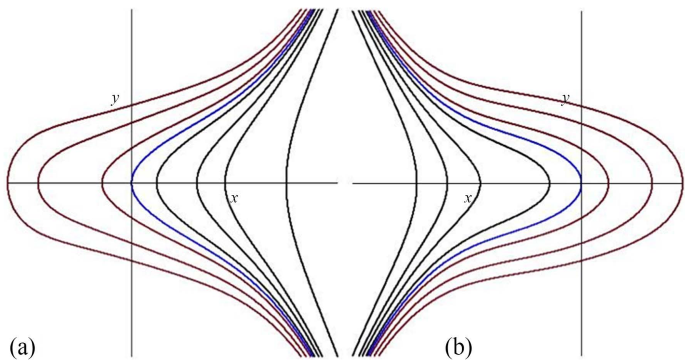

Figure 5. Trajectories with $\Delta_x < 0$: (a) $\alpha < 0$; (b) $\alpha > 0$

图 5. $\Delta_x < 0$ 时轨线：(a) $\alpha < 0$ ；(b) $\alpha > 0$

4. 行波解和对称

4.1. 行波解的分类及形式

为方便讨论行波解的形式，取变换 $x = \frac{w}{\lambda}$ ，$\lambda = -\sqrt[3]{\frac{\alpha}{30}}$ ，由 $H(x, y) = h$ 可得标准形式

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int^w \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{F(z)}}, \quad F(w) = w^5 + \frac{1}{3}w^2 + 2C_1\lambda w - \lambda^2 h, \tag{9}$$

其中 ξ_0 是积分常数。根据五阶多项式完全判别系统法[21]，引入判别式

$$D_2 = 0\text{，}\quad D_3 = -5c^2\text{，}\quad D_4 = -\frac{1}{3}c^4 - \frac{20}{3}cC_1\alpha h - \frac{128}{3}C_1^3\alpha\text{，}$$

$$D_5 = -\frac{1}{5400}\left(49152C_1^2\alpha + 25600C_1^3\alpha ch + 240C_1^2c^4 + 3000C_1\alpha c^2h^2 - 625\alpha^2h^4 + 80c^5h\right)\cdot\sqrt[3]{30\alpha^2}\text{，}$$

$$E_2 = \frac{5}{6}c^2\left(16C_1^2 + 5ch\right)\cdot\sqrt[3]{30\alpha^2}\text{，}\quad F_2 = \frac{1}{3}c^2\text{，}$$

可对行波解作分类并形式上给出解。

情形 1： $D_5 = D_4 = 0$，$D_3 < 0$，$E_2 \neq 0$。

这种情形存在，例如取 $h = -\frac{96C_1^2}{5c}$，$\alpha = \frac{c^4}{256C_1^3}$。此时 $F(w) = (w-a)\left(w^2 + rw + s\right)^2$，其中 $a = -\frac{2}{15}\cdot\sqrt[3]{225c}$，$r = -\frac{1}{15}\cdot\sqrt[3]{225c}$，$s = \frac{1}{150}(225c)^{\frac{2}{3}}$。当 $w > a$ 时行波解的形式为

$$\pm(\xi - \xi_0) = -\frac{2}{\rho\sqrt{4s - r^2}}\left(\cos\varphi\cdot\arctan\frac{2\rho\sin\varphi\sqrt{w-a}}{w-a-\rho^2} + \frac{\sin\varphi}{2}\cdot\ln\frac{w-a-\rho^2-2\rho\cos\varphi\sqrt{w-a}}{w-a-\rho^2+2\rho\cos\varphi\sqrt{w-a}}\right)\text{，}\tag{10}$$

其中 $\rho = \left(a^2 + ra + s\right)^{\frac{1}{4}}$，$\varphi = \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{4s-r^2}}{-2a-r}$。

情形 2： $D_5 = D_4 = E_2 = 0$，$D_3 < 0$。

此即为 $\Delta_x = 0$ 或 $\alpha = \alpha_0$ 的情形，且 $F(w) = (w-a)^3\left[(w-l_1)^2 + s_1^2\right]$，其中 $a = -\sqrt[3]{\frac{c}{30}}$，$l_1 = \frac{1}{20}\cdot\sqrt[3]{30^2c}$，$s_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{30c}}$。当 $w > a$ 时，行波解的形式为

$$\begin{aligned}\pm(\xi - \xi_0) = &-\frac{\tan\theta + \cot\theta}{2\left(s_1\tan\theta - l_1 - a\right)\sqrt{\frac{s_1}{\sin^3 2\theta}}}F(\varphi,k) - \frac{s_1(\tan\theta + \cot\theta)}{s_1\cot\theta + l_1 + a}\\ &\times\left[\frac{\tan\theta + l_1 + a}{\left(s_1\cot\theta + l_1 - a\right)\sin\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + F(\varphi,k) - E(\varphi,k)\right]\text{，}\end{aligned}\tag{11}$$

其中 $\tan 2\theta = \frac{s_1}{a - l_1}$，$k = \sin\theta$，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，辅助函数 $F(\varphi,k) = \int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}$，$E(\varphi,k) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\,\mathrm{d}\psi$。

情形 3： $D_5 = 0$，$D_4 < 0$。

这种情形存在，例如取 $h = 0$，$\alpha = -\frac{5c^4}{1024C_1^3}$。此时 $F(w) = (w-a)(w-\beta)\left[(w-l_1)^2 + s_1^2\right]$，$a$，$\beta$，$l_1$ 及 s_1 是实数。当 $w > \beta$ 时，如果 $a \neq l_1 - s_1\tan\theta$ 且 $a \neq l_1 + s_1\tan\theta$，则行波解的形式为

$$\begin{aligned}\pm(\xi - \xi_0) = &-\frac{\tan\theta + \cot\theta}{2\left(s_1\tan\theta - l_1 - a\right)\sqrt{\frac{s_1}{\sin^3 2\theta}}}F(\varphi,k) - \frac{s_1(\tan\theta + \cot\theta)}{s_1\cot\theta + l_1 + a}\\ &\times\left[\frac{\tan\theta + l_1 + a}{\left(s_1\cot\theta + l_1 - a\right)\sin\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + F(\varphi,k) - E(\varphi,k)\right]\text{；}\end{aligned}\tag{12a}$$

如果 $a = l_1 - s_1\tan\theta$，则行波解的形式为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\sqrt{\frac{\sin^3 2\theta}{4s^3}}\left[\frac{1}{k}\arcsin(k\sin\varphi)-F(\varphi,k)\right];\tag{12b}$$

如果 $a=l_1+s_1\tan\theta$，则行波解的形式为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\sqrt{\frac{\sin^3 2\theta}{4s^3}}\left[F(\varphi,k)-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+\sqrt{1-k^2}\sin\varphi}{\cos\varphi}\right]。\tag{12c}$$

其中 $\tan 2\theta=\frac{s_1}{\beta-l_1}$， $k=\sin\theta$， $0<\theta<\frac{\pi}{2}$。

情形 4： $D_5<0$。

这种情形存在，例如取 $h=0$，$\alpha=\frac{C_1^3}{c^4}$。此时 $F(w)=(w-a_1)(w-a_2)(w-a_3)\left[(w-l_1)^2+s_1^2\right]$，其中 a_1，a_2， a_3， l_1 及 s_1 是实数，行波解的形式为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int^w\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\left[(z-l_1)^2+s_1^2\right]}}。\tag{13}$$

情形 5： $D_5>0$， $D_3<0$， $D_2=0$。

这种情形存在，例如取 $h=0$， $\alpha=-\frac{c^4}{C_1^3}$。此时 $F(w)=(w-a)\left[(w-l_1)^2+s_1^2\right]\left[(w-l_2)^2+s_2^2\right]$，$a$，$l_1$，$s_1$， l_2 及 s_2 是实数，行波解的形式为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int^w\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(z-a)\left[(z-l_1)^2+s_1^2\right]\left[(z-l_2)^2+s_2^2\right]}}。\tag{14}$$

注意， $D_5=0$ 且 $D_4>0$ 的情形不存在，因要求 $h\neq 0$， 否则 $h=0$ 时退化为情形3。当 $C_1=0$ 时，仅有情形3、情形4和情形5成立，因 $D_4=-\frac{1}{3}c^4<0$。总之，行波解的形式由上述五类情形所规定。

4.2. 对称

引入变换 $u\to u+\varepsilon\sigma$， ε 充分小，原方程的对称 σ 应满足方程

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\hat{K}(u+\varepsilon\sigma)\Big|_{\varepsilon=0}=\sigma_t+\alpha\left(u^3\sigma+\Delta\sigma\right)_x=0,\tag{15}$$

其中算子 $\hat{K}$ 定义为 $\hat{K}(u)=u_t+\alpha u^3u_x+(\Delta u)_x$。同上，考虑行波解 $\sigma=\sigma(\xi)$，并引入mapping and deformation关系[22] $\sigma=\Sigma(u)$，方程(15)可化为三阶ODE

$$F(u)\frac{\mathrm{d}^3\Sigma(u)}{\mathrm{d}u^3}+3f(u)\frac{\mathrm{d}^2\Sigma(u)}{\mathrm{d}u^2}+\alpha u^2\Sigma(u)=0,\tag{16}$$

其中辅助函数 $F(u)=H(u,0)-h=\frac{1}{3}cu-\frac{\alpha}{30}u^5+2C_1u-h$。上述常微分方程的通解形式为

$$\sigma(u)=\sqrt{F(u)}\left\{R_1+\int^u\frac{R_2z+R_3}{F^{\frac{3}{2}}(z)}\mathrm{d}z\right\},\tag{17}$$

其中 R_1、 R_2 和 R_3 是积分常数，而u是原方程(4)的行波解。因此有了以上行波解的分类工作，理论上是可以得到相应的对称 σ。

4.3. 近似解

Runge-Kutta法可以给出解的数值结果，但无法给出解的表达式；尽管同伦微扰法(HPM) [23]和Adomian分解法(ADM) [24] [25] [26] [27]可以给出近似解的幂级数表达式，对于结点情形尚可以采用，但收敛速度较慢，特别是在周期解情形，而一个物理系统中又常常考虑有界的行波解。给定初值 $x(\xi)=x_0$，$y(\xi)=y_0$，对于系统(5)，按文[28]，由HPM和ADM给出的前五阶近似解为

$$\begin{aligned}x(\xi)\approx{}& x_0+y_0\xi+\frac{1}{24}\left(-\alpha x_0^4+4cx_0+12C_1\right)\xi^2+\frac{1}{18}y_0\left(-\alpha x_0^3+c\right)\xi^3\\&+\frac{1}{4320}\left(5\alpha^2x_0^7-25\alpha cx_0^7-60C_1\alpha x_0^3-180\alpha x_0^2y_0^2+20c^2x_0+60C_1c\right)\xi^4\\&+\frac{1}{1080}\left(\frac{13}{4}\alpha^2x_0^2-11\alpha cx_0^3-27C_1\alpha x_0^2-18\alpha x_0y_0^2+c^2\right)\xi^5,\end{aligned}\tag{18a}$$

$$\begin{aligned}y(\xi)\approx{}& y_0+\frac{1}{12}\left(-\alpha x_0^4+4cx_0+12C_1\right)\xi+\frac{1}{6}\left(-\alpha x_0^3+c\right)y_0\xi^2\\&+\frac{1}{216}\left(\alpha^2x_0^7-5\alpha cx_0^4-12C_1\alpha x_0^3-36\alpha x_0^2y_0^2+4c^2x_0+12C_1c\right)\xi^3\\&+\frac{1}{216}\left(\frac{13}{4}\alpha^2x_0^6-11\alpha cx_0^3-27C_1\alpha x_0^2-18\alpha x_0y_0^2+c^2\right)y_0\xi^4\\&+\frac{1}{51840}\Big[-13\alpha^3x_0^{10}+96\alpha^2cx_0^7+264\alpha^2cx_0^6+1152\alpha^2x_0^5y_0^2\\&+-180\alpha c^2x_0^4-960\alpha cC_1x_0^3-2448\alpha\left(cy_0^2+\frac{9}{17}C_1^2\right)x_0^2\Big]\\&+\left(-5184C_1\alpha y_0^2+16c^3\right)x_0-864\alpha y_0^4+48C_1c^2\Big]\xi^5.\end{aligned}\tag{18b}$$

当然，也可用幂级数展开法得到上述结果。以 $\Delta_x>0$， $c=\alpha=C_1=1$， $x_0=y_0=0.1$ 为例，图6将这两种方法所得近似解与Runge-Kutta 45法进行比较，结果表明当 ξ 比较小时，近似可以接受。

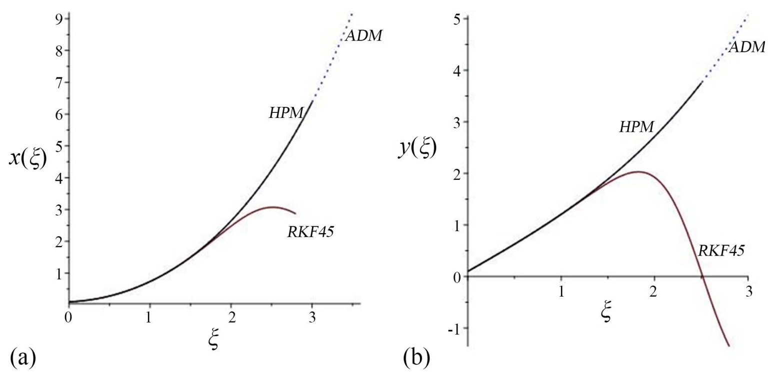

Figure 6. Approximate solutions via HPM (black solid line), ADM (black dot line) and Runge-Kutta 45 method (red solid line): (a) $x(\xi)$; (b) $y(\xi)$

图6. 同伦微扰法(黑色实线)、Adomian分解法(黑色点线)与Runge-Kutta 45法(红色实线)所得近似解：(a) $x(\xi)$；(b) $y(\xi)$

鉴于行波解的表达式如此复杂，以及ADM和HPM的局限性，参照文[29] [30]，这里给出相应多模态近似解的计算方法。仍以上述 $c=\alpha=C_1=1$ 为例，取多模态近似解 $x(t)=a_0+a_1\cos(2wt)+a_2\cos(4wt)$，其中 w 为频率， $f=\dfrac{1}{w}$ 。与文[16] [29] [30]不同，在一个周期 $T=\dfrac{2\pi}{w}$ 上对Hamilton函数 $H(x,y)$ 积分有

$\bar{H}=\int_0^T H(x,y)\mathrm{d}t=0$，即可得耦合代数方程组

$$\frac{\partial}{\partial a_0}\bar{H}:8a_0^2+24a_0^2a_1^2+24a_0^2a_2^2+24a_0a_1^2a_2+3a_1^4+12a_1^2a_2^2+3a_2^4-32a_0-96=0\text{，}\tag{19a}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\bar{H}:-12+\left[\frac{3}{8}a_2^2+\frac{3}{2}a_0a_2^2+\left(\frac{3}{2}a_0^2+\frac{1}{2}a_1^2\right)a_2+a_0^3+\frac{3}{4}a_0a_1^2-1\right]f^2=0\text{，}\tag{19b}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2}\bar{H}:\left[\frac{3}{4}a_0a_2^2+\frac{9}{16}a_1^2a_2^2+\left(a_0^3+\frac{3}{2}a_0a_1^2-1\right)a_2+\frac{3}{4}a_0^2a_1^2+\frac{1}{8}a_1^4\right]f^2-48a_2=0\text{。}\tag{19c}$$

结合初始条件 $x(0)=1$ 有解 $f\approx1.358874058$，$a_0\approx1.795811040$，$a_1\approx-0.9048387263$ 及 $a_2\approx0.1090276862$。图7(a)刻画了近似解(黑色实线)与实际解(红色点线)的近似程度，在前几个周期内两者非常吻合；图7(b)刻画了所得近似轨线(黑线)与实际周期轨(红线)之间的近似程度，近似程度很好。总之，这是一种有效的近似求解方法。类似的，理论上可以作出其它情形下的近似周期解。

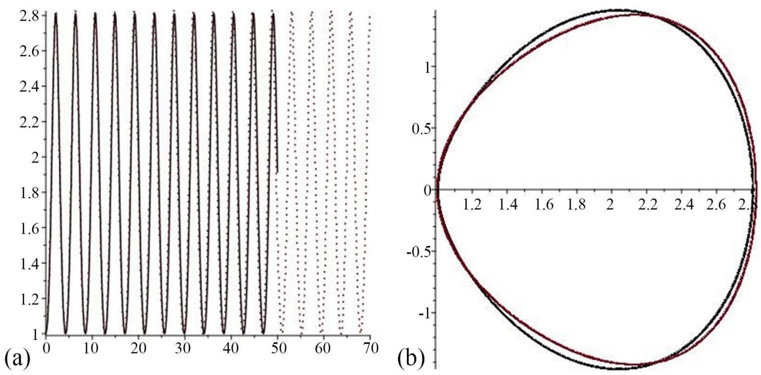

Figure 7. (a) Multimode approximate solution (black solid line); (b) periodic trajectory via multimode approximate solution (black line)
图 7. (a) 多模态近似解(黑色实线)；(b) 由多模态近似解所得周期轨(黑线)

5. 幂律 n ZK 方程的行波解

结合前几节的结果，类似于 $C_1=0$ 时数形结合法对平衡点个数的讨论，本节研究幂律 n ZK 方程(2)及行波解对应的系统

$$x'=y\text{，}\quad y'=\frac{1}{3}cx-\frac{\alpha}{3(n+1)}x^{n+1}+C_1:=f(x)\text{。}\tag{20}$$

首先考虑n为奇数情形。当 $\Delta_n:=\alpha^{n+1}\left\{\alpha C_1^n+\left[\frac{n}{3(n+1)}\right]^n c^{n+1}\right\}>0$ 时，有2个平衡点 $E_*^{(k)}=\left(x_*^{(k)},0\right)$，$x_*^{(1)}<x_n$，$x_*^{(2)}>x_n$。结合 $f'\left(x_*^{(k)}\right)$ 的符号知：若 $\alpha>0$，则 $E_*^{(1)}$ 是鞍点，$E_*^{(2)}$ 是中心；若 $\alpha<0$，则 $E_*^{(1)}$ 是中心，$E_*^{(2)}$ 是鞍点。当 $\Delta_n=0$ 时，只有1个高阶奇点 $E_*=\left(\sqrt[n]{\frac{c}{\alpha}},0\right)$，因 $\det J(E_*)=0$，同样是余维至少为4的尖点。当 $\Delta_n<0$ 时，没有平衡点。这样，平衡点可有0个、1个或2个。

再考虑n为偶数情形。同上，如果 $\alpha c<0$，则仅有一个平衡点，因 $f_0'(x)$ 的单调性。如果 $\alpha c>0$，则：当 $\Delta_n=\alpha^{n+1}\left\{\alpha C_1^n-\left[\frac{n}{3(n+1)}\right]^n c^{n+1}\right\}<0$ 时，平衡点有3个；当 $\Delta_n=0$ 时，平衡点有2个；当 $\Delta_n>0$ 时，平

衡点仅有1个。注意，$\alpha c<0$ 的情形包含在 $\Delta_n>0$ 的情形中。显然，可结合 $f'\left(x_*^{(k)}\right)$ 的符号得到平衡点的类型(鞍点、中心或尖点)，总结如下，与文[16]一致。

当 $\Delta_n>0$ 时，若 $\alpha>0$，则唯一的平衡点 E_* 是中心；反之，$\alpha<0$ 时 E_* 是鞍点。

当 $\Delta_n<0$ 时，设三个平衡点为 $E_*^{(k)}$，$k=1,2,3$，$x_*^{(1)}<x_*^{(2)}<x_*^{(3)}$。若 $\alpha>0$ （α、c同号），则 $E_*^{(1)}$、$E_*^{(3)}$ 是中心，而 $E_*^{(2)}$ 是鞍点；若 $\alpha<0$，则 $E_*^{(1)}$、$E_*^{(3)}$ 是鞍点，而 $E_*^{(2)}$ 是中心。

当 $\Delta_n=0$ 时，设双曲平衡点为 E_*^H，退化平衡点为 $E_*^D=\left(x_n^{(k)},0\right)$，$k=1$ 或2，$x_n^{(1)}=-\sqrt[n]{\dfrac{c}{\alpha}}$，$x_n^{(2)}=\sqrt[n]{\dfrac{c}{\alpha}}$，同上 E_*^D 是余维至少为4的尖点；而 $\alpha>0$ （α、c同号)时 E_*^H 是中心，反之，$\alpha<0$ 时 E_*^H 是鞍点。总之，平衡点可有 1 个、2 个或 3 个。图 8 描述了 $n=2$ 时利用数形结合法对平衡点个数的分析。

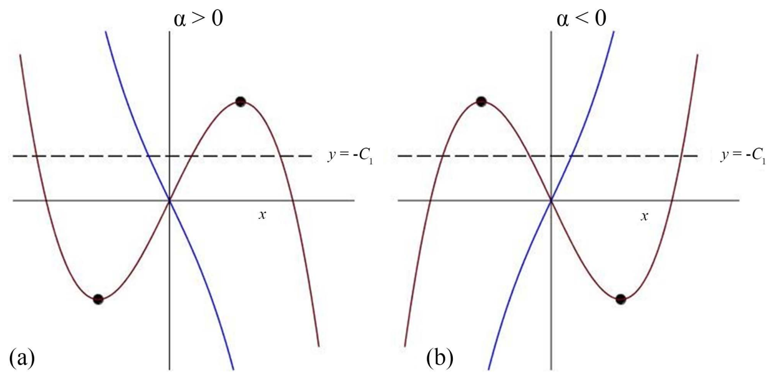

Figure 8. Analysis of number of equilibria with $n=2$: (a) $\alpha>0$; (b) $\alpha<0$

图 8. $n=2$ **时平衡点个数分析**：(a) $\alpha>0$；(b) $\alpha<0$

此外，可以得到首次积分 $H(x,y)=\dfrac{1}{3}cx^2-\dfrac{2\alpha}{3(n+1)(n+2)}x^{n+2}+2C_1x-y^2=const.$，当然，理论上也可使用除法定理获得，例如 $n=4$ 时取 $m=2$，$H=\sum_{k=0}^{m}a_k(x)y^k$ 有 $H=\dfrac{1}{45}a_2\left(\alpha x^6-15cx^2-90C_1x+45y^2\right)+A_0$，其中 a_2 和 A_0 均为待定常数。这样，轨线经过平衡点 $E(x_*,0)$ 时临界值h由方程组 $f(x_*)=0$，$f_h(x_*)=H(x_*,0)-h=0$ 决定，即临界值满足$(n+1)$次代数方程

$$R_{x_*}(f,f_h)=\begin{vmatrix} \frac{-\alpha}{3(n+1)} & 0 & \cdots & \frac{c}{3} & C_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha}{3(n+1)} & \cdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & \frac{c}{3} & C_1 \\ \frac{-2\alpha}{3(n+1)(n+2)} & 0 & \cdots & 2C_1 & -h & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{-2\alpha}{3(n+1)(n+2)} & \cdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & -h & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 2C_1 & -h \end{vmatrix} \tag{21}$$
$$=a_{n+1}h^{n+1}+\cdots+a_1h+a_0=0,$$

其中 $a_{n+1}=-\left(\dfrac{\alpha}{3(n+1)}\right)^{n+2}$，$a_0=R_{x_*}\left(f,f_h\big|_{h=0}\right)$，而行列式是 $2n+3$ 阶的。再结合高阶多项式完全判别系统法，理论上可说明h的实根情况及相应轨线的拓扑结构。同时，方程 $R_{x_*}\left(f,f_h\right)=0$ 的实根个数不少于方程 $f(x)=0$ 的实根个数，这也启发我们思考如下结论：

对于连续函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$，若连续的轨线族 $H(x,y)=h$ 由微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{f(x,y)}=\dfrac{\mathrm{d}y}{g(x,y)}$ 给出，h 为实数，关于参数h的方程 $\varphi(h)=0$ 由方程组 $f(x,y)=g(x,y)=H(x,y)-h=0$ 所确定，则方程 $\varphi(h)=0$ 的实根个数(重根按单重根计算)不少于方程 $f(x,y)=g(x,y)=0$ 的实根个数？除去 $\varphi(h)=0$ 的增根，两者的“剩余”实根个数是否相等(存在“剩余”实根间的一一映射)？

例如，对于实数域上的多项式 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ 和 $f_h(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{a_k}{k+1}x^{k+1}-h$，$a_n\neq 0$，$n$为正整数，$h$为实数，则需要考虑“结式方程” $R_x\left(f,f_h\right)=0$ 和方程 $f(x)=0$ 的实根情况。

因此，在给定参数条件下，可获得相图分支及光滑孤立波解、周期波解的存在性定理，详述如下。

定理1：当n为奇数，$\Delta_n>0$，$\alpha>0$ (或 $\alpha<0$)时，对应系统(20)连接鞍点 $E_*^{(1)}$ (或 $E_*^{(2)}$)的同宿轨道 $H(x,y)=h_1$ (或 $H(x,y)=h_2$)，方程(2)有一个光滑孤立波解；对应系统(20)的周期轨道 $H(x,y)=h$，h位于 h_1 和 h_2 之间，方程(2)有一族周期波解。

定理2：当n为偶数，$\Delta_n<0$，$\alpha<0$ 时，对应系统(20)连接鞍点 $E_*^{(1)}$ 和 $E_*^{(3)}$ 的异宿轨道 $H(x,y)=h$，方程(2)有一个扭(反扭)波解；对应系统(20)的周期轨道 $H(x,y)=h$，h位于 h_1 (或 h_3)和 h_2 之间，方程(2)有一族周期波解。

定理3：当n为偶数，$\Delta_n<0$，$\alpha>0$ 时，对应系统(20)连接鞍点 $E_*^{(2)}$ 的同宿轨道 $H(x,y)=h_2$，方程(2)有两个光滑孤立波解；对应系统(20)环绕平衡点 $E_*^{(1)}$、$E_*^{(2)}$ 和 $E_*^{(3)}$ 的大范围周期轨道 $H(x,y)=h$，$h\neq h_2$，方程(2)有一族周期波解；对应系统(20)分别环绕中心 $E_*^{(1)}$ 和 $E_*^{(3)}$ 的两族周期轨道 $H(x,y)=h$，h分别位于 h_1 和 h_2 及 h_2 和 h_3 之间，方程(2)有两族周期波解。

定理4：当n为偶数，$\Delta_n>0$，$\alpha>0$ 时，对应系统(20)的周期轨道 $H(x,y)=h$，$h\neq h_*$，方程(2)有一族周期波解。

最后，原方程(2)的对称 σ 应满足方程

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\hat{K}(u+\varepsilon\sigma)\bigg|_{\varepsilon=0}=\sigma_t+\alpha\left(u^n\sigma+\Delta\sigma\right)_x=0, \tag{22}$$

类似的，引入关系 $\sigma=\Sigma(u)$ 后，其一般的表达式同(17)，但

$F(u)=H(u,0)-h=\dfrac{1}{3}cu-\dfrac{2\alpha}{3(n+1)(n+2)}u^{n+2}+2C_1u-h$，而$u$是原方程(2)的行波解。

6. 总结与讨论

文[16]的工作隐含了特征为0的实数域**R**上椭圆曲线 $y^2=ax^3+bx^2+cx+d$ 的若干思考。结合文[6] [7] [16]，本文整体上定性分析了幂律n ($n\geq 2$ 且为正整数)ZK方程行波解及其性质，对于其它非线性偏微分方程的研究具有一定参考意义，如(2 + 1)维广义Zakharov-Kuznetsovmodifiedequal-width (ZK-MEW)方程[31]

$$u_t+a\left(u^n\right)_x+\left(bu_{xt}+cu_{yy}\right)_x=0。$$

致 谢

感谢编辑和审稿人的工作，感谢温州大学赵敏老师和戴传军老师，感谢乐清市柳市镇第三中学郑孟老师和赵淑静老师，感谢乐清市城南中学陈谱锦老师。

参考文献

[1] 李康, 刘希强. (2+1)维扩展 Zakharov-Kuznetsov 方程的对称、约化和精确解[J]. 井冈山大学学报(自然科学版), 2015, 36(3): 29-33.

[2] Mohammed, K.E. (2015) Deriving the New Traveling Wave Solutions for the Nonlinear Dispersive Equation, KdV-ZK Equation and Complex Coupled KdV System Using Extended Simplest Equation Method. *Communications in Theoretical Physics*, **64**, 379-390. https://doi.org/10.1088/0253-6102/64/4/379

[3] 傅海明, 戴正德. Zakharov-Kuznetsov 方程的新精确解[J]. 周口师范学院学报, 2013, 30(5): 4-7.

[4] Dong, Z.Z., Chen, Y. and Lang, Y.H. (2010) Symmetry Reduction and Exact Solutions of the (3+1)-Dimensional Zakharov-Kuznetsov Equation. *Chinese Physics B*, **19**, Article ID: 090205. https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/9/090205

[5] 崔艳英, 吕大昭, 刘长河. (3+1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的 Wronskian 形式解[J]. 北京建筑工程学院学报, 2012, 28(2): 68-71.

[6] 韦丽. 具有幂律非线性的(3+1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的行波解[J]. 应用数学进展, 2020, 9(9): 1426-1435.

[7] Wei, L. and Ren, M.R. (2019) Bounded Traveling Wave Solutions of the (3+1)-Dimensional Zakharov-Kuznetsov Equation with Power Law Nonlinearity. *Scholars Journal of Physics*, *Mathematics and Statistics*, **7**, 99-103. https://doi.org/10.36347/sjpms.2020.v07i07.004

[8] Moslem, W.M., Ali, S., Shukla, P.K., *et al*. (2007) Solitary, Explosive, and Periodic Solutions of the Quantum Zakharov-Kuznetsov Equation and Its Transverse Instability. *Physics of Plasmas*, **14**, Article ID: 082308. https://doi.org/10.1063/1.2757612

[9] Lu, D.C., Seadawy, A.R., Arshad, M., *et al*. (2017) New Solitary Wave Solutions of (3+1)-Dimensional Nonlinear Extended Zakharov-Kuznetsov and Modified KdV-Zakharov-Kuznetsov Equations and Their Applications. *Results in Physics*, **7**, 899-909. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2017.02.002

[10] 黄欣. 首次积分法下高维非线性偏微分方程新的行波解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2014, 37(3): 312-315.

[11] Li, H., Sun, S.R. and Wang, K.M. (2011) Bifurcations of Traveling Wave Solutions for the Generalized Zakharov-Kuznetsov Equation. 2011 *IEEE International Conference on Intelligent Computing and Intelligent Systems*, Vol. 1, 102-107. https://doi.org/10.1109/ICMT.2011.6002021

[12] Zhang, W.B. and Zhou, J.B. (2012) Traveling Wave Solutions of a Generalized Zakharov-Kuznetsov Equation. *ISRN Mathematical Analysis*, **2012**, Article ID: 107846. https://doi.org/10.5402/2012/107846

[13] 冯庆江, 李岩, 杨利盎. 用试探函数法求 Zakharov-Kuznetsov 方程的孤子解[J]. 长春大学学报, 2010, 20(6): 8-9.

[14] Yan, Z.L. and Liu, X.Q. (2006) Symmetry Reductions and Explicit Solutions for a Generalized Zakharov-Kuznetsov Equation. *Communications in Theoretical Physics*, **45**, 29-32. https://doi.org/10.1088/0253-6102/45/1/004

[15] 洪宝剑. KdV 方程和 Zakharov-Kuznetsov 方程新的椭圆函数解[J]. 南京工程学院学报(自然科学版), 2010, 8(1): 1-7.

[16] 王双特, 于恒国. (3+1)维修正 KdV-Zakharov-Kuznetsov 方程的行波解[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(2): 36-44.

[17] Feng, Z.S. (2002) The First Integral Method to Study the Burgers-Korteweg-de Vries Equation. *Physics Letters A*, **35**, 343-349. https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/2/312

[18] Feng, Z.S. (2003) The First Integral Method to the Two-Dimensional Burgers-Korteweg-de Vries Equation. *Physics Letters A*, **308**, 173-178. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(03)00016-1

[19] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 115-116.

[20] Huang, J.C., Gong, Y.J. and Chen, J. (2013) Multiple Bifurcations in a Predator-Prey System of Holling and Leslie Type with Constant-Yield Prey Harvesting. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **23**, Article ID: 1350164. https://doi.org/10.1142/S0218127413501642

[21] Liu, C.S. (2008) Direct Integral Method, Complete Discrimination System for Polynomial and Applications to Classifications of All Single Traveling Wave Solutions to Nonlinear Differential Equations: A Survey.

[22] Xiao, N.G. and Lou, S.Y. (2012) Bosonization of Supersymmetric KdV Equation. *Physics Letters B*, **707**, 209-215.

https://doi.org/10.1016/j.physletb.2011.12.021

[23] He, J.H. (1999) Homotopy Perturbation Technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **178**, 257-262. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00018-3

[24] Biazar, J. and Montazeri, R. (2005) A Computational Method for Solution of the Prey and Predator Problem. *Applied Mathematics and Computation*, **163**, 841-847. https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.05.001

[25] Wazwaz, A.-M. (2005) Adomian Decomposition Method for a Reliable Treatment of the Bratu-Type Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **166**, 652-663. https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.06.059

[26] Biazar, J., Babolian, E., Nouri, A. and Islam, R. (2003) An Alternate Algorithm for Computing Adomian Decomposition Method in Special Cases. *Applied Mathematics and Computation*, **138**, 523-529. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00174-1

[27] Biazar, J., Tango, M., Babolian, E. and Islam, R. (2003) Solution of the Kinetic Modeling of Lactic Acid Fermentation Using Adomian Decomposition Method. *Applied Mathematics and Computation*, **139**, 249-258. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00173-X

[28] 王双特, 于恒国. 利用同伦微扰法和 Adomian 分解法求解捕食生态模型[J]. 高师理科学刊, 2021, 41(7): 14-19.

[29] 楼智美, 王元斌, 俞立先. 一类强非线性二阶微分方程的多模态近似解析解研究[J]. 动力学与控制学报, 2019, 17(5): 463-466.

[30] Durmaz, S., Altay, D.S. and Kaya, M.O. (2010) High Order Hamiltonian Approach to Nonlinear Oscillators. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **11**, 565-570. https://doi.org/10.1515/IJNSNS.2010.11.8.565

[31] 肖军均, 冯大河, 孟霞. 广义 ZK-MEW 方程的行波解分支[J]. 桂林电子科技大学学报, 2016, 36(1): 66-70.