Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(4), 1615-1619**
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124166

关于双树度差下界的一个例子

张雅琴

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年3月24日；录用日期：2023年4月18日；发布日期：2023年4月26日

摘 要

如果图G由两个边不交的生成树的并组成，其中$E(G)=E(T_1)\cup E(T_2)$，且$E(T_1)\cap E(T_2)=\varnothing$那么称图$G$是双树。本文证明存在一个双树$G$，对于$G$任意一个分解$f=(T_1,T_2)$而言($T_1,T_2$是生成树)，至少存在一个顶点$v\in V(G)$，使得$\left|d_{T_1}(v)-d_{T_2}(v)\right|\ge 2$。

关键词

双树，分解，生成树

An Example of the Bound of Double Tree

Yaqin Zhang

School of Mathematical Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 24th, 2023; accepted: Apr. 18th, 2023; published: Apr. 26th, 2023

Abstract

If the graph G contains two spanning trees such that the edges of spanning trees are disjoint. And $E(G)=E(T_1)\cup E(T_2)$ and $E(T_1)\cap E(T_2)=\varnothing$, then we call the graph G is double tree. In this paper we prove that there exists a double tree graph G, for any decomposition $f=(T_1,T_2)$ (T_1,T_2 are spanning trees), there exists at least a vertex $v\in V(G)$ such that $\left|d_{T_1}(v)-d_{T_2}(v)\right|\ge 2$.

Keywords

Double Tree, Decomposition, Spanning Tree

文章引用: 张雅琴. 关于双树度差下界的一个例子[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1615-1619.
DOI: 10.12677/aam.2023.124166

1. 基本概念

我们首先给出图论中的一些相关概念。对于只有一个元素的集合x，我们通常用 x 来表示它。对于一个图 G，我们用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 来定义图 G 的顶点集和边集。对一些边 $e=uv\in E(G)$，我们称 u 和 v 与 e 关联或者说 e 连接 u 和 v。对于某些 $X\in V$，用 $\delta_G(X)$ 来定义一个顶点在 X 中，一个顶点在 $V(G)-X$ 中的边集，用 $d_G(X)$ 来表示为 $|\delta_G(X)|$。对一些顶点 $v\in V(G)$，我们定义图 $G-v$ 的顶点集为 $V(G-v)=V(G)-v$ 它的边集为 $E(G-v)=E(G)-\delta_G(v)$。此外对于一条新边 $e=uv\notin E(G)$，其中 $u,v\in V(G)$，我们定义 $G+v$ 的顶点集为 $V(G+e)=V(G)$ 边集为 $E(G+e)=E(G)+e$。对一条新边 $e=uv\notin E(G)$，其中 $u\in V(G)$ 但是 $v\notin V(G)$，我们定义 $G+e$ 的顶点集为 $V(G+e)=V(G)+v$ 边集为 $E(G+e)=E(G)+e$。一个图 H 被叫做是另一个图 G 的子图如果满足 $V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$。一棵树是一个连通的图且不含圈。给一个图 G，一个 G 的子图 T 被称为 G 的支撑树如果 T 是一棵树且满足 $V(T)=V(G)$。如果一个图 G 包含k个边不交的支撑树 $T_1,\cdots,T_k$ 且满足 $E(G)=E(T_1)\cup\cdots\cup E(T_k)$，$E(T_1)\cup\cdots\cup E(T_k)=\varnothing$ 我们就说 G 是一个 k 重树，并说 $T_1,\cdots,T_k$ 是 G 的支撑树分解。此外我们把 2 重树叫做双树。如果图 G 是一个双树，在图 G 上存在一个分界 $f=(T_1,T_2)$，其中 T_1,T_2 都是生成树并且 $E(T_1)\cup E(T_2)=\varnothing$。那么称这个分解 f 为图 G 的双树分解。我们可以得到双树有如下的结论。

命题 1：每个双树满足 $|E(G)|=2|V(G)|-2$。

下面的命题是我们所熟知的支撑树的交换操作。

命题 2 [1]：令 G 是一个双树，(T_1,T_2) 是 G 的支撑树分解。则存在一个函数 $\sigma:E(T_1)\to E(T_2)$ 使得 $(T_1-e+\sigma(e),T_2-\sigma(e)+e)$ 也是 G 的一个支撑树分解。

我们把如上的命题中的函数叫做从 T_1 到 T_2 的树交换函数。这个在文献[1]中已经被证明。

2022 年 8 月，学者 Florian Horsch 在文献[2]证明了对每个包含两个边不交的支撑树的图 G，我们可以选择图 G 中的一个分解 (T_1,T_2) 使得对于任意的顶点 $v\in V(G)$ 都有 $|d_{T_1}(v)-d_{T_2}(V)|\le 5$。这给出了如果图 G 可以分解成两个支撑树，那么这两个支撑树的顶点度差的上界是 5。在这个文献中学者证明了树交换函数的性质。

命题 3：令 G 是一个双树，(T_1,T_2) 是 G 的一个支撑树分解，且 $v\in V(G)$ 其中 x 关联于 T_1 中的唯一的边。则对任何树交换函数 $\sigma:E(T_1)\to E(T_2)$，我们都有 $\sigma(e)\in\delta_G(x)$。

证明：因为 $T_1-e+\sigma(e)$ 是一个 G 的支撑树，存在至少一条边 $f\in(E(T_1)-e+\sigma(e))\cap\delta_G(x)$。因为 $(E(T_1)-e)\cap\delta_G(x)=\varnothing$，我们有 $f=\sigma(e)$。

在 1961 年，在文献[3]中学者 Nash-Williams 以及在文献[4]中学者 Tutte 独立地证明了一个基本定理，该定理表征了包含固定数量的边不相交生成树的图的特征。从那以后，已经发现了几个扩展该定理的结果。例如，虽然它没有扩展到一般的无限图，但它已被学者 Lehner [5]和 Stein [6]推广到某些类的无限图。学者 Chuzoy，Parter 和 Tan [3]已经考虑了有界直径的生成树。此外，满足某种平衡条件的生成树，即删除指定的顶点不应留下包含在单个连接组件中所有顶点的图，Bang-Jensen，Havet 和 Yeo [7]以及 Bessy 等人已经进行了相关研究。在这篇文章中我们通过一个例子从而得到存在一个双树 G，对于它的任何一个分解 (T_1,T_2)，而言满足存在至少一个顶点 v 使得 $|d_{T_1}(v)-d_{T_2}(v)|\ge 2$。

2. 主要定理

本文主要证明的定理如下：存在一个双树 G，对于任何 G 的任何一个双树分解 (T_1,T_2) 而言，存在一个顶点 $v\in V(G)$，使得 $\left|d_{T_1}(v)-d_{T_2}(v)\right|\geq 2$。

3. 主要定理证明

接下来我们给出一个例子"见图 1"所示，通过对于这个例子的所有分解进行讨论，从而得到定理 1 的证明。

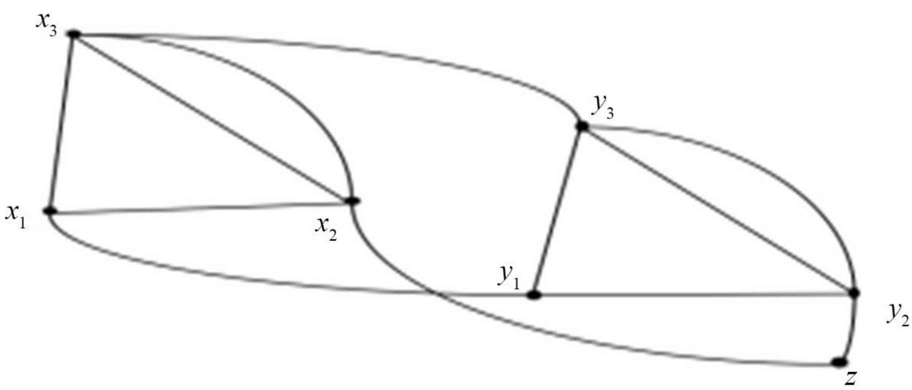

Figure 1. Example G
图 1. 例 G

引理 1：对于 G 的任何一个分解 (T_1,T_2)，如果 e,f 是 G 上的重边，那么 e,f 不可能位于同一棵树 T_i，其中 $i=1,2$。

证明：我们利用反证法进行证明，不妨假 e,f 都在同一棵树 T_1 上，那么对于图 G 的任何一个分解，我们都会得到 T_1 上存在一个圈，矛盾于 T_1 是一棵树。

我们对上述所给出的例子进行分析，首先收缩顶点 x_1,x_2,x_3 为一个顶点 X，收缩顶点 y_1,y_2,y_3 为一个顶点 Y，则我们得到了一个新的图 G'，"见图 2"中展示它的顶点集为 $V(G')=\{X,Y,Z\}$。

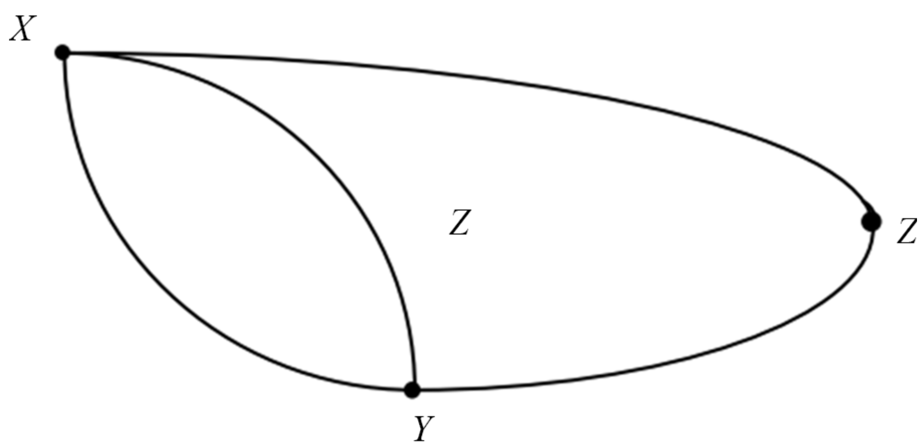

Figure 2. Edge contracted of the graph G
图 2. 图 G 的收缩图

事实 1：图 G 是一棵双树，则通过收缩操作之后得到的图 G' 也是一棵双树。

证明：a 如图所示不妨假设 $E(G')=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，其中 $e_1=XY,e_2=XY,e_3=XZ,e_4=YZ$，根据引理 1

可得 e_1, e_2 不可能位于同一棵树 T_i 中，不妨假设 $e_1 \in T_1$ 以及 $e_2 \in T_2$。由于 Z 在 G' 上只有二度点，因此 e_3, e_4 在不同的树上，那么在新图 G' 中我们得到了新的分解 (T_1, T_2)，从而证明了这个事实。

事实 2：图 G 中包含一个三角形不妨假设这三条边分别为 e_1, e_2, e_3，那么这三条边都不会属于同一个 T_i。

证明：利用反证法，不妨假设 e_1, e_2, e_3 都在同一棵树 T_1 上，那么对于图 G 的任何一个分解，我们都会得到 T_1 上存在一个圈，矛盾于 T_1 是一棵树。

推论 1：图 G 中包含一个三角形，那么这三条边中至少有一条边属于 T_i 其中 $i = 1,2$，另外两条边属于 T_{3-i}。

下面我们对于上述给出的例子，通过对这个例子的所有的分解进行讨论从而证明对于双树 G，对于任何 G 的两个边不相交生成树 (T_1, T_2) 而言，存在一个顶点 $v \in V(G)$，使得 $\left|d_{T_1}(v) - d_{T_2}(v)\right| \geq 2$。下面我们都是基于图 $G = (T_1, T_2)$ 进行讨论。

下面我们对图 G 的边集进行讨论，不妨假设 e_1, f_1 是关联 x_2 和 x_3 的两条重边，e_3, f_3 是关联 y_2 和 y_3 的两条重边，$e_2 = x_3 y_3$，$f_2 = x_1 y_1$。与 Z 点相关联的边集我们在下面的 Case 中进行具体的分析讨论。接下来根据上述所谈到的事实和推论我们对它们的边集进行划分，因为 e_1, f_1 以及 e_3, f_3 是两对重边，因此 e_1, f_1 属于不同的 T_i，e_3, f_3 属于不同的 T_i。为了不失一般性我们不妨假设 $e_1, e_3 \in T_1$，$f_1, f_3 \in T_2$。由引理 1 可得 e_2, f_2 位于不同的树上。接下来我们分情况讨论。

Case A. 如果 $e_2 \in T_1, f_2 \in T_2$

Case A.1 因为 $G[x_1, x_2, x_3]$ 中包含两个三角形，由事实 2 可得 x_1x_2, x_1x_3 不可能同时位于同一棵树上。如果 $x_1x_3 \in T_1$，那么 $x_1x_2 \in T_2$。我们发现对于顶点 x_3 来说有，$\left|d_{T_1}(x_3) - d_{T_2}(x_3)\right| = 2$。如果 $x_1x_2 \in T_1$，那么

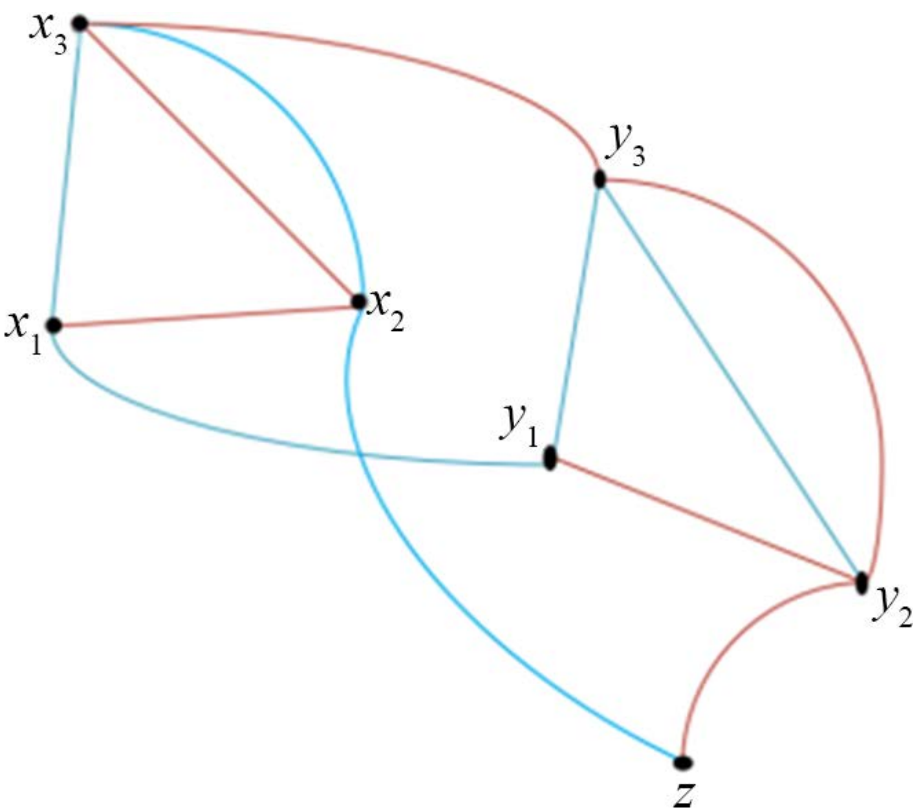

Figure 3. The Case B.2
图 3. 情况 B.2

$x_1x_3 \in T_2$。我们来讨论 $G[y_1, y_2, y_3]$，因为 $G[y_1, y_2, y_3]$ 中包含两个三角形，由事实 2 可得 y_1y_2, y_1x_3 不可能同时位于同一棵树上。如果 $y_1y_3 \in T_1$，那么 $y_1y_2 \in T_2$。我们发现对于顶点 y_3 来说有度差的绝对值为 2。

Case A.2

如果 $y_1y_3 \in T_2$，那么 $y_1y_2 \in T_1$，这时候我们发现对于 x_2, y_2 来说有且 $d_{T_1}(y_2) - d_{T_2}(y_2) = 1$。又因为 $z \in V(G)$，且 $d_G(z) = 2$，T_1, T_2 是 G 的支撑树，因此 $d_{T_1}(z) = d_{T_2}(z) = 1$。我们知道 zx_2, zy_2 不可能属于同一棵树，则存在 x_2 或者 y_2 中至少一个点有 $|d_{T_1}(x_2) - d_{T_2}(x_2)| = 2$ 或者 $|d_{T_1}(y_2) - d_{T_2}(y_2)| = 2$。

Case B.否则 $e_2 \in T_2, f_2 \in T_1$。

Case B.1 因为 $G[x_1, x_2, x_3]$ 中包含两个三角形，由事实 2 可得 x_1x_2, x_1x_3 不可能同时位于同一棵树上。如果 $x_1x_3 \in T_2$，那么 $x_1x_2 \in T_1$。我们发现对于顶点 x_3 来说有，$|d_{T_1}(x_3) - d_{T_2}(x_3)| = 2$。

Case B.2 如果 $x_1x_2 \in T_2$，那么 $x_1x_3 \in T_1$。我们来讨论 $G[y_1, y_2, y_3]$，因为 $G[y_1, y_2, y_3]$ 中包含两个三角形，由事实 2 可得 y_1y_2, y_1x_3 不可能同时位于同一棵树上。如果 $y_1y_3 \in T_2$，那么 $y_1y_2 \in T_1$。我们发现对于顶点 y_3 来说有，$|d_{T_1}(y_3) - d_{T_2}(y_3)| = 2$。如果 $y_1y_3 \in T_1$，那么 $y_1y_2 \in T_2$，这时候我们发现对于 x_2, y_2 来说有 $d_{T_2}(x_2) - d_{T_1}(x_2) = 1$ 且 $d_{T_2}(y_2) - d_{T_1}(y_2) = 1$。又因为 $z \in V(G)$，且 $d_G(z) = 2$，T_1, T_2 是 G 的支撑树，因此 $d_{T_1}(z) = d_{T_2}(z) = 1$。我们知道 zx_2, zy_2 不可能属于同一棵树，则存在 x_2 或者 y_2 中至少一个点有 $|d_{T_1}(x_2) - d_{T_2}(x_2)| = 2$ 或者 $|d_{T_1}(y_2) - d_{T_2}(y_2)| = 2$。“见图 3”片所示。

4. 结语

森林分解在图论研究中占据了极大的比重，文献[5]中已经证明了双树分解的度差上界是 5，那么对于双树分解度差的下界就是一个非常值得研究的问题，通过对度差上下界的讨论从而帮助我们的得到相对平衡的双树分解。我们目前已经找到一种双树，使得对于任意的分解都会存在一个顶点的度差大于等于 2，那对于任意的图都有这样的问题这也是值得进一步探讨的问题。

参考文献

[1] Frank, A. (2011) Connections in Combinatorial Optimization. Oxford University Press, Oxford.

[2] Illingworth, F., Powierski, E., Scott, A. and Tamitegama, Y. (2012) Balancing Connected Colourings of Graphs. arxiv.org, 2205.04984.

[3] Nash-Williams, C.St.J.A. (1961) Edge-Disjoint Spanning Trees of Finite Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **36**, 445-450. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-36.1.445

[4] Tutte, W.T. (2004) On the Problem of Decomposing a Graph into n Connected Factors. *Journal of the London Mathematical Society*, **36**, 221-230. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-36.1.221

[5] Florian, H. (2022) Globally Balancing Spanning Trees. arxiv.org, 2110.13726.

[6] Stein, M. (2006) Arboricity and Tree-Packing in Locally Finite Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **96**, 302-312. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2005.08.003

[7] Bang-Jensen, J., Havet, F. and Yeo, A. (2016) The Complexity of Finding Arc-Disjoint Branching Flows. *Discrete Applied Mathematics*, **209**, 16-26. https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.10.012