**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, **2023, 12(5), 2049-2066**
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125209

# 一类时滞非自治微极流体在二维有界域上的适定性

**王启玲**

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2023年4月7日；录用日期：2023年4月29日；发布日期：2023年5月6日

## 摘 要

本文研究了一类非自治的时滞微极流体方程在二维有界域上的整体适定性。首先用 Garlekin 方法建立了解的存在性，然后利用能量估计的方法得到了解的唯一性和稳定性。

## 关键词

微极流体，无限时滞，适定性

# The Well-Posedness of a Delayed Non-Autonomous Micropolar Fluid on $2D$ Bounded Domains

**Qiling Wang**

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: Apr. $7^{th}$, 2023; accepted: Apr. $29^{th}$, 2023; published: May $6^{th}$, 2023

## Abstract

**In this paper, we study the well-poseness of a non-autonomous delayed micropolar**

文章引用: 王启玲. 一类时滞非自治微极流体在二维有界域上的适定性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2049-2066.
DOI: 10.12677/aam.2023.125209

fluid on $2D$ bounded domains. We prove the existence of solutions by the method of the Garlerin approximation. Then we use the energy method to prove the uniqueness and the stability of solutions.

## Keywords

**Micropolar Fluid, Delay, Well-Posedness**



## 1. 介绍

在流体力学理论中，微极流是一类可以检测流体微观结构变化且伴有非均匀应力张量的流体。在物理学中，它表示在黏性介质中含有随机的、有确定方向的颗粒的流体，它对于从事研究流体动力学问题和现象的工程师和科学家是非常重要的。微极流方程组是著名的 Navier-Stokes 方程的一个重要的推广，当流体中粒子的旋转角速度为零时，微极流的运动可以用 Navier-Stokes 方程来描述。微极流方程组可以很好地描述当流体通过一个狭小的通道，即粒子的旋转速度不为零时，流体的运动性态。相比于经典的Navier-Stokes方程，微极性流体模型能刻画出如聚合物流体、液晶、动物血液、胶状流体等特殊流体的动力学行为。因此，它的数学理论受到众多数学家关注。Eringen 于 1966 年在文献 [1] 中最早提出了微极性流体的理论，他引入了一个数学模型，该模型描述了一类具有微旋转效应和惯性的非牛顿流体运动，极流体流动的运动可以用以下方程来描述：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu+\nu_r)\triangle u - 2\nu_r\nabla\times\omega + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot u = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - (c_a+c_d)\triangle\omega + 4\nu_r\omega + (u\cdot\nabla)\omega - (c_0+c_d-c_a)\nabla(\nabla\cdot\omega) - 2\nu_r\nabla\times u = \widetilde{f}, \tag{3}$$

其中 $u=(u_1,u_2,u_3)$ 是流体的速度，$p$ 表示压力，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ 是粒子旋转的角速度，$f=(f_1,f_2,f_3)$ 和 $\widetilde{f}=(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2,\widetilde{f}_3)$ 为外力。特别地，正参数 $\nu,\nu_r,c_0,c_a,c_d$ 表示正的粘性系数，由文献 [1,2] 可知，式 (1),(3) 表示动量守恒，式 (2) 表示质量守恒。如果 $\nu_r=0,\omega=(0,0,0)$, 则方程 (1)-(3) 可化简为不可压缩的 Navier-Stokes 方程。因此，微极性流体流动方程可被视为 Navier-Stokes 方程的推广，因为它们考虑到了流体的微观结构，其具体物理背景可以参见文献 [2,3].

由于微极流体流动在现实世界中的广泛应用，已经得到了一些数学家和物理学家的深入研究。

关于微极流方程解的存在性、唯一性、正则性和长时间行为的研究已有很多，相关结果可参见文献 [2–8]. 例如，在文献 [3] 中，研究了该方程组 $L^2$ 整体吸引子的存在性以及 Hausdorff 维数和分形维数估计，在文献 [9] 中证明了该方程组 $H^2$ 整体吸引子的存在性，文献 [10–13] 等分别验证了该方程组在有界域上整体吸引子和一致吸引子的存在性，在文献 [14] 中证明了该方程组的拉回吸引子的存在性，在文献 [15,16] 中得到 $H^1$ 拉回吸引子，文献 [17] 证明了在伴有非匀质边界条件的 Lipschitz 有界域上 $L^2$ 拉回吸引子的存在性。文献 [18] 研究了二维有界域非自主微极性流体流动解的拉回渐近行为。

然而，据我们所知，目前对含无限时滞微极流体流动研究的文献并不多。众所周知，时滞效应已被证明在物理和生物现象中经常出现，并具有重要的作用，在现实世界中也具有广泛的应用。例如，当我们想在工程控制中使用某些类型的外力来控制一个系统时，似乎很自然地假设这些力不仅应该与系统的当前状态相关，而且应该与系统的过去状态也相关，有时甚至与系统的整个发展过程相关。

本文考研究含无穷时滞项的微极流方程组解的整体适定性，其方程组的形式如下：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(\nu+\nu_r)\triangle u-2\nu_r\nabla\times\omega+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=f+g(t,u_t),t>0,x\in\Omega, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}-\alpha\triangle\omega+4\nu_r\omega-2\nu_r\nabla\times u+(u\cdot\nabla)\omega=\widetilde{f}+\widetilde{g}(t,u_t),\ t>0,x\in\Omega, \tag{5}$$

$$\nabla\cdot u=0,\ 在(0,+\infty)\times\Omega, \tag{6}$$

$$u=0,\omega=0,,\ 在(0,+\infty)\times\partial\Omega, \tag{7}$$

$$(u(0,\cdot),\omega(0,\cdot))=(u^0(\cdot),\omega^0(\cdot)), \tag{8}$$

$$(u(t,x),\omega(t,x))=\phi(t,x),\ t\in(-\infty,0],x\in\Omega. \tag{9}$$

其中 $\alpha=c_a+c_d, x=(x_1,x_2)\in\Omega\subset R^2$ 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开域，并满足下面的 Poincaré 不等式：

$$\lambda_1\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}\le\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)},\ \forall\varphi(x)\in H^1_0(\Omega), \tag{10}$$

这里 $\lambda_1>0$ 是定义为 $H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ 并且满足 Dirichlet 边界条件的算子 $-\triangle$ 的第一个特征值，这里 $\lambda_1$ 是与空间 $\Omega$ 有关的常数。

在式 (4)-(9) 中，$u=(u_1,u_2)$ 是流体的速度，$p$ 和 $\omega$ 分别为流体的压力和角速度，$f(t,x)=(f_1,f_2)$ 和 $\widetilde{f}(t,x)$ 是外力，$g(t,u_t)=(g_1,g_2)$ 和 $\widetilde{g}(t,\omega_t)$ 是包含某些遗传特征的时滞外力，$u_t,\omega_t$ 是区间 $(-\infty,0]$ 上的时滞函数，其形式如下：

$$u_t=u(t+s),\omega_t=\omega(t+s),\ \ \forall t>0. \tag{11}$$

此外，$\phi(t,x)=(u(t,x),\omega(t,x))$是时滞区间$(-\infty,0]$的初始值，且

$$\nabla\times u=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2},\quad \nabla\times\omega=(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2},\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}).$$

本文的目的是证明式 (4)-(9) 弱解的整体适定性。这里使用 Faedo-Galerkin 近似方法证明解的存在性，然后用能量方法证明解的唯一性和稳定性。值得一提的是，Caraballo 和 Real 在文献 [19, 20] 中研究了具有有限时滞的Navier-Stokes方程的渐近行为。后来，Marín-rubio, Real 和 Valero 在文献 [21] 中将文献 [20] 中的结果扩展到无界域。最近，Zhao 和 Sun 在文献 [22] 中研究了含有无限时滞非自治微极性流体在二维有界域内的解的适定性，然后建立了相关过程的拉回吸引子的存在性，其选取的时滞空间为

$$\mathcal{C}_\gamma(\widehat{H}) = \big\{\varphi \in \mathcal{C}\big((-\infty, 0]; \widehat{H}\big) : \exists \lim_{s\to-\infty} e^{\gamma s}\varphi(s) \in \widehat{H}\big\},$$

$\mathcal{C}_\gamma(\widehat{H})$ 是一个 Banach 空间, 范数为

$$\|\varphi\|_\gamma = \sup_{s\in(-\infty,0]} e^{\gamma s}\|\varphi(s)\|.$$

本文的思想来源于文献 [23], 本文旨在延拓文献 [22] 的结果，在二维有界区域内建立了解的适定性，选取的时滞时滞空间为

$$BCL_{-\infty}(\widehat{H}) = \{\varphi \in C((-\infty, 0]; \widehat{H}) : \lim_{s\to-\infty} \varphi(s) \text{ 在 } \widehat{H} \text{ 中存在}\}$$

其中 $BCL_{-\infty}(\widehat{H})$ 是一个 Banach 空间，范数为

$$\|\varphi\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})} = \sup_{s\in(-\infty,0]} \|\varphi(s)\|.$$

本文具体安排如下：第二部分是预备知识，在这一部分，我们将引入初边值问题 (4)-(9) 的弱形式，并给出其弱解的定义。在第三部分中，我们证明 (4)-(9) 弱解的整体适定性。

## 2. 预备知识

在本节中，我们首先介绍一些符号和算子，然后引入初边值问题 (4)-(9) 的弱形式，并给出其弱解的定义。我们分别用 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Z}_+$ 表示实数和非负整数的集合。$c$ 表示通用的常数，它在不同的地方可能取不同的值。

设 $L^p(\Omega)$ 和 $W^{m,p}(\Omega)$ 表示通常的 Lebesgue 空间和通常的 Sobolev 空间, 其范数为 $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{m,p}$; 其中

$$\|\varphi\|_p := \Big(\int_\Omega |\varphi|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\varphi\|_{m,p} := \Big(\sum_{\beta\le m}\int_\Omega |D^\beta\varphi|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

特别地，$\|\cdot\| := \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$, $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$; $H_0^1(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\}$ 在 $H^1(\Omega)$ 空间中的闭包。然后引入如下函数空间：

$\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) : \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \nabla\cdot\varphi = 0\}$,

$H = \mathcal{V}$ 在 $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 的闭包，且范数为 $\|\cdot\|_H = \|\cdot\|$ 且对偶空间为 $H^* = H$,

$V=\mathcal{V}$ 在 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 的闭包，且范数为 $\|\cdot\|_V=\|\cdot\|_{2,2}$ 且对偶空间为 $V^*$,

$\widehat{H}=H\times L^2(\Omega)$ 范数为 $\|\cdot\|_{\widehat{H}}$ 且对偶空间为 $\widehat{H}^*$,

$\widehat{V}=V\times H_0^1(\Omega)$ 范数为 $\|\cdot\|_{\widehat{V}}$ 且对偶空间为 $\widehat{V}^*$,

其中 $\|\cdot\|_{\widehat{H}}$ 和 $\|\cdot\|_{\widehat{V}}$ 的形式为

$$\|(u,v)\|_{\widehat{H}}=(\|u\|_H^2+\|v\|^2)^{\frac{1}{2}},\quad \|(u,v)\|_{\widehat{V}}=(\|u\|_V^2+\|v\|_{H^1}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

在本文中，如果没有混淆发生，我们将符号 $\|\cdot\|_H$ 和 $\|\cdot\|_{\widehat{H}}$ 简化为用同样的符号 $\|\cdot\|$.

设 $(\cdot,\cdot)$ 是 $L^2(\Omega)$, $H$ 或 $\widehat{H}$ 中的内积，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $V$ 和 $V^*$ 或 $\widehat{V}$ 和 $\widehat{V}^*$ 的对偶积。然后，我们介绍三个有用的算子。第一个算子 $A$ 定义为：对任意的 $w=(u,\omega)$, $\phi=(\Phi,\phi_3)\in\widehat{V}$, 其中 $u=(u_1,u_2)\in V,\Phi=(\phi_1,\phi_2)\in V$, 成立

$$\begin{aligned}\langle Aw,\phi\rangle&=(\nu+\nu_r)(\nabla u,\nabla\Phi)+\alpha(\nabla\omega,\nabla\phi_3)\\&=(\nu+\nu_r)\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}+\alpha\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\phi_3}{\partial x_i}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$D(A)=\widehat{V}\cap(H^2(\Omega))^3$. 其次，定义算子 $B(\cdot,\cdot)$ 为：对任意的 $u=(u_1,u_2)\in V,\psi=(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3)\in\widehat{V}$, $\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)\in\widehat{V}$, 成立

$$\langle B(u,w),\phi\rangle=((u\cdot\nabla)w,\phi)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega u_i\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}\phi_j\mathrm{d}x,$$

最后，定义算子 $N(\cdot)$ 为

$$N(w)=(-2\nu_r\nabla\times w,-2\nu_r\nabla\times u,+4\nu_r\omega),\ \forall w=(u,\omega)\in\widehat{V}.$$

最后，我们给出算子 $A$, $B(\cdot,\cdot)$ 和 $N(\cdot)$ 的一些性质，参见文献 [3,11].

**引理2.1.** *(参见文献 [3,11])*

(1) 存在两个正常数 $c_1$ 和 $c_2$ 使得

$$c_1\langle Aw,w\rangle\leqslant\|w\|_{\widehat{V}}^2\leqslant c_2\langle Aw,w\rangle,\ \forall\,w\in\widehat{V}.\tag{12}$$

此外，对于任意 $w\in D(A)$ 有

$$min\{\nu+\nu_r,\alpha\}\|\nabla w\|^2\leq\langle Aw,w\rangle\leqslant\|w\|\|Aw\|\leqslant\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|\nabla w\|\|Aw\|\tag{13}$$

(2) 存在一个正常数 $\lambda$, 它只依赖于 $\Omega$, 这样对于任意 $(u,\psi,\varphi)\in V\times\widehat{V}\times\widehat{V}$ 使得

$$|\langle B(u,\psi),\varphi\rangle| \leqslant \begin{cases} \lambda\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2}\|\nabla\psi\|\|\varphi\|^{1/2}\|\nabla\varphi\|^{1/2}, \\ \lambda\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2}\|\nabla\varphi\|\|\psi\|^{1/2}\|\nabla\psi\|^{1/2}. \end{cases} \tag{14}$$

此外，如果 $(u,\psi,\varphi) \in V \times D(A) \times D(A)$，则

$$|\langle B(u,\psi),A\varphi\rangle| \leqslant \lambda\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2}\|\nabla\varphi\|\|\nabla\psi\|^{1/2}\|A\psi\|^{1/2}. \tag{15}$$

(3) 这里存在一个正常数 $c$ 使得

$$N(\psi) \leqslant c\|\psi\|_{\widehat{V}},\ \ \forall\,\psi \in \widehat{V}. \tag{16}$$

此外，

$$-\langle N(\psi),A\psi\rangle \leqslant \frac{1}{4}\|A\psi\|^2 + c^2(\nu_r)\|\psi\|^2_{\widehat{V}},\ \ \forall\,\psi \in D(A), \tag{17}$$

$$\delta_1\|\psi\|^2_{\widehat{V}} \leqslant \langle A\psi,\psi\rangle + \langle N\psi,\psi\rangle,\ \ \forall\,\psi \in D(A). \tag{18}$$

这里 $\delta_1 = min\{\nu,\alpha\}$.

在引理 2.1 的基础上，我们进一步有以下引理。

**引理2.2.** *(参见文献 [22])*

(1) $A$ 是一个从 $V$ 到 $V^*$ 和 $D(A)$ 到 $\widehat{H}$ 的线性连续算子，$N(\cdot)$ 是一个从 $\widehat{V}$ 到 $\widehat{H}$ 的线性连续算子.

(2) $B(\cdot,\cdot)$ 是一个从 $V \times \widehat{V}$ 到 $\widehat{V}^*$ 线性连续算子，此外，对 $\forall u \in V$, $\forall w \in \widehat{V}$ 有

$$\langle B(u,\psi),\varphi\rangle = -\langle B(u,\varphi),\psi\rangle,\ \ \forall\,u \in V, \forall\,\psi \in \widehat{V}, \forall\,\varphi \in \widehat{V}. \tag{19}$$

## 3. 整体适定性

本节的任务是建立式 (4)-(9) 弱解的整体适定性。

首先，根据第 2 节中介绍的符号和算子，我们得到 (4)-(9) 的弱形式(参见文献 [22])

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Aw + B(u,w) + N(w) = F(t) + G(t,W_t),\ \ t > 0, \tag{20}$$

$$w_{t=0} = w_0 = w(s) = (u(s),\omega(s)) = \phi(s),\ \ s \in (-\infty,0], \tag{21}$$

其中，

$$w = (u,\omega),\ F(t) = F(t+x) = (f(t+x),\widetilde{f}(t+x)),\ G(t,W_t) = (g(t,u_t),\widetilde{g}(t,\omega_t)),\ \ t > 0,$$

时滞函数 $u_t$ 和 $\omega_t$ 由式 (11) 定义。

为了处理无限时滞，我们引入空间 $BCL_{-\infty}(\widehat{H})$，定义如下：

$$BCL_{-\infty}(\widehat{H}) = \{\varphi \in C((-\infty,0];\widehat{H}) : \lim_{s\to-\infty}\varphi(s) \text{ 在 } \widehat{H} \text{ 中存在}\}$$

$BCL_{-\infty}(\widehat{H})$ 是一个 Banach 空间，且范数为：

$$\|\varphi\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})} := \sup_{s\in(-\infty,0]}\|\varphi(s)\|.$$

初值问题 (20)-(21) 的弱解定义如下。

**定义3.1.** *对 $\forall T > 0$, 如果函数 $w \in C((-\infty,T];\widehat{H}) \cap L^2(0,T;\widehat{V})$ 且 $w_0 = \phi(s) \in BCL_{-\infty}(\widehat{H})$ 和 $u(t,x) = \phi,\ \ t \in (\tau-h,\tau)$, 使得对 $\forall t \in (0.T), \forall\varphi \in \widehat{V}$ 方程*

$$\frac{d}{dt}(w,\varphi) + \langle Aw,\varphi\rangle + \langle B(u,w),\varphi\rangle + \langle N(w),\varphi\rangle = \langle F(t),\varphi\rangle + (G(t,w_t),\varphi)$$

*在分布 $\mathcal{D}'(0,T)$ 意义下成立，则 $w$ 是方程 (20)-(21) 在区间 $(-\infty,T]$ 上的一个弱解.*

为了获得初值问题 (20)-(21) 解的整体适定性，我们需要对函数 $F$ 和 $G$ 提出一些假设。

(I) *假设对任意 $T > 0, F(\cdot,x) = (f(\cdot,x),\widetilde{f}(\cdot,x)) \in L^2(0,T;\widehat{V}^*)$.*

(II) *假设 $G : [0,T] \times BCL_{-\infty}(\widehat{H}) \mapsto G(t,\xi) \in (L^2(\Omega))^3$ 满足：*

(i) *对 $\forall\xi \in BCL_{-\infty}(\widehat{H})$, 映射 $[0,T] \ni t \mapsto G(t,\xi) \in (L^2(\Omega))^3$ 是可测的；*

(ii) $G(\cdot,0) = (0,0,0)$;

(iii) *存在一个常数 $L_G > 0$ 使得对于任意 $t \in [0,T],\ \xi,\eta \in BCL_{-\infty}(\widehat{H})$,*

$$\|G(t,\xi) - G(t,\eta)\| \leqslant L_G\|\xi-\eta\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}.$$

条件 (ii) 和 (iii) 表明

$$\|G(t,\xi)\| \leqslant L_G\|\xi\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}, \forall\xi \in BCL_{-\infty}(\widehat{H}). \tag{22}$$

接下来证明方程 (20)-(21) 的弱解的存在性、唯一性、稳定性。

**定理3.1.** *(弱解的存在性) 对任意的 $T > 0$, 假设 $\phi \in BCL_{-\infty}(\widehat{H})$ 是给定的，并且假设 **(I)**和**(II)** 成立，则问题 (20)-(21) 在区间 $(-\infty,T]$ 中至少存在一个弱解。*

**证** 我们将用三个步骤来证明定理 3.1.

**步骤1. 伽辽金近似解的局部存在性**

我们首先回顾定义的算子 $A$ 的一些性质。事实上，根据椭圆算子的经典谱理论(见文献 [24])，存在一个特征值序列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots,\ \ \lambda_n \to +\infty \ \text{ 当 } \ n \to \infty,$$

和其对应的特征向量族 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A)$, 它是 $\widehat{H}$ 空间的希尔伯特基，且由 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots\}$ 张

成，在 $\widehat{V}$ 空间中稠密，使得

$$Av_n = \lambda_n v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

假设集合 $V_m := \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_m\}$, 并考虑映射$\mathbb{P}_m w := \sum_{j=1}^{m}(w, v_j)v_j$, 当 $w \in \widehat{H}$ 或 $w \in \widehat{V}$，对于每个 $T > 0$, 定义问题 (20)-(21) 的 Galerkin 近似解为

$$w^m(t) := \sum_{j=1}^{m} \gamma_{m,j}(t)v_j,$$

这里的系数 $\gamma_{m,j}(t)$ 满足下列常微分柯西问题

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(w^m(t), v_j\big) + \langle Aw^m(t), v_j\rangle + \langle B(u^m(t)), w^m(t)), v_j\rangle + \langle N(w^m(t)), v_j\rangle \\ &\qquad\qquad = \langle F(t), v_j\rangle + (G(t, w_t^m), v_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad t \in (0, T),\end{aligned} \tag{23}$$

$$w^m(s) = \mathbb{P}_m \phi(s), \quad s \in (-\infty, 0], \tag{24}$$

在 $\mathcal{D}'(0, T)$ 中考虑方程 (23).

上述无穷时滞常泛函微分方程组满足局部解存在唯一性的条件(参考文献 [25])。因此，我们得出 (23)-(24) 有一个定义在 $[0, t_m)$ 且 $0 \leq t_m \leq T$ 的唯一的局部解。接下来，我们将获得一个先验估计，并确保解 $w^m$ 确实存在于整个区间 $[0, T]$.

**步骤2.　先验估计**

将 (23) 的每个方程乘以 $\gamma_{m,j}(t), j = 1, \cdots, m$ 并求和，利用 (18) 和 $\langle B(u, \psi), \psi\rangle = 0$ (见文献 [22] )有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w^m(t)\|^2 + \delta_1\|w^m(t)\|_{\widehat{V}}^2 \leqslant \langle F(t), w^m(t)\rangle + (G(t, w^m), w^m(t)), \quad t \in (0, T). \tag{25}$$

又因为

$$\|w_t^m\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})} = \sup_{\theta \leqslant 0}\|w^m(t+\theta)\| \geqslant \|w^m(t)\|, 0 < t < T, \tag{26}$$

我们结合( 22), (25), (26) 和 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w^m(t)\|^2 + \delta_1\|w^m(t)\|_{\widehat{V}}^2 &\leqslant \langle F(t), w^m(t)\rangle + (G(t, w^m), w^m(t)) \\ &\leqslant \|F(t)\|_{\widehat{V}^*}\|w^m(t)\|_{\widehat{V}} + L_G\|w_t^m\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}\|w^m(t)\| \\ &\leqslant \frac{\delta_1}{2}\|w^m(t)\|_{\widehat{V}}^2 + \frac{1}{2\delta_1}\|F(t)\|_{\widehat{V}^*}^2 + L_G\|w_t^m\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2,\end{aligned} \tag{27}$$

式 (27) 表明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w^m(t)\|^2+\delta_1\|w^m(t)\|_{\widehat{V}}^2\leqslant\frac{1}{\delta_1}\|F(t)\|_{\widehat{V}^*}^2+2L_G\|w_t^m\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2,\ \ t\in(0,T).\tag{28}$$

设 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 并将方程 (28) 写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w^m(s)\|^2+\delta_1\|w^m(s)\|_{\widehat{V}}^2\leqslant\frac{1}{\delta_1}\|F(s)\|_{\widehat{V}^*}^2+2L_G\|w_s^m\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2,\ \ s\in(0,T).\tag{29}$$

对 (29) 中的 $s$ 在 $[0,t]$ 上积分有

$$\|w^m(t)\|^2+\delta_1\int_0^t\|w^m(s)\|_{\widehat{V}}^2\mathrm{d}s\leqslant\|w^m(0)\|^2+\int_0^t(\frac{1}{\delta_1}\|F(s)\|_{\widehat{V}^*}^2+2L_G\|w_s^m\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2)\mathrm{d}s.\tag{30}$$

一方面，根据空间 $BCL_{-\infty}(\widehat{\widehat{H}})$ 范数的定义，我们有

$$\begin{aligned}\|u_t^m\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2&=\sup_{\theta\leqslant0}\|w^m(t+\theta)\|^2\\&\leqslant\max\Big\{\sup_{\theta\leq-t}\|w^m(t+\theta)\|^2,\ \sup_{-t\leqslant\theta\leqslant0}\|w^m(t+\theta)\|^2\Big\},\end{aligned}\tag{31}$$

和

$$\sup_{\theta\leq-t}\|w^m(t+\theta)\|^2=\sup_{\theta\leq-t}\|\phi(t+\theta)\|^2.\tag{32}$$

另一方面，我们假设 $t\geqslant t+\theta\geqslant0$, 然后对 (29) 关于 $s$ 在区间 $[0,t+\theta]$ 上积分有

$$\begin{aligned}&\|w^m(t+\theta)\|^2+\delta_1\int_0^{t+\theta}\|w^m(s)\|_{\widehat{V}}^2\mathrm{d}s\\&\leqslant\|w^m(0)\|^2+\int_0^{t+\theta}(\frac{1}{\delta_1}\|F(s)\|_{\widehat{V}^*}^2+2L_G\|w_s^m\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{33}$$

由 (33) 我们有

$$\|w^m(t+\theta)\|^2\leqslant\|w^m(0)\|^2+\int_0^{t+\theta}(\frac{1}{\delta_1}\|F(s)\|_{\widehat{V}^*}^2+2L_G\|w_s^m\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2)\mathrm{d}s.\tag{34}$$

对 (34) 关于 $\theta\in[-t,0]$ 取上确界有

$$\sup_{-t\leqslant\theta\leqslant0}\|w^m(t+\theta)\|^2\leqslant\sup_{-t\leqslant\theta\leqslant0}\Big[\|w^m(0)\|^2+\int_0^{t+\theta}(\frac{1}{\delta_1}\|F(s)\|_{\widehat{V}^*}^2+2L_G\|w_s^m\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2)\mathrm{d}s\Big].\tag{35}$$

DOI: 10.12677/aam.2023.125209

从 (31)-(35) 有

$$\|w_t^m\|^2_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})} \leqslant \max\Big\{\sup_{\theta\leq -t}\|\phi(t+\theta)\|^2, \sup_{-t\leqslant\theta\leqslant 0}\big[\|w^m(0)\|^2 + \int_0^{t+\theta}(\frac{1}{\delta_1}\|F(s)\|^2_{\widehat{V}^*} + 2L_G\|w_s^m\|^2_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})})\mathrm{d}s\big]\Big\}. \tag{36}$$

由于

$$\sup_{\theta\in(-\infty,-t]}\|\phi(t+\theta)\| = \sup_{\theta\leqslant 0}\|\phi(\theta)\| = \|\phi\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}, \tag{37}$$

从 (36)-(37) 我们得到

$$\|w_t^m\|^2_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})} \leqslant \|\phi\|^2_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})} + \int_0^t(\frac{1}{\delta_1}\|F(s)\|^2_{\widehat{V}^*} + 2L_G\|w_s^m\|^2_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})})\mathrm{d}s. \tag{38}$$

从 (38) 和 Gronwall 不等式有

$$\|w_t^m\|^2_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})} \leqslant (\|\phi\|^2_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})} + \frac{1}{\delta_1}\int_0^t\|F(s)\|^2_{\widehat{V}^*}\mathrm{d}s)e^{2L_Gt}, \forall t\in[0,T]. \tag{39}$$

对于 $\mathcal{R}>0$, 设 $\|\phi\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}\leqslant\mathcal{R}$, 则 (39) 表明这里存在一个关于 $\delta_1, L_G, F, T$ 和 $\mathcal{R}$ 的常数 $c$, 使得

$$\|w_t^m\|^2_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})} \leqslant c(T,\mathcal{R}), \quad \forall m\geqslant 1. \tag{40}$$

我们从 (26) 和 (40) 可以得到

$$\{w^m\} \text{ 在 } L^\infty(0,T;\widehat{H}) \text{ 是有界的。} \tag{41}$$

我们从 (26), (30) 和 (40) 也可以得到

$$\begin{aligned}\delta_1\int_0^t\|w^m(s)\|^2_{\widehat{V}}\mathrm{d}s &\leqslant \|w^m(0)\|^2 + \int_0^t(\frac{1}{\delta_1}\|F(s)\|^2_{\widehat{V}^*} + 2L_G\|w_s^m\|^2_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})})\mathrm{d}s.\\ &\leqslant \mathcal{R}^2 + \int_0^t\big(\frac{1}{\delta_1}\|F(s)\|^2_{\widehat{V}^*} + 2L_Gc(T,\mathcal{R})\big)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{42}$$

类似于 (40), 我们可以从 (42) 得到这里存在另一个常数 $c(T,\mathcal{R})>0$ 使得

$$\|w^m\|^2_{L^2(0,T;\widehat{V})} \leqslant c(T,\mathcal{R}), \ \forall m\geqslant 1. \tag{43}$$

由 (23) 我们可以得到，对 $\forall v \in V$ 有

$$
\begin{aligned}
|\langle (w^m(t))', v\rangle| \leqslant\ & |\langle Aw^m(t), v\rangle| + |\langle B(u^m(t), w^m(t)), v\rangle| \\
& + |\langle N(w^m(t)), v\rangle| + |\langle F(t), v\rangle| + |(G(t, w_t^m), v)| \\
\leqslant\ & c(\lambda, \nu_r)(\|w^m(t)\|_{\widehat{V}} + \|u^m(t)\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u^m(t)\|^{\frac{1}{2}}\|w^m(t)\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla w^m(t)\|^{\frac{1}{2}} \\
& + \|F(t)\|_{\widehat{V}^*} + \|G(t, w_t^m)\|)\|v\|_{\widehat{V}}, \\
\leqslant\ & c(\lambda, \nu_r)(\|w^m(t)\|_{\widehat{V}} + \|w^m(t)\|\|\nabla w^m(t)\| + \|F(t)\|_{\widehat{V}^*} + \|G(t, w_t^m)\|)\|v\|_{\widehat{V}}. 
\end{aligned} \tag{44}
$$

这里正常数 $c(\lambda, \nu_r)$ 取决于 $\lambda$ 和引理 2.1 的常数 $c(\nu_r)$, 从 (44) 有

$$
\|(w^m(t))'\|_{\widehat{V}^*} \leqslant c(\lambda, \nu_r)(\|w^m(t)\|_{\widehat{V}} + \|w^m(t)\|\|\nabla w^m(t)\| + \|F(t)\|_{\widehat{V}^*} + \|G(t, w_t^m)\|). \tag{45}
$$

(22) 和 (41), (43) 和 (45) 表明

$$
\{(w^m(t))'\}\text{在}L^2(0,T;\widehat{V}^*)\text{是有界的。} \tag{46}
$$

从 (40)-(41), (43), (46) 与步骤 1 中得到的局部存在性相结合，我们得到了在所有时间 $t \in [0, T]$ 的 Galerkin 近似解的全局存在性。

**步骤3. 全局弱解的存在性**

我们将证明伽辽金近似解的极限函数是方程 (20)-(21) 的弱解。考虑 (40), (41), (43) 和 (46), 通过对角线选取法，我们可以得到一个子序列(仍然用相同的符号表示) $\{w^m\}$, 某个元素 $w \in L^\infty(0,T;\widehat{H}) \cap L^2(0,T;\widehat{V})$ 和 $w' \in L^2(0,T;\widehat{V}^*)$, 并且 $\xi(t) \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)$ 使得

$$
\begin{aligned}
& w^m \rightharpoonup w \text{ 在 } L^\infty(0,T;\widehat{H}) \text{ 弱星收敛，} && (47)\\
& w^m \rightharpoonup w \text{ 在 } L^2(0,T;\widehat{V}) \text{ 弱收敛，} && (48)\\
& (w^m)' \rightharpoonup w' \text{ 在 } L^2(0,T;\widehat{V}^*) \text{ 弱收敛，} && (49)\\
& w^m \to w \text{ 在 } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3) \text{ 强收敛，} && (50)\\
& G(\cdot, w^m) \rightharpoonup \xi(t) \text{ 在 } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3) \text{ 弱收敛。} && (51)
\end{aligned}
$$

现在，由 (48)-(49) 和紧嵌入定理(参见文献 [26])，

$$
u^m \in \mathcal{C}^0([0,T];H), \quad u \in \mathcal{C}^0([0,T];H).
$$

同样，从 (48)-(50), 我们可以获得(对所有子序列成立)

$$
u^m(t) \to u(t) \ \text{ 在 } H \text{ a.e.}\, t \in (0,T).
$$

为了得到方程 (20)-(21) 的弱解，我们需要对式 (23) 中的 $m$ 取极限 $m \to \infty$, 接下来证明非线性项

的下列收敛关系：

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T \langle B(u^m(t),w^m(t)),v\rangle \mathrm{d}t=\int_0^T \langle B(u(t),w(t)),v\rangle \mathrm{d}t,\ \forall\, v\in \widehat{V}, \tag{52}$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T \big(G(t,w_t^m),v\big)=\int_0^T \big(G(t,w_t),v\big)\mathrm{d}t,\ \forall\, v\in \widehat{V}. \tag{53}$$

由于 (52) 的证明和文献 [22] 的证明类似，所以在这里省略证明，现在我们证明 (53).

接下来我们首先证明 $BCL_{-\infty}(\widehat{H})$ 中初始值的近似(见文献 [27, (11)]).

$$P_m\phi\to\phi,\ \text{在}\ BCL_{-\infty}(\widehat{H}). \tag{54}$$

如果 (54) 不成立，则存在 $\epsilon>0$ 和一个序列 $\theta_m\subset(-\infty,0]$ 使得

$$|P_m\phi(\theta_m)-\phi(\theta_m)|>\epsilon,\forall m. \tag{55}$$

我们假设 $\theta_m\to-\infty$. 如果 $\theta_m\to\theta$, 则

$$P_m\phi(\theta_m)\to\phi(\theta_m),$$

当 $m\to\infty$ 时，

$$|P_m\phi(\theta_m)-\phi(\theta_m)|\leq|P_m\phi(\theta_m)-P_m\phi(\theta)|+|P_m\phi(\theta)-\phi(\theta)|\to 0,$$

定义 $x=\lim\limits_{\theta\to-\infty}\phi(\theta)$, 我们有

$$|P_m\phi(\theta_m)-\phi(\theta_m)|\leq|P_m\phi(\theta_m)-P_mx)|+|P_mx-x|+|x-\phi(\theta_m)|\to 0,$$

这与 (55) 矛盾，所以 (54) 成立。利用 (54), 我们有

$$\begin{aligned}&\sup_{\theta\leqslant 0}\|u^m(t+\theta)-u(t+\theta)\|\\&=\max\Big\{\sup_{\theta\in(-\infty,-t]}\|\mathbb{P}_m\phi(\theta+t)-\phi(\theta+t)\|,\ \sup_{\theta\in[-t,0]}\|u^m(t+\theta)-u(t+\theta)\|\Big\}\\&\leqslant\max\Big\{\|\mathbb{P}_m\phi-\phi\|_{BCL_{-\infty}(H)},\ \max_{\theta\in[0,t]}\|u^m(\theta)-u(\theta)\|\Big\}\to 0,\end{aligned}$$

这表明

$$u_t^m\to u_t\ \text{在}\ BCL_{-\infty}(\widehat{H})\ \text{强收敛，}\ \forall\, t\leqslant T. \tag{56}$$

从假设 **(II)**(iii) 和 (56) 可以得出

$$g(t,u_t^m)\to g(t,u_t)\ \text{在}\ L^2(0,T;H)\ \text{强收敛。} \tag{57}$$

由 (57) 我们可以得到 (53).

在这种情况下，我们可以利用 (48)-(50) 和 (52)-(53) 转化到 (23) 中的极限，得出 $u$ 是问题 (20)-(21) 的弱解。由此证明了定理 3.1 弱解的存在性。 ▌

接下来我们研究弱解的唯一性。

**定理3.2.** (唯一性) 设定理 *3.1* 的条件成立，那么对于每个初始值 $u_0 = \phi(s) \in BCL_{-\infty}(\widehat{H})$, $\forall T > 0$, 方程 (20)-(21) 具有唯一的弱解。

**证** 设 $w^1 = (w^1, \omega^1)$ 和 $w^2 = (w^2, \omega^2)$ 是方程 (20)-(21) 在区间 $(-\infty, T]$ 的两个解，有同样的初值 $w_0^1 = w_0^2 = \phi(s)$. 令 $w = w^1 - w^2$, 则对 $t \in (0, T]$ 我们有

$$\begin{aligned}&\tfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} + Aw(t) + B(u^1, w^1) - B(u^2, w^2) + N(w)\\&\qquad = G(t, w_t^1) - G(t, w_t^2).\end{aligned} \tag{58}$$

将 (58) 和 $w(t)$ 作内积有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w(t)\|^2 + \langle Aw(t), w(t)\rangle + \langle B(u^1(t), w^1(t)) - B(u^2(t), w^2(t)), w(t)\rangle + \langle N(w), w(t)\rangle\\&\qquad = (G(t, w_t^1) - G(t, w_t^2), w(t)),\ t \in (0, T].\end{aligned} \tag{59}$$

从文献 [22], 我们有

$$\begin{aligned}&|\langle B(u^1(t), w^1(t)) - B(u^2(t), w^2(t)), w(t)\rangle|\\&= |\langle B(u^1(t) - u^2(t), w^1(t)w(t)) - B(u^2(t), w(t)), w(t)\rangle|\\&= |\langle B(u(t), w^1(t))w(t)\rangle|\\&\leqslant \lambda\|u(t)\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u(t)\|^{\frac{1}{2}}\|w(t)\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla w(t)\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla w^1(t)\|^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant \lambda\|w(t)\|\|w(t)\|_{\widehat{V}}\|w^1(t)\|_{\widehat{V}}.\end{aligned} \tag{60}$$

结合 (18),(60) 和假设 (II)(iii)，从 (59) 我们可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w(t)\|^2 + \delta_1\|w(t)\|_{\widehat{V}}^2\\&\leqslant |\langle B(u^1(t), w^1(t)) - B(u^2(t), w^2(t)), w(t)\rangle| + (G(t, w_t^1) - G(t, w_t^2), w(t))\\&\leqslant \lambda\|w(t)\|\|w(t)\|_{\widehat{V}}\|w^1(t)\|_{\widehat{V}} + L_G\|w_t\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}\|w(t)\|.\end{aligned} \tag{61}$$

由于

$$w(\theta) = 0,\ \ \forall\,\theta \leqslant 0.$$

和

$$\|w_s\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})} = \sup_{\theta\leqslant 0}\|w(s+\theta)\| \leqslant \sup_{\theta\in[-s,0]}\|w(s+\theta)\| = \sup_{r\in[0,s]}\|w(r)\|,\ \ 0 \leqslant s \leqslant T.$$

对 (61) 在 $[0,t]$ 上积分有

$$\begin{aligned}
&\|w(t)\|^2+2\delta_1\int_0^t\|w(s)\|_{\widehat{V}}^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant 2L_G\int_0^t\|w_s\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}\|w(s)\|\mathrm{d}s+2\lambda\int_0^t\|w(s)\|\|w(s)\|_{\widehat{V}}\|w^1(s)\|_{\widehat{V}}\mathrm{d}s\\
&\leqslant 2L_G\int_0^t\sup_{r\in[0,s]}\|wr\|\|w(s)\|\mathrm{d}s+2\lambda\int_0^t\|w(s)\|\|w(s)\|_{\widehat{V}}\|w^1(s)\|_{\widehat{V}}\mathrm{d}s\\
&\leqslant 2L_G\int_0^t\sup_{r\in[0,s]}\|wr\|^2\mathrm{d}s+2\delta_1\int_0^t\|w(s)\|_{\widehat{V}}^2\mathrm{d}s+\frac{\lambda^2}{2\delta_1}\int_0^t\|w(s)\|^2\|w^1(s)\|_{\widehat{V}}^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant (2L_G+\frac{\lambda^2}{2\delta_1})\int_0^t(1+\|w^1(s)\|_{\widehat{V}}^2)\sup_{r\in[0,s]}\|w(r)\|^2\mathrm{d}s+2\delta_1\int_0^t\|w(s)\|_{\widehat{V}}^2\mathrm{d}s. \qquad (62)
\end{aligned}$$

从 (62) 有

$$\sup_{r\in[0,t]}\|w(t)\|^2\leqslant(2L_G+\frac{\lambda^2}{2\delta_1})\int_0^t(1+\|w^1(s)\|_{\widehat{V}}^2)\sup_{r\in[0,s]}\|w(r)\|^2\mathrm{d}s. \qquad (63)$$

对 (63) 使用 Gronwall 不等式有

$$\sup_{r\in[0,t]}\|w(t)\|=0,\forall t\in[0,T].$$

从而我们证明了解的唯一性。 ∎

最后，我们验证弱解相对于初始值的稳定性。

**定理3.3.** (解关于初值的稳定性) *设定理 3.1 的条件成立，且设 $u^{(i)}$ 是问题 (20)-(21) 在 $i=1,2$ 时对应于初值 $\phi^{(i)}\in BCL_{-\infty}(\widehat{H})$ 的解，则*

$$\begin{aligned}
\max_{r\in[0,t]}\|w^{(1)}(r)-w^{(2)}(r)\|^2&\leqslant c\big(\|\phi^{(1)}(0)-\phi^{(2)}(0)\|^2+\|\phi^{(1)}(s)-\phi^{(2)}(s)\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2\big)\\
&\quad\times\exp\big(c\int_0^t(1+\|w^{(1)}(s)\|_{\widehat{V}}^2)\mathrm{d}s\big), \qquad (64)
\end{aligned}$$

$$\|w_t^{(1)}-w_t^{(2)}\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2\leqslant c\|\phi^{(1)}-\phi^{(2)}\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2\exp\big(c\int_0^t(1+\|w^{(1)}(s)\|_{\widehat{V}}^2)\mathrm{d}s\big). \qquad (65)$$

**证** 设 $w^{(i)}=(u^{(i)},\omega^{(i)})(i=1,2)$ 是问题 (20)-(21) 对应于初值 $\phi^{(i)}\in BCL_{-\infty}(\widehat{H})$ 的解，我们定义

$$u=u^{(1)}-u^{(2)},\omega=\omega^{(1)}-\omega^{(2)},w=(u,\omega)=w^{(1)}-w^{(2)},\phi(.)=\phi^{(1)}(.)-\phi^{(2)}(.).$$

则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w(t)\|^2+\langle Aw(t),w(t)\rangle+\langle B(u^{(1)}(t),w^{(1)}(t))-B(u^{(2)}(t),w^{(2)}(t)),w(t)\rangle\\&\quad+\langle N(w),w(t)\rangle=(G(t,w_t^{(1)})-G(t,w_t^{(2)}),w(t)),\ t\in(0,T].\end{aligned}\tag{66}$$

类似于 (60) 有

$$\begin{aligned}&|\langle B(u^{(1)}(t),w^{(1)}(t))-B(u^{(2)}(t),w^{(2)}(t)),w(t)\rangle|\\&=|\langle B(u(t),w^{(1)}(t))w(t)\rangle|\\&\leqslant\lambda\|w(t)\|\|w(t)\|_{\widehat{V}}\|w^1(t)\|_{\widehat{V}}\\&\leqslant\delta_1\|w(t)\|_{\widehat{V}}^2+\frac{\lambda^2}{4\delta_1}\|w(t)\|^2\|w^1(t)\|_{\widehat{V}}^2.\end{aligned}\tag{67}$$

对于 $s\in[0,t]$, 我们有

$$\begin{aligned}\|w_s\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}&=\sup_{\theta\leqslant0}\|w(s+\theta)\|\\&=\max\Big\{\sup_{\theta\in(-\infty,-s]}\|\phi(s+\theta)\|,\ \sup_{\theta\in[-s,0]}\|w(s+\theta)\|\Big\}\\&\leqslant\max\big\{\|\phi(s)\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})},\max_{\theta\in[0,s]}\|w(s)\|\big\}.\end{aligned}\tag{68}$$

由假设 (**II**)(iii) 和 (68) 得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t(G(s,w_s^{(1)})-G(s,w_s^{(2)}),w(s))\mathrm{d}s\leqslant\int_0^tL_G\|w_s\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}\|w(s)\|\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_0^tL_G\|\phi(s)\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}\|w(s)\|\mathrm{d}s+\int_0^tL_G\|w(s)\|\cdot\max_{\theta\in[0,s]}\|w(\theta)\|\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{69}$$

综合 (18), (67) 和 (69), 对 (66) 积分得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|w(t)\|^2+\delta_1\int_0^t\|w(s)\|_{\widehat{V}}^2\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{1}{2}\|\phi(0)\|^2+\delta_1\int_0^t\|w(s)\|_{\widehat{V}}^2\mathrm{d}s+\frac{\lambda^2}{4\delta_1}\int_0^t\|w(s)\|^2\|w^1(s)\|_{\widehat{V}}^2\mathrm{d}s\\&\quad+\int_0^tL_G\|\phi(s)\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}\|w(s)\|\mathrm{d}s+\int_0^tL_G\|w(s)\|\cdot\max_{\theta\in[0,s]}\|w(\theta)\|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

即

$$\|w(t)\|^2 \leqslant \|\phi(0)\|^2 + \frac{\lambda^2}{2\delta_1}\int_0^t \|w(s)\|^2\|w^1(s)\|_{\widehat{V}}^2 \mathrm{d}s + \int_0^t 2L_G\|\phi(s)\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}\|w(s)\|\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t 2L_G\|w(s)\|\cdot \max_{\theta\in[0,s]}\|w(\theta)\|\mathrm{d}s. \tag{70}$$

由于

$$\begin{aligned}2L_G\|\phi(s)\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}\int_0^t \|w(s)\|\mathrm{d}s &\leqslant \frac{L_G}{2}\|\phi(s)\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2 + 2L_G\Big(\int_0^t \|w(s)\|\mathrm{d}s\Big)^2\\ &\leqslant \frac{L_G}{2}\|\phi(s)\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2 + 2L_G t\int_0^t \|w(s)\|^2\mathrm{d}s\\ &\leqslant c\|\phi(s)\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2 + c\int_0^t \max_{r\in[0,s]}\|w(r)\|^2\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{71}$$

将 $t$ 替换为 $r\in[0,t]$, 对 (70) 中的 $r$ ($r\in[0,t]$)取最大值，并运用 (71) 我们有

$$\max_{r\in[0,t]}\|w(r)\|^2 \leqslant \|\phi(0)\|^2 + c\|\phi(s)\|_{BCL_{-\infty}(\widehat{H})}^2 + c\int_0^t \big(1+\|w^{(1)}(s)\|_{\widehat{V}}^2\big)\max_{r\in[0,s]}\|w(r)\|^2\mathrm{d}s. \tag{72}$$

对式 (72) 应用 Gronwall 不等式，得到式 (64). 由式 (72) 和式 (68) 引出式 (65). 由此证明了弱解的稳定性。 ▮

## 参考文献


[1] Eringen, A.C. (1966) Theory of Micropolar Fluids. *Journal of Mathematics and Mechanics*, **16**, 1-18. https://doi.org/10.1512/iumj.1967.16.16001

[2] Lukaszewicz, G. (1999) Micropolar Fluids: Theory and Applications. Springer Science & Business Media, Berlin.

[3] Lukaszewicz, G. (2001) Long Time Behavior of 2D Micropolar Fluid Flows. *Mathematical and Computer Modelling*, **34**, 487-509. https://doi.org/10.1016/S0895-7177(01)00078-4

[4] Dong, B.Q. and Zhang, Z. (2010) Global Regularity of the 2D Micropolar Fluid Flows with Zero Angular Viscosity. *Journal of Differential Equations*, **249**, 200-213. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.03.016

[5] Ferreira, L.C.F. and Precioso, J.C. (2013) Existence of Solutions for the 3D-Micropolar Fluid System with Initial Data in Besov-Morrey Spaces. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **64**, 1699-1710. https://doi.org/10.1007/s00033-013-0310-8

[6] Galdi, G.P. and Rionero, S. (1977) A Note on the Existence and Uniqueness of Solutions of the Micropolar Fluid Equations. *International Journal of Engineering Science*, **15**, 105-108. https://doi.org/10.1016/0020-7225(77)90025-8

[7] Lukaszewicz, G. (1990) On Non-Stationary Flows of Incompressible Asymmetric Fluids. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **13**, 219-232. https://doi.org/10.1002/mma.1670130304

[8] Lukaszewicz, G. (2003) Asymptotic Behavior of Micropolar Fluid Flows. *International Journal of Engineering Science*, **41**, 259-269. https://doi.org/10.1016/S0020-7225(02)00208-2

[9] Chen, J., Chen, Z.M. and Dong, B.Q. (2006) Existence of $H^2$-Global Attractors of two-Dimensional Micropolar Fluid Flows. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **322**, 512-522. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.09.011

[10] Dong, B.Q. and Chen, Z.M. (2006) Global Attractors of Two-Dimensional Micropolar Fluid Flows in Some Unbounded Domains. *Applied Mathematics and Computation*, **182**, 610-620. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.04.024

[11] Lukaszewicz, G. and Sadowski, W. (2004) Uniform Attractor for 2D Magneto-Micropolar Fluid Flow in Some Unbounded Domains. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **55**, 247-257. https://doi.org/10.1007/s00033-003-1127-7

[12] Nowakowski, B. (2013) Long-Time Behavior of Micropolar Fluid Equations in Cylindrical Domains. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **14**, 2166-2179. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2013.04.005

[13] Zhao, C., Zhou, S. and Lian, X. (2008) $H^1$-Uniform Attractor and Asymptotic Smoothing Effect of Solutions for a Nonautonomous Micropolar Fluid Flow in 2D Unbounded Domains. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **9**, 608-627. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2006.12.005

[14] Chen, J., Dong, B.Q. and Chen, Z.M. (2007) Uniform Attractors of Non-Homogeneous Micropolar Fluid Flows in Non-Smooth Domains. *Nonlinearity*, **20**, 1619-1635. https://doi.org/10.1088/0951-7715/20/7/005

[15] Chen, J., Dong, B.Q. and Chen, Z.M. (2007) Pullback Attractors of Non-Autonomous Micropolar Fluid Flows. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **336**, 1384-1394. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.044

[16] Lukaszewicz, G. and Tarasińska, A. (2009) On $H^1$-Pullback Attractors for Nonautonomous Micropolar Fluid Equations in a Bounded Domain. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **71**, 782-788. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.10.124

[17] Chen, G. (2009) Pullback Attractor for Non-Homogeneous Micropolar Fluid Flows in Non-Smooth Domains. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **10**, 3018-3027. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.10.005

[18] Zhao, C. and Zhou, S. (2007) Pullback Attractors for a Non-Autonomous Incompressible Non-Newtonian Fluid. *Journal of Differential Equations*, **238**, 394-425. https://doi.org/10.1016/j.jde.2007.04.001

[19] Caraballo, T. and Real, J. (2003) Asymptotic Behaviour of Two-Dimensional Navier-Stokes Equations with Delays. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **459**, 3181-3194. https://doi.org/10.1098/rspa.2003.1166

[20] Caraballo, T. and Real, J. (2004) Attractors 2D-Navier-Stokes Modes with Delays. *Journal of Differential Equations*, **205**, 271-497. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.04.012

[21] Marin-Rubio, P. and Real, J. (2007) Attractors for 2D-Navier-Stokes Equations with Delays on Some Unbounded Domains. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **67**, 2784-2799. https://doi.org/10.1016/j.na.2006.09.035

[22] Zhao, C. and Sun, W. (2017) Global Well-Posedness and Pullback Attractors for a Two-Dimensional Non-Autonomous Micropolar Fluid Flows with Infinite Delays. *Communications in Mathematical Sciences*, **15**, 97-121. https://doi.org/10.4310/CMS.2017.v15.n1.a5

[23] Liu, L., Caraballo, T. and Marín-Rubio, P. (2018) Stability Results for 2D Navier-Stokes Equations with Unbounded Delay. *Journal of Differential Equations*, **265**, 5685-5708. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.07.008

[24] Málek, J., Nečas, J., Rokyta, M. and Ružička, M. (1996) Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDE. CRC Press, New York.

[25] Hino, Y., Kato, J. and Naito, T. (1991) Functional Differential Equations with Infinite Delay. Springer-Verlag, Berlin.

[26] Chepyzhov, V.V. and Vishik, M.I. (2002) Attractors for Equations of Mathematical Physics. American Mathematical Society, Providence. https://doi.org/10.1090/coll/049

[27] Marín-Rubio, P., Real, J. and Valero, J. (2011) Pullback Attractors for a Two-Dimensional Navier-Stokes Model in an Infinite Delay Case. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, **74**, 2012-2030. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.11.008