Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(5), 2152-2158
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125219

Hans汉斯

广义(ω)性质

郑宇洁，刘爱芳*

太原理工大学数学学院，山西 太原

收稿日期：2023年4月17日；录用日期：2023年5月9日；发布日期：2023年5月16日

摘 要

Weyl定理作为算子谱理论的重要研究内容，被广泛应用在代数几何，线性空间理论，拓扑学等不同的数学分支中，有很大的应用和理论价值。本文基于已有的理论知识，研究Weyl定理的变化，结合广义Kato型算子定义的谱集$\rho_{gk}(T)$，给出Hilbert空间上有界线性算子满足广义(ω)性质的判定条件。

关键词

CI算子，广义(ω)性质，广义Kato型算子

The Generalized Property (ω)

Yujie Zheng, Aifang Liu*

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Apr. 17th, 2023; accepted: May 9th, 2023; published: May 16th, 2023

Abstract

As an important research content of operator spectrum theory, Weyl theorem is widely used in algebraic geometry, linear space theory, topology and other different branches of mathematics, and has great application and theoretical value. In this paper, based on the existing theoretical knowledge, we study the variation of Weyl theorem, combine with the spectrum set $\rho_{gk}(T)$ defined by the generalized Kato type operators, and give the judgment conditions for the bounded operators on Hilbert space to satisfy the generalized properties (ω).

Keywords

CI Operator, Generalized Property (ω), Generalized Kato Type Operators

*通讯作者。

文章引用: 郑宇洁, 刘爱芳. 广义(ω)性质[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2152-2158.
DOI: 10.12677/aam.2023.125219

1. 引言

在算子理论的研究中关于谱理论的内容是一个热门的探究方向。在文章[1]中学者给出了算子具备一致可逆性的充要条件。1909 年，H. Weyl [2]在检查 Hermite 算子 T 的所有紧摄动的谱时发现，λ 属于 T 的所有紧摄动的谱的充要条件的是 λ 属于 T 的谱集但不为 T 的谱集中孤立的有限重特征值。现在这个结论被称作 Weyl 定理。二十世纪 90 年代，Harte 和 Lee [3]，Rakočević [4] [5]，以及 Aiena [6] [7] [8]等众多学者们都对 Weyl 定理的若干变形和推广进行了研究。在本文中，重点探究 Weyl 定理的一种变化，将其称之为广义(ω)性质。关键是结合广义 Kato 型算子的性质定义的谱集，给出 Hilbert 空间上有界线性算子满足广义(ω)性质的判定条件。

在本文中，用 H 来表示一个无限维的复 Hilbert 空间，$B(H)$表示 H 上的全体有界线性算子。算子 $T\in B(H)$，它的谱集是 $\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{不可逆}\}$，记 $\rho(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma(T)$。$n(T)$记作零空间 $N(T)$的维数，$d(T)$记为值域 $R(T)$的余维数。称 $T\in B(H)$是上半 Fredholm 算子，如果 $n(T)<\infty$ 且 $R(T)$是闭的；称 T 是下半 Fredholm 算子，如果 $d(T)<\infty$ 且 $R(T)$是闭的，那么算子 $T\in B(H)$称为是 Fredholm 算子，若 $R(T)$是闭的且 $n(T),d(T)<\infty$。如果 $T\in B(H)$是上(或者下)半 Fredholm 算子，那么 T 的指标 $ind(T)$可以用 $ind(T)=n(T)-d(T)$来计算。记 $\rho_{SF}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{是半Fredholm算子}\}$。Weyl 算子是指标为零的 Fredholm 算子。上半 Fredholm 谱 $\sigma_{SF_+}(T)$，下半 Fredholm 谱 $\sigma_{SF_-}(T)$和 Weyl 谱分别定义为：

$$\sigma_{SF_+}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{不是上半Fredholm算子}\};$$

$$\sigma_{SF_-}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{不是下半Fredholm算子}\};$$

$$\sigma_w(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{不是上半Weyl算子}\}。$$

如果 $N(T)=\{0\}$ 并且 $R(T)$是闭的，$T\in B(H)$称为是下有界算子。定义 $SF_+^-(H)=\{T\in B(H),T\text{为上半Fredholm算子且}ind(T)\le 0\}$。那么本质逼近点谱 $\sigma_{ea}(T)$和逼近点谱 $\sigma_a(T)$分别定义为：

$$\sigma_{ea}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\notin SF_+^-(H)\};$$

$$\sigma_a(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{不为下有界算子}\};$$

如果 n 是满足 $N(T^n)=N(T^{n+1})$成立的最小的非负整数，则 n 为算子 T 的升标 $asc(T)$，如果这样的整数不存在，则记 $asc(T)=+\infty$；而当 n 是满足 $R(T^n)=R(T^{n+1})$成立的最小的非负整数，则 n 是算子 T 的降标 $des(T)$，同样当这样的整数不存在时，则记 $des(T)=+\infty$。若 $n(T),d(T)<\infty$，那么有 $asc(T)=des(T)$。倘若 T 的降标和升标都是有限的，那么 T 为 Drazin 可逆的。$T\in B(H)$称为是 Browder 算子，若 T 是 Fredholm 算子且 $asc(T)=des(T)<\infty$，即 T 为 Fredholm 算子且当 $\lambda\ne 0$ 时 $T-\lambda I$ 是可逆的。Browder 谱定义为 $\sigma_b(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{不为Browder算子}\}$。集合 $\pi_{00}(T)$表示谱集中孤立的有限重的特征值的全体。称 T 为 Riesz 算子，若任给 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$T-\lambda I$ 为 Fredholm 算子。

$T\in B(H)$称作是 Kato 算子[9]，如果 $R(T)$是闭的且有 $N(T)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R(T^n)$。

定义 1. Kato 算子 $T\in B(H)$是广义正则的，倘若有 $T\in SF_+^-(H)$；$T\in B(H)$定义为有广义 Kato 分解(记

作 GKD)，假如有 T 的一对不变子空间 (M,N)，且为闭的，致使 $X=M\oplus N$ 并且 $T|_N$ 是拟幂零的，$T|_M$ 为广义正则的。倘若在 GKD 中 $T|_N$ 是幂零的，那么 T 称作是广义 Kato 型的。

显然地，要是 T 为广义 Kato 型，那么有 $\varepsilon>0$，当 $0<|\lambda|<\varepsilon$ 时，$T-\lambda I$ 是广义正则的。对所有的 $\lambda\in\pi_{00}(T)$，$T-\lambda I$ 成为广义 Kato 型的充要条件是 $\pi_{00}(T)=P_{00}(T)$，这里 $P_{00}(T)=\sigma(T)\setminus\sigma_b(T)$。

在 Hilbert 空间中，算子 $T\in B(H)$ 具备一致可逆性(简记为 CI 算子)或把它叫做一致可逆算子，若是对任给的 $S\in B(H)$, $ST\in B(H)^{-1}\Leftrightarrow TS\in B(H)^{-1}$。在文章([1] [10])中也充分讨论了一致可逆性。

2. 广义(ω)性质的判定

记 $\sigma_{CI}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{不是}CI\text{算子}\}$。一致可逆谱 $\sigma_{CI}(T)$ 是开集或者空集，同时具备以下所述性质([11])。

定理 1. 令 $T\in B(H)$，则

$$\sigma_{CI}(T)=\sigma(T)\setminus\left(\sigma^{left}(T)\cap\sigma^{right}(T)\right),$$

且

$$\sigma_{CI}(T)\subseteq\operatorname{int}\sigma(T)。$$

$T\in B(H)$ 有广义(ω)性质[12]，是指 T 满足：$\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=E(T)$，这里 $E(T)$ 是 T 的谱集 $\sigma(T)$ 中全体孤立的特征值。

接下来讨论 T 具备广义(ω)性质的充分必要条件，所以需要定义另外新的谱集。让 $\rho_{gk}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\text{存在}\varepsilon>0,\text{使得}0<|\mu-\lambda|<\varepsilon\text{时，那么}T-\mu I\text{为广义}Kato\text{型算子}\}$，同时 $\sigma_1(T)=\mathbb{C}\setminus\rho_1(T)$。显然得出 $\sigma_{gk}(T)\subseteq\sigma_{ea}(T)\subseteq\sigma_a(T)$。

定理 2. $T\in B(H)$ 具备广义(ω)性质的充要条件是

$$\sigma_D(T)=\sigma_{gk}(T)\cup\overline{\sigma_{CI}(T)}\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\},$$

且有 $\left[\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)\right]\cap\overline{\sigma_{CI}(T)}=\varnothing$。

证明. 假设 T 具有广义(ω)性质。包含 $\sigma_{gk}(T)\cup\overline{\sigma_{CI}(T)}\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\subseteq\sigma_D(T)$ 显然成立。下面证明另一个包含。令 $\lambda_0\notin\sigma_{gk}(T)\cup\overline{\sigma_{CI}(T)}\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}$，不妨碍设 $\lambda_0\in\sigma(T)$。那么有 $\varepsilon>0$，当 $0<|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ 时，使得 $T-\lambda I$ 为广义 Kato 型算子。对于 λ，有 $\varepsilon_1>0$，当 $0<|\mu-\lambda|<\varepsilon_1$ 时，可以得到 $T-\mu I$ 是广义正则的。因 T 具备广义(ω)性质可知 $T-\mu I$ 是下有界的([13])。又因 $\lambda_0\notin\overline{\sigma_{CI}(T)}$，故而当 $0<|\mu-\lambda|<\varepsilon_1$ 时，$T-\mu I$ 是可逆的，即有 $\lambda\in iso\sigma(T)\cup\rho(T)$。又由于 $\lambda_0\notin acc\left[iso\sigma(T)\right]$ 且 $n(T-\lambda_0 I)>0$，所以 $\lambda_0\in iso\sigma(T)$，从而有 $\lambda_0\in E(T)$。因 T 具备广义(ω)性质易知 $T-\lambda_0 I$ 是 Drazin 可逆，即 $\lambda_0\notin\sigma_D(T)$。那么就有

$$\sigma_D(T)=\sigma_{gk}(T)\cup\overline{\sigma_{CI}(T)}\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}。$$

又由于对任给的 $\lambda\in\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)$，因 T 具备广义(ω)性质易知 $T-\lambda I$ 是 Drazin 可逆。于是 $\lambda\notin\overline{\sigma_{CI}(T)}$，即得 $\left[\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)\right]\cap\overline{\sigma_{CI}(T)}=\varnothing$。

相反，设 $\sigma_D(T)=\sigma_{gk}(T)\cup\overline{\sigma_{CI}(T)}\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}$，且有 $\left[\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)\right]\cap\left[\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)\right]\cap\overline{\sigma_{CI}(T)}=\varnothing$。令 $\lambda_0\in\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)$，则有 $T-\lambda_0 I\in SBF_+^-(H)$。

知道上半 B-Fredholm 算子$T-\lambda_0 I$是上半 Fredholm 算子当且仅当$n(T-\lambda_0 I)<\infty$。由此易证

$$\lambda_0 \notin \sigma_{gk}(T)\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\left\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\right\}。$$

由$\left[\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)\right]\cap\overline{\sigma_{CI}(T)}=\varnothing$知$\lambda_0\notin\overline{\sigma_{CI}(T)}$。于是

$$\lambda_0 \notin \sigma_{gk}(T)\cup\overline{\sigma_{CI}(T)}\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\left\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\right\},$$

即$T-\lambda I$是 Drazin 可逆的。故$\lambda_0\in E(T)$。反之，令$\lambda_0\in E(T)$，很容易看出

$$\lambda_0 \notin \sigma_{gk}(T)\cup\overline{\sigma_{CI}(T)}\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\left\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\right\}。$$

所以$\lambda_0\notin\sigma_D(T)$，即$\lambda_0\in\sigma_a(T)\setminus\sigma_{ea}(T)$。这样就有$\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=E(T)$，即$T$有广义$(\omega)$性质。

$T\in B(H)$称为是 a-polaroid，如果$\lambda\in iso\sigma_a(T)\Rightarrow T-\lambda I$是 Drazin 可逆的。

推论 1. $T\in B(H)$是 a-polaroid 的，因此T具备广义(ω)性质的充要条件是

$$\sigma_D(T)=\sigma_1(T)\cup\overline{\sigma_{CI}(T)}\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\left\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\right\}。$$

证明. 由定理 2. 可以看出仅需证当$T\in B(H)$为 a-polaroid 时$\left[\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)\right]\cap\overline{\sigma_{CI}(T)}=\varnothing$。假若$\lambda_0\in\left[\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)\right]\cap\overline{\sigma_{CI}(T)}=\varnothing$，那么当$0<|\lambda-\lambda_0|$足够小时，$\lambda_0\notin\sigma_{CI}(T)$，$T-\lambda I$为广义正则。因而存在$\lambda_n\in\sigma_{CI}(T)$，使得当$\lambda_n\to\lambda_0(n\to\infty)$，$T-\lambda_n I$为广义正则。根据$\lambda_n\in\sigma_{CI}(T)$易知$T-\lambda_n I$下有界但是不可逆。进而有$\lambda_0\in iso\sigma_a(T)$。又因为$T$是 a-polaroid，所以$T-\lambda_0 I$是 Drazin 可逆，可见当$0<|\lambda-\lambda_0|$足够小时，$T-\lambda I$可逆，即$\lambda_0\notin\sigma_{CI}(T)$矛盾。所以$\left[\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)\right]\cap\overline{\sigma_{CI}(T)}=\varnothing$。

推论 2. $T\in B(H)$具备(ω)性质且$P_{00}(T)=\pi_{00}^a(T)$当且仅当
$\sigma_b(T)=\sigma_1(T)\cup\left[\overline{\sigma_{CI}(T)}\cap acc\left[iso\sigma_a(T)\right]\right]\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\left\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\right\}$，其中
$\pi_{00}^a(T)=\pi_0(T)\cap iso\sigma_a(T)$。

证明. 假若T有(ω)性质，$P_{00}(T)=\pi_{00}^a(T)$。则包含
$\sigma_1(T)\cup\left[\overline{\sigma_{CI}(T)}\cap acc\left[iso\sigma_a(T)\right]\right]\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\left\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\right\}\subseteq\sigma_b(T)$成立。下面我们来证另外一个包含。由定理 2.仅需证$\sigma_b(T)\subseteq\sigma_1(T)\cup acc\sigma_a(T)\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\left\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)\right\}$。令$\lambda_0\notin\sigma_1(T)\cup acc\sigma_a(T)\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\left\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\right\}$，则$0<n(T-\lambda_0 I)<\infty$，$\lambda_0\in iso\sigma_a(T)$。因为$P_{00}(T)=\pi_{00}^a(T)$，所以$T-\lambda_0 I$是 Browder 算子。继而得$\lambda_0\notin\sigma_b(T)$。

相反地，假设有$\sigma_b(T)=\sigma_1(T)\cup\left[\overline{\sigma_{CI}(T)}\cap acc\left[iso\sigma_a(T)\right]\right]\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\left\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\right\}$，则$\sigma_b(T)=\sigma_1(T)\cup\overline{\sigma_{CI}(T)}\cup\left[iso\sigma(T)\right]\cup\left\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\right\}$。关于$(\omega)$性质的证明，根据定理 2.仅需证$\left[\sigma_a(T)\setminus\sigma_{ea}(T)\right]\cap\overline{\sigma_{CI}(T)}=\varnothing$。否则，假设$\lambda_0\in\left[\sigma_a(T)\setminus\sigma_{ea}(T)\right]\cap\overline{\sigma_{CI}(T)}$。那么$\lambda_0\notin\sigma_{CI}(T)$且存在$\varepsilon>0$当$0<|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$时，得出$T-\lambda I$是广义正则的，$n(T-\lambda I)$为常数。同样也存在$\lambda_n\to\lambda_0(n\to\infty)$满足$\lambda_n\in\sigma_{CI}(T)$，$0<|\lambda_n-\lambda_0|<\varepsilon$。因而$T-\lambda_n I$为下有界的但是它不可逆，所以$\lambda_0\in iso\sigma_a(T)$。如此证明了：

$$\lambda_0\notin\sigma_1(T)\cup\left[\overline{\sigma_{CI}(T)}\cap acc\left[iso\sigma_a(T)\right]\right]\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\left\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\right\}。$$

因$T-\lambda_0 I$是 Browder 算子，与$\lambda_0\notin\sigma_{CI}(T)$矛盾。因而$T$具有$(\omega)$性质。再结合
$\pi_{00}^a(T)\subseteq\mathbb{C}\setminus\left\{\sigma_1(T)\cup\left[\overline{\sigma_{CI}(T)}\cap acc\sigma_a(T)\right]\cup acc\left[iso\sigma(T)\right]\cup\left\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\right\}\right\}$知，

$\pi_{00}^{a}(T)\subseteq[\sigma(T)\setminus\sigma_b(T)]$，故 $\pi_{00}^{a}(T)=P_{00}(T)$。

在推论 2.中“$P_{00}(T)=\pi_{00}^{a}(T)$”是本质的。例如 $A,B\in B(l^2)$ 定义为：

$$A(x_1,x_2,x_3,\cdots)=\left(0,0,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\cdots\right),$$

$$B(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\cdots),$$

令 $T=A\oplus B\in B(l^2\oplus l^2)$。则 T 有(ω)性质且 $P_{00}(T)\neq\pi_{00}^{a}(T)$。通过计算知 $\sigma_b(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leq 1\}$，但 $\sigma_1(T)\cup\left[\overline{\sigma_{CI}(T)}\cap acciso\sigma_a(T)\right]\cup acc[iso\sigma(T)]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}=\{\lambda\in\mathbb{C}:0<|\lambda|\leq 1\}$。

如果 T 有(ω)性质那么我们可以证明 $\sigma_a(T)\cap\sigma_b(T)=\sigma_{ea}(T)$。以下让 $H(T)$ 为定义在 $\sigma(T)$ 的任一分支上不为常值的复值函数全体，并且在 $\sigma(T)$ 的邻域上解析。

定理 3. 假设 $T\in B(H)$ 是 isoloid 的，同时有广义(ω)性质，于是下列叙述等价：

(1) 对任意的 $f\in H(T)$，$f(T)$ 具有广义(ω)性质；

(2) 对任意的 $f\in H(T)$，$\sigma_{SBF_+^-}(f(T))=f\left(\sigma_{SBF_+^-}(T)\right)$，并且假若 $\sigma_a(T)\neq\sigma_{SBF_+^-}(T)$ 那么 $\sigma(T)=\sigma_a(T)$；

(3) 对任意的 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{SBF_+}(T)$，$ind(T-\lambda I)ind(T-\mu I)\geq 0$，并且假若 $\sigma_a(T)\neq\sigma_{SBF_+^-}(T)$，那么有 $\sigma(T)=\sigma_a(T)$。

证明. (1)$\Rightarrow$(2) 对于任意的 $f\in H(T)$，因为 T 具备广义(ω)性质，于是由逼近点谱和 Drazin 谱满足谱映射定理知，$\sigma_{SBF_+^-}(f(T))=\sigma_a(f(T))\cap\sigma_D(f(T))=f(\sigma_a(T)\cap\sigma_D(T))=f\left(\sigma_{SBF_+^-}(T)\right)$。

下面我们证若 $\sigma_a(T)\neq\sigma_{SBF_+^-}(T)$，则 $\sigma(T)=\sigma_a(T)$。令 $\lambda_0\in\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)$，由于 T 具有广义(ω)性质可知，$T-\lambda_0 I$ 为 Drazin 可逆。对任何的 $\mu_0\notin\sigma_a(T)$，假设 $f(T)=(T-\mu_0 I)(T-\lambda_0 I)$，则有 $0\in\sigma_a(f(T))\setminus\sigma_{SBF_+^-}(f(T))$。根据 $f(T)$ 具有广义(ω)性质，故而可知 $f(T)$ 是 Drazin 可逆的，继而 $T-\mu_0 I$ 是 Drazin 可逆的。又因为 $T-\mu_0 I$ 是下有界的，为此 $T-\mu_0 I$ 可逆，即 $\mu_0\notin\sigma(T)$。这样就有 $\sigma(T)=\sigma_a(T)$。

(2)$\Rightarrow$(1)。假若 $\sigma_a(T)=\sigma_{SBF_+^-}(T)$，则由 T 具备广义(ω)性质知 $E(T)=\varnothing$。对任何的 $f\in H(T)$，有 $\sigma_a(f(T))=f(\sigma_a(T))=f\left(\sigma_{SBF_+^-}(T)\right)=\sigma_{SBF_+^-}(f(T))$。又 $E(f(T))\subseteq f(E(T))$，故 $\pi_{00}(f(T))=\varnothing$。这种情况下有 $\sigma_a(f(T))\setminus\sigma_{SBF_+^-}(f(T))=E(f(T))=\varnothing$，即 $f(T)$ 有广义(ω)性质。下面假设 $\sigma_a(T)\neq\sigma_{SBF_+^-}(T)$，则 $\sigma(T)=\sigma_a(T)$。若 $\mu_0\in\sigma_a(f(T))\setminus\sigma_{SBF_+^-}(f(T))$。令

$$f(T)-\mu_0 I=(T-\lambda_1 I)^{n_1}(T-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(T-\lambda_k I)^{n_k}g(T),$$

其中 $\lambda_i\neq\lambda_j$，$g(T)$ 可逆。因为 $\sigma_{SBF_+^-}(f(T))=f\left(\sigma_{SBF_+^-}(T)\right)$，$\mu_0\notin\sigma_{SBF_+^-}(f(T))$，所以 $\lambda_i\notin\sigma_{SBF_+^-}(T)$。可以设 $1\leq i\leq j$ 时 $n(T-\lambda_i I)=0$；$j<i\leq k$ 时 $n(T-\lambda_i I)>0$。从而当 $1\leq i\leq j$ 时 $T-\lambda_i I$ 是下有界的，又由 $\sigma(T)=\sigma_a(T)$，故 $T-\lambda_i I$ 为可逆的。当 $j<i\leq k$ 时 $\lambda_i\in\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)$，由于 T 有广义(ω)性质可知 $T-\lambda_i I$ 为 Drazin 可逆，从而有 $f(T)-\mu_0 I$ 是 Drazin 可逆，$\mu_0\in E(f(T))$。

相反地，若 $\mu_0\in E(f(T))$，则令

$$f(T)-\mu_0 I=(T-\lambda_1 I)^{n_1}(T-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(T-\lambda_k I)^{n_k}g(T),$$

其中 $\lambda_i\neq\lambda_j$，$g(T)$ 可逆。不失一般性，设 $\lambda_i\in\sigma(T)$，于是 $\lambda_i\in iso\sigma(T)$。由 T 是 isoloid 的知 $\lambda_i\in E(T)$。因为 T 有广义(ω)性质，所以 $T-\lambda_i I$ 是 Drazin 可逆的，从而 $f(T)-\mu_0 I$ 是 Drazin 可逆的，$\mu_0\in\sigma_a(f(T))\setminus\sigma_{SBF_+^-}(f(T))$。这样就证明了 $f(T)$ 有广义(ω)性质。

(1)⇒(3)。假设存在 $\lambda_0,\mu_0\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{SBF_+}(T)$，使得 $ind(T-\lambda_0 I)=n>0,\ ind(T-\mu_0 I)=-m<0$。若 m 有限时记 $f(T)=(T-\lambda_0 I)^m(T-\mu_0 I)^n$，否则让 $f(T)=(T-\lambda_0 I)(T-\mu_0 I)$，从而有 $0\in\sigma_a(f(T))\setminus\sigma_{SBF_+^-}(f(T))$。又因为 $f(T)$ 有广义(ω)性质，且 $f(T)$ 为 Drazin 可逆的，从而 $T-\lambda_0 I$ 和 $T-\mu_0 I$ 全为 Drazin 可逆的。这里与 $ind(T-\lambda_0 I)=n>0$ 矛盾。所以给 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{SBF_+}(T), ind(T-\lambda I)ind(T-\mu I)\geq 0$。

(3)⇒(1)。设 $\mu_0\in\sigma_a(f(T))\setminus\sigma_{SBF_+^-}(f(T))$，$f(T)-\mu_0 I=(T-\lambda_1 I)^{n_1}(T-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(T-\lambda_k I)^{n_k}g(T)$，其中 $\lambda_i\neq\lambda_j$，$g(T)$ 可逆。则对任意 λ_i 有 $T-\lambda_i I$ 是上半 B-Fredholm 算子且 $\sum_{i=1}^{k}ind\left[(T-\lambda_i I)^{n_i}\right]\leq 0$。由条件 $ind(T-\lambda_i I)\leq 0$ 知 $T-\lambda_i I\in SBF_+^-(H)$。因此类似于(2)⇒(1)可证出 $f(T)$ 有广义(ω)性质。

若有 $\sigma_D(T)=\sigma_{gk}(T)$，那么 T 是 isoloid 的且有广义(ω)性质。在此情况下，对任给的 $f\in H(T)$，有 $f(\sigma_{gk}(T))=f(\sigma_D(T))=\sigma_D(f(T))\supseteq\sigma_{gk}(f(T))$。另外对任意的 $f\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{SBF_+}(T)$，有 $ind(T-\lambda I)\geq 0$。

推论 3. 若 $\sigma_D(T)=\sigma_{gk}(T)$，则

1) 任给 $f\in H(T)$，$f(T)$ 有广义(ω)性质；

2) 任给 $f\in H(T)$，$\sigma_{gk}(f(T))=f(\sigma_{gk}(T))$。

称 T 是 f-isoloid 若 $iso\sigma(T)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C}:\ 0<n(T-\lambda I)<\infty\}$。

推论 4. 设 T 是 f-isoloid 且 $\sigma_b(T)=\sigma_1(T)$，那么当 $\forall f\in H(T)$ 有 $f(\sigma_1(T))=\sigma_1(f(T))$。

证明. 需要证明对 $\forall f\in H(T)$，$f(\sigma_1(T))\subseteq\sigma_1(f(T))$。可以取 $\mu_0\notin\sigma_1(f(T))$，从而得 $n(f(T)-\mu_0 I)<\infty$ 且存在 $\delta>0$，当 $0<|\mu-\mu_0|<\delta$ 时，$f(T)-\mu I$ 为广义 Kato 型。对于上面的 μ，存在 $\delta'>0$ 当 $0<|\mu'-\mu|<\delta'$ 时 $f(T)-\mu' I\in SF_+^-(H)$ 且可得 $N(f(T)-\mu' I)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R\left[(f(T)-\mu' I)^n\right]$。设

$$f(T)-\mu' I=(T-\lambda_1' I)^{n_1}(T-\lambda_2' I)^{n_2}\cdots(T-\lambda_k' I)^{n_k}g(T)$$

其中 $\lambda_i'\neq\lambda_j'$，$g(T)$ 可逆。则对任意的 λ_i' 有是上半 Fredholm 算子，于是 $\lambda_i'\notin\sigma_1(T)$，即 $T-\lambda_i' I$ 是 Browder 算子。从而 $f(T)-\mu' I$ 是 Browder 算子。又 $N(f(T)-\mu' I)=N(f(T)-\mu' I)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[(f(T)-\mu' I)^n\right]=\{0\}$，所以 $f(T)-\mu' I$ 可逆。于是 $\mu\in iso\sigma(f(T))\cup\rho(f(T))$。设 $f(T)-\mu_0 I=a(T-\lambda_0 I)h(T)$。由 $N(T-\lambda_0 I)\subseteq N(f(T)-\mu_0 I)$ 知，$n(T-\lambda_0 I)<\infty$。因为 f 是连续的，所以存在 $\varepsilon>0$ 使得当 $0<|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ 时有 $0<|f(\lambda)-f(\lambda_0)|=|f(\lambda)-\mu_0|<\varepsilon$。于是 $f(\lambda)\in iso\sigma(f(T))\cup\rho(f(T))$，从而 $\lambda\in iso\sigma(T)\cup\rho(T)$。若 $\lambda\in iso\sigma(T)$，则由 T 是 f-isoloid 且 $\sigma_b(T)=\sigma_1(T)$ 知，$T-\lambda I\in SF_+^-(H)$，即有 $T-\lambda I$ 是广义 Kato 型的。现在证明了 $n(T-\lambda_0 I)<\infty$ 且存在 ε 当 $0<|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ 时 $T-\lambda I$ 是广义 Kato 型的。所以 $\lambda_0\notin\sigma_1(T)$，即 $\mu_0\notin f(\sigma_1(T))$。

3. 结论

本文基于广义 Kato 型算子的性质及特征定义了新的谱集 $\rho_{gk}(T)$，并且结合谱集 $\sigma_1(T),\sigma_D(T),\sigma_{CI}(T),\sigma_b(T)$ 及 T 是 f-isoloid，isoloid 等前提，给出 Hilbert 空间上有界线性算子满足广义(ω)性质的判定条件，扩大了满足广义(ω)性质的算子范围。但是由于新定义的谱集，还缺乏对在特殊摄动下广义(ω)性质稳定性的考虑。

参考文献

[1] Gong, W.B. and Han, D.G. (1994) Spectrum of the Products of Operators and Compact Perturbations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **120**, 755-760. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1994-1197538-6

[2] Weyl, H. (1909) Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1884-1940), **27**, 373-392. https://doi.org/10.1007/BF03019655

[3] Harte, R. and Lee, W.Y. (1997) Another Note on Weyl's Theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, **349**. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-97-01881-3

[4] Rakoevi, V. (1989) Operators Obeying α-Weyl's Theorem. *Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées*, **34**, 915-919.

[5] Rakoevi, V. (1985) On a Class of Operators. *Matematički Vesnik*, **37**, 423-426.

[6] Aiena, P. and Pea, P. (2006) Variations on Weyl's Theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **324**, 566-579. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.11.027

[7] Aiena, P. (2004) Fredholm and Local Spectral Theory, with Applications to Multipliers. Springer Netherlands.

[8] Aiena, P. and Biondi, M.T. (2007) Property(ω) and Perturbations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **336**, 683-692. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.02.084

[9] Harte, R.E. (1996) On Kato Non-Singularity. *Studia Mathematica*, **117**, 107-114. https://doi.org/10.4064/sm-117-2-107-114

[10] Djordjevic, D.S. (2002) Operators Consistent in Regularity. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **60**, 1-15. https://doi.org/10.5486/PMD.2002.2475

[11] Cao, X., Zhang, H. and Zhang, Y. (2010) Consistent Invertibility and Weyl's Theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **369**, 258-264. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.03.023

[12] Dai, L., Cao, X.H. and Sun, C.H. (2010) A Note on Generalized Property(ω). *Acta Mathematica Sinica*, *Chinese Series*, **53**, 219-226.

[13] Kato, T. (1966) Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag New York Inc. https://doi.org/10.1007/978-3-642-53393-8