Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(5), 2235-2254
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125229

带线性自排斥漂移项的分数O-U过程的统计推断

杨 晴，闫理坦

东华大学理学院，上海

收稿日期：2023年4月22日；录用日期：2023年5月15日；发布日期：2023年5月24日

摘 要

本文旨在利用最小二乘法研究带线性自排斥漂移项的分数O-U过程的统计推断。假设$B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ 是Hurst 指数为$\frac{1}{2} \leq H < 1$ 的分数布朗运动，我们考虑下列方程，

$$dX_t^H = dB_t^H + \sigma X_t^H dt + \nu dt - \theta \left(\int_0^t \left(X_s^H - X_u^H \right) ds \right) dt$$

其中，$X_0^H = 0$，$\theta < 0$ 和$\sigma, \nu \in \mathbb{R}$ 是三个参数。这个过程是自吸引扩散的模拟(见**Cranston and Le Jan**, *Math. Ann.* **303 (1995), 87-93**)，我们主要的目标是研究其参数的最小二乘估计。

关键词

分数布朗运动，自排斥扩散，最小二乘估计

Statistical Inference on the Fractional Ornstein-Uhlenbeck Process with the Linear Self-Repelling Drift

Qing Yang, Litan Yan

College of Science, Donghua University, Shanghai

Received: Apr. 22^{nd}, 2023; accepted: May 15^{th}, 2023; published: May 24^{th}, 2023

文章引用: 杨晴, 闫理坦. 带线性自排斥漂移项的分数O-U过程的统计推断[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2235-2254. DOI: 10.12677/aam.2023.125229

Abstract

This dissertation aim is to study statistical inference on the fractional Ornstein-Uhlenbeck process with the linear self-attracting drift by least squares estimation. Let $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ be a fractional Brownian motion with Hurst index $\frac{1}{2} \leq H < 1$. We consider the following equation,

$$dX_t^H = dB_t^H + \sigma X_t^H dt + \nu dt - \theta \left(\int_0^t \left(X_s^H - X_u^H\right) ds \right) dt$$

with $X_0^H = 0$, where $\theta < 0$ and $\sigma, \nu \in \mathbb{R}$ are three parameters. The process is an analogue of the self-attracting diffusion (Cranston and Le Jan, *Math. Ann.* 303 (1995), 87-93). Our main aim is to study the least squares estimations of its parameters.

Keywords

Fractional Brownian Motion, Self-Repelling Diffusions, Least Squares Estimation

1. 引言

1992年, Durrett和Rogers [1]对一类增长聚合物模型做了研究。在某种条件下，他们建立了如下随机微分方程解的渐近性质：

$$X_t = B_t + \int_0^t \int_0^s f(X_s - X_u) du ds, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

其中B 是一个d- 维标准布朗运动，f 是Lipschitz连续的。X_t 对应聚合物在时间t所在的位置。作者给出了在一定条件下在时间$t \to \infty$时关于解X_t的三个性质定理，并且提出三个猜想，分别在1996年、2012年、2008年被解决。如果$f(x) = g(x)x/\|x\|$ 并且$g(x) > 0$，那么上述方程的解X_t是文献 [2] 中被称为一类离散过程的连续版本，这个轨道依赖型随机微分方程可以看作是聚合物成型的模型，解过程X_t与聚合物在t时刻所在的位置有关。

1995年，Cranston和Le Jan [3]扩展了该模型，建立了所谓的自吸引扩散的概念，并且特别研究了如下两种一维情形：

(i) 线性自交互情形

$$X_t = B_t + \nu t - \theta \int_0^t \int_0^s (X_s - X_u) duds, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

其中，$\theta > 0, \nu \in \mathbb{R}$，$B$ 是一维标准布朗运动。

(ii) 常自交互情形

$$X_t = B_t + \nu t - \sigma \int_0^t \int_0^s sign(X_s - X_u) duds, \quad t \geq 0 \tag{3}$$

其中$\sigma > 0$，B 是一维标准布朗运动。

如果对函数f不作任何限定，那么方程 (1) 定义了一个自交互扩散过程。如果对任意的$x \in \mathbb{R}$，f满足$x \cdot f(x) \geq 0$ (换言之，它更倾向于远离其之前到达过的位置)，则称方程 (1) 的解为自排斥的。如果对任意的$x \in \mathbb{R}$，f满足$x \cdot f(x) \leq 0$ (换言之，它更倾向于靠近其之前到达过的位置)，则称方程 (1) 的解为自吸引的。值得注意的是，这种模型可以比拟为一个Ornstein-Uhlenbeck过程，因此，研究这类方程的渐近行为与参数估计或许是很有意义的。关于自排斥和自吸引扩散的进一步研究可参见文献 [4]、 [5]、 [6] 和 [7]，关于一般自交互扩散的研究可参见文献 [8]、 [9]、 [10] 和 [11]。

2002 年, Benaïm 等人 [4] 考虑了依赖于卷积测度的自交互扩散。方程如下：

$$dX_t = \sqrt{2} dB_t - \left(\frac{1}{t} \int_0^t \nabla W(X_t - X_s) ds \right) dt,$$

其中，W是一个交互的位势函数。从上述方程可以看出，它和布朗聚合物存在的最大区别在于它的漂移项除以t。在许多情况下，该扩散过程可以与Ornstein-Uhlenbeck 过程相比较，这样可以考虑其渐近行为。

2008 年，在分数布朗运动作为聚合物模型研究的启发下，Yan等人 [12] 考虑了下列由分数布朗运动驱动的模拟：

$$X_t^H = B_t^H - \theta \int_0^t \int_0^s (X_s^H - X_u^H) duds + \nu t \tag{4}$$

其中$\theta < 0$，B^H是Hurst指数满足$\frac{1}{2} \leq H < 1$的分数布朗运动。当$\theta > 0$ 时，Yan等人 [12]证明出当t趋向于无穷时，上述方程的解的收敛性在均方和几乎必然的条件下都是成立的，并且其解收敛到一个随机变量。Sun和Yan [13] 又在此基础上对θ 和ν 进行了参数估计。

另一方面，在2015年，Benaïm等人 [4]研究了以下形式的自排斥交互，

$$X_t = B_t + \int_0^t g(X_s) ds - \int_0^t \int_0^s f(X_s - X_u) duds,$$

其中B_t 是布朗运动，f 是周期为2π 的周期函数。在初始漂移剖面g 的适当条件下，引入了过渡半群的Feller性质和不变测度。

Yan等 [12]受文献 [14] 和 [15] 的启发考虑了随机微分方程

$$X_t = B_t^H + \int_0^t \int_0^s (f(X_s^H - X_u^H)duds,$$

其中B^H是一个Hurst 指数为$\frac{1}{2} \le H < 1$ 的分数布朗运动，并作为特例研究了如下的线性方程：

$$X_t = B_t^H + \theta \int_0^t \int_0^s (X_s^H - X_u^H)duds + \nu t, \quad t \ge 0$$

当$\theta < 0$并且$\frac{1}{2} \le H < 1$ 时，他们在文献 [12] 中证明了，当t 趋向于无穷时，这个方程的解是均方与几乎处处收敛的。

更多的研究可以参考Cranston and Mountford [10]，Gauthier [5], Herrmann and Roynette [6]，Herrmann and Scheutzow [7]，Mountford and P. Tarrés [11]，Sun and Yan [13] 以及相关文献。
最近，Yan [16]等考虑了如下带线性自排斥漂移项的分数阶Ornstein-Uhlenbeck 过程的解的相关性质：

$$X_t^H = B_t^H + \sigma \int_0^t X_s^H ds + \nu t - \theta \int_0^t \int_0^s (X_s^H - X_u^H)duds \tag{5}$$

其中$\theta < 0$ 和$\sigma, \nu \in \mathbb{R}$ 是三个参数，并且B^H 是Hurst 指数满足$\frac{1}{2} \le H < 1$的分数布朗运动。在本文中, 我们考虑在连续观测下的情形, 对上述方程进行参数估计问题的研究。事实上, 现阶段越来越多的学者研究由高斯过程驱动的随机过程的参数估计, 因为其在金融领域有很强的应用性。本文, 我们主要通过 [12]提供的方法对上述方程中参数进行估计。

2. 准备知识

这一节主要介绍本文所需要的一些准备知识以及在文献 [16]中解的相关性质. 本节我们简单回顾分数布朗运动的一些性质和一些基础结论, 详细的内容请看文献Biagini [17], Hu [18], Mishura [19], Nualart [20], Nourdin [21], Tudor [22]. 在本文中我们始终假定$H \in (0, 1)$ 是任意但给定的.

众所周知,定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}^H, P)$上的零均值高斯过程被称为Hurst指数为$H$ 的分数布朗运动,如果它满足$W_0^H = 0$以及

$$E\left[W_t^H W_s^H\right] = \frac{1}{2}\left[t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right], \quad t, s \ge 0.$$

设$\mathcal{H}$是由示性函数$\{1_{[0,t]}, t \in [0, T]\}$所生成的线性空间$\mathcal{E}$关于如下内积的完备化：

$$\langle 1_{[0,s]}, 1_{[0,t]} \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left[t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right].$$

当$\frac{1}{2} < H < 1$ 时, 它可写成

$$\mathcal{H} = \{\varphi : [0, T] \to \mathbb{R} \mid \|\varphi\|_{\mathcal{H}} < \infty\},$$

其中

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 := \alpha_H \int_0^T \int_0^T \varphi(s)\varphi(r)|s-r|^{2H-2} dsdr$$

且$\alpha_H = H(2H-1)$. 定义映射如下：

$$1_{[0,t]} \mapsto W^H(1_{[0,t]}) := \int_0^T 1_{[0,t]} dW_s^H = W_t^H, \quad t \in [0,T]$$

这个映射可以被线性扩张到$\mathcal{E}$上：

$$W^H(\varphi) = \int_0^T \varphi(t) dW_t^H.$$

则该线性映射是从$\mathcal{E}$ 到由W^H 生成的高斯空间的一个等距映射并且它可以被延拓到到$\mathcal{H}$ 上. 该映射称为关于W^H 的Wiener 积分. 如果对每一个$T > 0$,有

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 := \alpha_H \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(t)\varphi(s)|t-s|^{2H-2} dsdt < \infty,$$

则我们可以定义积分：

$$\int_0^\infty \varphi(t) dW_t^H,$$

这时,Wiener积分$\int_0^T \varphi(t)dW_t^H$ 被称为不定积分. 对于Hurst指数为$H \in (0,1)$ 的分数布朗运动W^H,考虑具有以下形式的光滑泛函的集合$\mathcal{S}$

$$F = f(W^H(\varphi_1), W^H(\varphi_2), \ldots, W^H(\varphi_n)), \tag{6}$$

其中$f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (f 及其所有的导数都有界) 且$\varphi_i \in \mathcal{H}$. 对任意$F \in \mathcal{S}$, 我们定义$\mathcal{S}$ 上的导数算子D^H (Malliavin 导数) 如下：

$$D^H F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(W^H(\varphi_1), W^H(\varphi_2), \ldots, W^H(\varphi_n))\varphi_j.$$

导数算子D^H 是从$L^2(\Omega)$ 到$L^2(\Omega;\mathcal{H})$ 的一个可闭算子. 我们用$\mathbb{D}^{1,2}$ 表示$\mathcal{S}$ 关于如下范数

$$\|F\|_{1,2} := \sqrt{E|F|^2 + E\|D^H F\|_{\mathcal{H}}^2}$$

的闭包. 记δ^H 是导数算子D^H 得共轭算子, 我们把它称为散度算子. 也就是说我们称随机变量$u \in L^2(\Omega;\mathcal{H})$ 属于散度算子的定义域, 记做$\mathrm{Dom}(\delta^H)$. 若对任意$F \in \mathcal{S}$ 有

$$E\left|\langle D^H F, u\rangle_{\mathcal{H}}\right| \le c\|F\|_{L^2(\Omega)},$$

此时, 对任意的$u \in \mathbb{D}^{1,2}$,$\delta^H(u)$ 由如下对偶关系定义

$$E\left[F\delta^H(u)\right] = E\langle D^H F, u\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{7}$$

我们有$\mathbb{D}^{1,2} \subset \mathrm{Dom}(\delta^H)$. 并且当$\frac{1}{2} < H < 1$, 对任意的$u \in \mathbb{D}^{1,2}$, 有

$$E\left[\delta^H(u)^2\right] = E\|u\|_{\mathcal{H}}^2 + E\int_{[0,T]^4} D_\xi^H u_r D_\eta^H u_s \phi(\eta,r)\phi(\xi,s) ds dr d\xi d\eta. \tag{8}$$

我们将使用如下记号表示关于过程u 的Skorohod积分

$$\delta^H(u) = \int_0^T u_s dW_s^H,$$

且不定积分定义为$\int_0^t u_s dB_s^H = \delta^H(u 1_{[0,t]})$. 我们也可以定义$f_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ 关于W^H 的重积分$I_n(f_n)$, 详细内容参见Nualart及Ortiz-Latorre [23],Nualart-Peccati [24].
考虑核函数

$$K_H(t,s) = \Gamma(H+\frac{1}{2})^{-1}(t-s)^{H-\frac{1}{2}}\mathbf{F}(H-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-H,H+\frac{1}{2},1-\frac{t}{s}),$$

其中$\mathbf{F}(a,b,c,z)$ 是Gauss超几何函数(详细的可参见Decreusefond 和Ustunel [25]). 那么, 对任意的$s,t \geq 0$, 协方差函数$R_H(t,s)$ 为:

$$R_H(t,s) = \int_0^{t\wedge s} K_H(t,r)K_H(s,r)dr.$$

定义从$\mathcal{E}$ 到$L^2([0,T])$ 的线性算子K_H^*:

$$\left(K_H^*\varphi\right)(s) = K_H(T,s)\varphi(s) + \int_s^T (\varphi(r)-\varphi(s))\frac{\partial K_H}{\partial r}(r,s)dr.$$

对任意一对阶梯函数$\varphi, \psi \in \mathcal{E}$ 我们有：

$$\langle K_H^*\varphi, K_H^*\psi\rangle_{L^2([0,T])} = \langle \varphi, \psi\rangle_{\mathcal{H}}.$$

也就是说, 算子K_H^* 是Hilbert 空间$\mathcal{H}$ 到$L^2([0,T])$ 的等距算子. 过程$B = \{B_t, t \in [0,T]\}$:

$$B_t = W^H((K_H^*)^{-1}(1_{[0,t]})) \tag{9}$$

是一布朗运动并且由于$\left(K_H^* 1_{[0,t]}\right)(s) = K_H(t,s)1_{[0,t]}(s)$, 过程$B^H$ 有如下积分表现形式：

$$W_t^H = \int_0^t K_H(t,s)dB_s. \tag{10}$$

另一方面, 与核K_H 相关的$L^2([0,T])$ 上的算子K_H 是从$L^2([0,T])$ 到$I_{0+}^{H+\frac{1}{2}}(L^2([0,T]))$ 的同构算子并且当$0 \leq H \leq \frac{1}{2}$, 它有如下表述形式:

$$(K_H h)(s) = I_{0+}^{2H} s^{\frac{1}{2}-H} I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} s^{H-\frac{1}{2}} h, \quad h \in L^2([0,T])$$

另外, 当$\frac{1}{2} \leq H \leq 1$, 有

$$(K_H h)(s) = I_{0+}^{1} s^{H-\frac{1}{2}} I_{0+}^{H-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}-H} h, \quad h \in L^2([0,T]),$$

其中I_{a+}^{α} 表示左侧分数Riemann-Liouville积分且$f \in L^1_{([a,b])}$ 的阶数$\alpha > 0$,$x \in (a,b)$,$a,b \in R$ 有

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy$$

其中Γ 为Gamma 函数. 因此对任意的$h \in I_{0+}^{H+\frac{1}{2}}(L^2[0,T])$, 当$0 \le H \le \frac{1}{2}$ 时, 逆算子K_H^{-1} 具有以下形式:

$$(K_H^{-1} h)(s) = s^{\frac{1}{2}-H} D_{0+}^{\frac{1}{2}-H} s^{H-\frac{1}{2}} D_{0+}^{2H} h$$

当$\frac{1}{2} \le H \le 1$ 时, 逆算子形式如下:

$$(K_H^{-1} h)(s) = s^{H-\frac{1}{2}} D_{0+}^{H-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}-H} h',$$

其中D_{a+}^{α} 是左侧Riemannian-Liouville 导数算子且$f \in I_{a+}^{\alpha}(L^2)$ 的阶数为$\alpha \in (0,1)$, 被定义如下:

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(y)}{(x-y)^{\alpha}} dy.$$

更多关于分数微积分的知识可参见Samko等人 [26]. 在给出参数估计的结论之前, 我们先回顾关于如下方程已经做出的部分解的性质

$$X_t^H = B_t^H + \sigma \int_0^t X_s^H ds + \nu t - \theta \int_0^t \int_0^s (X_s^H - X_u^H) du ds,$$

引理1. 假设$\theta < 0$ 并且$\frac{1}{2} \le H < 1$。定义过程

$$\xi_t^H := \int_0^t (s - \frac{\sigma}{\theta}) e^{\frac{1}{2}\theta s^2 - \sigma s} dB_s^H, \quad t \ge 0.$$

当t趋向于无穷时，有$\xi_t^H \to \xi_\infty^H := \int_0^\infty (s - \frac{\sigma}{\theta}) e^{\frac{1}{2}\theta s^2 - \sigma s} dB_s^H$在$L^2$和几乎处处的意义下成立。进一步地，定义

$$\Psi_t^H(\theta,\sigma) := \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta u^2 + \sigma u} \left(\xi_\infty^H - \xi_u^H\right) du, \quad t \ge 0.$$

则对任意的$\gamma \ge 0$，当t趋向于无穷时，有

$$t^{\gamma} e^{\frac{1}{2}\theta t^2 - \sigma t} \Psi_t^H(\theta,\sigma) \longrightarrow 0 \tag{11}$$

在L^2和几乎处处的意义下成立。

3. 若干估计

在本节中，我们将给出一些估计。为简单起见，假设$\theta < 0$，C是一个可能依赖与H、θ、ν和σ的正常数，并且它的值在不同情形下可能不同，对常量c也作同样的假设。

引理2. 假设X^H为方程 7的解且$\theta<0,\frac{1}{2}\le H<1,s,t\in[0,T]$，则有

$$c|t-s|^{2H}\le E[(X_t^H-X_s^H)^2]\le C|t-s|^{2H} \tag{12}$$

证明. 我们可以发现，对足够小的$\vartheta\in(0,H)$，过程$t\mapsto X_t^H$ 是有界$\frac{1}{H-\vartheta}$变差的。因此，如果u是有界$p-$变差的，且$1\le p<\frac{1}{1-H+\vartheta}$，那么$Young$积分

$$\int_0^t u_s dX_s^H=u_tX_t^H-u_0X_0^H-\int_0^t X_s^H du_s$$

存在，又因为

$$Y_t^H=\int_0^t (u-\frac{\sigma}{\theta})dX_u^H,\quad t\ge 0$$

及

$$X_t^H=B_t^H-\theta\int_0^t Y_s^H ds+\nu t,\quad t\ge 0. \tag{13}$$

因此，由分部积分公式，对任意$t\ge 0$，有

$$Y_t^H=(t-\frac{\sigma}{\theta})X_t^H-\int_0^t X_s^H ds=\int_0^t (u-\frac{\sigma}{\theta})dX_u^H,\quad t\ge 0.$$

结合 13，得

$$dY_t^H=-\theta(t-\frac{\sigma}{\theta})Y_t^H dt+(t-\frac{\sigma}{\theta})dB_t^H+\nu(t-\frac{\sigma}{\theta})dt,\quad t\ge 0. \tag{14}$$

通过常数变易法，我们可以假定过程

$$Y_t^H=C_t^H e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}\ 12œ)$$

其中$C_0^H=Y_0^H=0$，则根据 12，我们有

$$e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}dC_t^H=(t-\frac{\sigma}{\theta})dB_t^H+\nu(t-\frac{\sigma}{\theta})dt,\quad t\ge 0.$$

故有

$$\begin{aligned}C_t^H&=\int_0^t (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}dB_s^H+\nu\int_0^t (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}ds\\&=\int_0^t (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}dB_s^H+\frac{\nu}{\theta}(e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}-1),\quad t\ge 0\end{aligned}$$

则有

$$Y_t^H=e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}\int_0^t (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}dB_s^H+\frac{\nu}{\theta}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}),\quad t\ge 0 \tag{15}$$

考虑过程$\xi_t:=\int_0^t (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}dB_s^H,\quad t\ge 0$，则

$$Y_t^H=e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}\xi_t+\frac{\nu}{\theta}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}),\quad t\ge 0 \tag{16}$$

且有如下估计：

$$E(\xi_t-\xi_s)^2 \le C_{H,\theta,\sigma}(t-s)^2H, \quad t>s\le 0. \tag{17}$$

事实上，当$H=\frac{1}{2}$时，显然有

$$E(\xi_t-\xi_s)^2=\int_s^t (r-\frac{\sigma}{\theta})^2 e^{\theta r^2-2\sigma r}dr \le \theta^{-1}(t-s), \quad t>s\ge 0.$$

当$\frac{1}{2}<H<1$，对任意的$t>s\ge 0$，

Case I: $\sigma\ge 0$**并且**$\frac{\sigma}{\theta}\le s<t$**.**

$$\begin{aligned}E\left(\int_s^t (r-\frac{\sigma}{\theta})e^{\theta r^2-2\sigma r}dB_r^H\right)^2 &= \alpha_H\cdot\int_s^t\int_s^t (u-\frac{\sigma}{\theta})(v-\frac{\sigma}{\theta})|u-v|^{2H-2}e^{\frac{1}{2}\theta(u^2+v^2)-\sigma(u+v)}dudv\\ &\le (t-\frac{\sigma}{\theta})e^{\theta t^2-2\sigma t}\cdot\alpha_H\int_s^t\int_s^t |u-v|^{2H-2}dudv\\ &\le C_{\theta,\sigma}(t-s)^{2H}\end{aligned}$$

此时成立；

Case II: $\sigma<0$**并且**$0<s<t\le\frac{\sigma}{\theta}$**.**

$$\begin{aligned}E\left(\int_s^t (r-\frac{\sigma}{\theta})e^{\theta r^2-2\sigma r}dB_r^H\right)^2 &= \alpha_H\cdot\int_s^t\int_s^t (u-\frac{\sigma}{\theta})(v-\frac{\sigma}{\theta})|u-v|^{2H-2}e^{\frac{1}{2}\theta(u^2+v^2)-\sigma(u+v)}dudv\\ &\le \frac{\sigma^2}{\theta}e^{\frac{\sigma^2}{\theta}}\cdot\alpha_H\int_s^t\int_s^t |u-v|^{2H-2}dudv\\ &\le C_{\theta,\sigma}(t-s)^{2H}\end{aligned}$$

此时成立；

Case III: $\sigma<0$**并且**$0<s<\frac{\sigma}{\theta}\le t$**.**

$$\begin{aligned}E\left(\int_s^t (r-\frac{\sigma}{\theta})e^{\theta r^2-2\sigma r}dB_r^H\right)^2 &= \alpha_H\cdot\int_s^t\int_s^t (u-\frac{\sigma}{\theta})(v-\frac{\sigma}{\theta})|u-v|^{2H-2}e^{\frac{1}{2}\theta(u^2+v^2)-\sigma(u+v)}dvdu\\ &= \alpha_H\int_{s-\frac{\sigma}{\theta}}^{t-\frac{\sigma}{\theta}} s-\frac{\sigma}{\theta}^{t-\frac{\sigma}{\theta}} uv|u-v|^{2H-2}e^{\frac{1}{2}\theta(u^2+v^2)}dvdu\\ &\le \alpha_H\left(\int_0^{t-\frac{\sigma}{\theta}}\int_0^{t-\frac{\sigma}{\theta}} uv|u-v|^{2H-2}e^{\frac{1}{2}\theta(u^2+v^2)}dvdu\right.\\ &\quad\left.+\int_{s-\frac{\sigma}{\theta}}^0\int_{s-\frac{\sigma}{\theta}}^0 uv|u-v|^{2H-2}e^{\frac{1}{2}\theta(u^2+v^2)}dvdu\right)\\ &\le C_{\theta,\sigma}\left((t-\frac{\sigma}{\theta})^{2H}+(\frac{\sigma}{\theta}-s)^{2H}\right)\\ &\le C_{\theta,\sigma}(t-s)^{2H}\end{aligned}$$

证毕。 □

引理3. 假设$\frac{1}{2} \le H < 1$，对任何有限整数$p \ge 1$，当T趋向于无穷大时，几乎处处有

$$te^{\theta t^2 - 2\sigma t} \int_0^t e^{-\theta s^2 + 2\sigma s} \xi_s^p ds \to \frac{1}{2\theta} \xi_\infty^p.$$

证明. 根据引理 1可知，对任意$\frac{1}{2} \le H < 1$，随机变量ξ_∞服从零均值的正态分布，因此，

$$P(\xi_\infty \ne 0) = 1$$

由过程$\{\xi_t, t \ge 0\}$的连续性，可得

$$\lim_{t\to\infty} \inf_{\frac{1}{2}t \le s \le t} \xi_s = \xi_\infty \quad a.s.$$

因此，当t趋向于无穷大时，

$$\int_0^t e^{-\theta s^2 + 2\sigma s} \xi_s^p ds \to \infty.$$

通过运用洛必达（$L'Hopital$）法则，当t趋向于无穷大时，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t e^{-\theta s^2 + 2\sigma s} \xi_s^p ds}{t^{-1} e^{-\theta t^2 + 2\sigma t}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-\theta t^2 + 2\sigma t} \xi_t^p}{2\theta(t - \frac{\sigma}{\theta}) t^{-1} e^{-\theta t^2 + 2\sigma t}} \\
&= \frac{1}{2\theta} \xi_\infty^p
\end{aligned}$$

证毕。 □

引理4. 令$\frac{1}{2} < H < 1$。当t趋向于无穷时，

$$(t - \frac{\sigma}{\theta})^{2H} e^{\theta t^2 - 2\sigma t} \int_0^t \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta(s^2 + r^2) + \sigma(s+r)} |s - r|^{2H-2} ds dr \to \theta^{-2H} \Gamma(2H - 1).$$

证明. 易知，对所有的非负连续函数f，极限

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x) dx$$

存在且有限，则

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x}{t}}} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x) dx \tag{18}$$

据此，由洛必达法则，运用变量替换$-\frac{1}{2}\theta(t^2 - r^2) + \sigma(t - r) = x$和控制收敛定理，可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}(t-\frac{\sigma}{\theta})^{2H}e^{\theta t^2-2\sigma t}\int_0^t\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta(s^2+r^2)+\sigma(s+r)}|s-r|^{2H-2}dsdr\\
&=2\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(t-\frac{\sigma}{\theta})^{-2H}e^{-\theta t^2+2\sigma t}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta s^2+\sigma s}\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta r^2+\sigma r}|s-r|^{2H-2}dsdr\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\theta(t-\frac{\sigma}{\theta})^{1-2H}e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta r^2+\sigma r}(t-r)^{2H-2}dr\\
&=\theta^{-1}\lim_{t\to\infty}(t-\frac{\sigma}{\theta})^{2H-1}e^{\frac{1}{2}\theta(t^2-r^2)-\sigma(t-r)}(t-r)^{2H-2}dr\\
&=\theta^{-2}\lim_{t\to\infty}(t-\frac{\sigma}{\theta})^{2H-1}\int_0^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}e^{-x}\left((t-\frac{\sigma}{\theta})-\sqrt{(t-\frac{\sigma}{\theta})^2-\frac{2x}{\theta}}\right)^{2H-2}\frac{dx}{\sqrt{(t-\frac{\sigma}{\theta})^2-\frac{2x}{\theta}}}\\
&=2^{2H-2}\theta^{-2H}\lim_{t\to\infty}(t-\frac{\sigma}{\theta})^{2H-1}\int_0^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}e^{-x}\left((t-\frac{\sigma}{\theta})+\sqrt{(t-\frac{\sigma}{\theta})^2-\frac{2x}{\theta}}\right)^{2-2H}\frac{x^{2H-2}dx}{\sqrt{(t-\frac{\sigma}{\theta})^2-\frac{2x}{\theta}}}\\
&=2^{2H-2}\theta^{-2H}\lim_{t\to\infty}\int_0^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}e^{-x}\left(1+\sqrt{1+\frac{2x}{\theta(t-\frac{\sigma}{\theta})^2}}\right)^{2-2H}\frac{x^{2H-2}dx}{\sqrt{1-\frac{2x}{\theta(t-\frac{\sigma}{\theta})^2}}}\\
&=\theta^{-2H}\Gamma(2H-1)
\end{aligned}
$$

证毕。 □

引理5. 假设$\frac{1}{2}\le H<1$，则对任意的$\chi B_t^H,t\ge 0$可测的并满足$P(F<\infty)=1$ 的随机变量F，当t趋向于无穷大时，依分布有：

$$
(F,(t-\frac{\sigma}{\theta})^He^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta s^2+\sigma s}dB_s^H)\to(F,\sqrt{H\Gamma(2H)}\theta^{-H}N), \tag{19}
$$

其中N是独立于B^H的标准正态随机变量。

证明. 显然，对任意的$t>0$，有

$$
(t-\frac{\sigma}{\theta})^He^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta s^2+\sigma s}dB_s^H=N\chi_{H,\sigma,\theta}(t)
$$

这里等号“=”表示依分布相等，N是一个标准正态随机变量且

$$
\begin{aligned}
\chi^2_{H,\sigma,\theta}(t)&=(t-\frac{\sigma}{\theta})^{2H}e^{\theta t^2-2\sigma t}E(\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta s^2+\sigma s}dB_s^H)^2\\
&=\alpha_H(t-\frac{\sigma}{\theta})^{2H}e^{\theta t^2-2\sigma t}\int_0^t\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta(s^2+r^2)+\sigma(s+r)}|s-r|^{2H-2}dsdr,\quad t>0.
\end{aligned}
$$

再由引理 4，得

$$
(t-\frac{\sigma}{\theta})^He^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta s^2+\sigma s}dB_s^H\to\sqrt{H\Gamma(2H)}\theta^{-H}N,\quad t\to\infty.
$$

由于 19的两边均服从二维正态分布，根据文献 [27]，仅需证明对任意的$d\ge 1,s_1,\dots,s_d\in$

$[0,\infty)$，当t趋向于无穷大时，依分布有

$$(B^H_{s_1},\dots,B^H_{s_d},(t-\frac{\sigma}{\theta})^H e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta s^2+\sigma s}dB^H_s)\to(B^H_{s_1},\dots,B^H_{s_d},\theta^{-H}\sqrt{H\Gamma(2H)}N). \tag{20}$$

为了得到 20，仅需证明其协方差矩阵收敛于相应结果即可。

当$H=\frac{1}{2}$时，证明比较简单，只要考虑$\frac{1}{2}<H<1$。对任意固定的$s>0$，有

$$\begin{aligned}
&E\left(B^H_s\cdot(t-\frac{\sigma}{\theta})^H e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta r^2+\sigma r}dB^H_r\right)\\
&=\alpha_H(t-\frac{\sigma}{\theta})^H e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta v^2+\sigma v}dv\int_0^s|u-v|^{2H-2}du\\
&=\alpha_H(t-\frac{\sigma}{\theta})^H e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta v^2+\sigma v}dv\int_0^s|u-v|^{2H-2}du\\
&\quad+\alpha_H(t-\frac{\sigma}{\theta})^H e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_s^t e^{-\frac{1}{2}\theta v^2+\sigma v}dv\int_0^s|u-v|^{2H-2}du\\
&=:\eta_1(t)+\eta_2(t)
\end{aligned}$$

显然，当$t\to\infty$时，$\eta_1(t)\to 0$。运用洛必达法则得，当$t\to\infty$ 时，对任意$s>0$，有

$$\begin{aligned}
0<\eta_2(t)&=H(t-\frac{\sigma}{\theta})^H e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_s^t e^{-\frac{1}{2}\theta v^2+\sigma v}[v^{2H-1}-(v-s)^{2H-1}]dv\\
&\le Hs^{2H-1}\left((t-\frac{\sigma}{\theta})^H e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_s^t e^{-\frac{1}{2}\theta v^2+\sigma v}dv\right)\to 0
\end{aligned}$$

从而，对任意的$s>0$，有

$$\lim_{t\to\infty}E\left(B^H_s\cdot(t-\frac{\sigma}{\theta})^H e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta r^2+\sigma r}dB^H_r\right)=0$$

证毕。 □

引理6. 对$\frac{1}{2}<H<1$，当t趋向于无穷大时，

$$(t-\frac{\sigma}{\theta})^H e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^t(s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}\delta B^H_s\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta r^2+\sigma r}\delta B^H_r\xrightarrow{L^2}0 \tag{21}$$

$$(t-\frac{\sigma}{\theta})^H e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^t(s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}ds\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta r^2+\sigma r}|s-r|^{2H-2}dr\to 0 \tag{22}$$

证明. 收敛性 22是显然的，下面证明收敛性 21。由二重积分的等距公式可得，对任意的$t>0$，有

$$
\begin{aligned}
&E\left((t-\frac{\sigma}{\theta})^{H}e^{\frac{1}{2}\theta t^{2}-\sigma t}\int_{0}^{t}(s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^{2}-\sigma s}(\int_{0}^{s}e^{-\frac{1}{2}\theta r^{2}+\sigma r}\delta B_{r}^{H})\delta B_{s}^{H}\right)^{2}\\
&=(t-\frac{\sigma}{\theta})^{2H}e^{\theta t^{2}-2\sigma t}E\left(\int_{0}^{t}(s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^{2}-\sigma s}(\int_{0}^{s}e^{-\frac{1}{2}\theta r^{2}+\sigma r}\delta B_{r}^{H})\delta B_{s}^{H}\right)^{2}\\
&=(\alpha_{H})^{2}(t-\frac{\sigma}{\theta})^{2H}e^{\theta t^{2}-2\sigma t}\int_{0}^{t}(s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^{2}-\sigma s}ds\int_{0}^{s}e^{-\frac{1}{2}\theta x^{2}+\sigma x}dx\\
&\quad\cdot\int_{0}^{t}(r-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta r^{2}-\sigma r}dr\int_{0}^{r}dye^{-\frac{1}{2}\theta y^{2}+\sigma y}\cdot(|s-y|^{2H-2}|r-x|^{2H-2}+|s-r|^{2H-2}|x-y|^{2H-2}).
\end{aligned}
$$

再由不等式

$$\int_{0}^{s}d\xi\int_{0}^{r}|r-\xi|^{2H-2}|s-\eta|^{2H-2}dy\leq\frac{2}{(2H-1)^{2}}r^{2H-1}s^{2H-1}$$

可得，当t趋向于无穷时，

$$
\begin{aligned}
E\left((t-\frac{\sigma}{\theta})^{H}e^{\frac{1}{2}\theta t^{2}-\sigma t}\int_{0}^{t}(s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^{2}-\sigma s}(\int_{0}^{s}e^{-\frac{1}{2}\theta r^{2}+\sigma r}\delta B_{r}^{H})\delta B_{s}^{H}\right)^{2}&\leq C_{H}(t-\frac{\sigma}{\theta})^{2+6H}e^{\theta t^{2}-2\sigma t}\\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

证毕。 □

4. 强相合性及渐近分布

利用上一节的结果，本节将证明本文的另外一个主要定理。

定理7. 假设$\frac{1}{2}\leq H<1$并且$\theta>0$，则最小二乘估计量$\hat{\theta_{T}}$ 和$\hat{\nu}_{T}$是强相合的，即当T趋向于无穷大时，收敛性

$$\hat{\theta}_{T}\to\theta \tag{23}$$

和

$$\hat{\nu}_{T}\to\nu \tag{24}$$

以概率1成立。进一步地，当T趋向于无穷大时，如依分布收敛性成立：

$$T^{H-1}e^{\frac{1}{2}\theta T^{2}-\sigma T}(\hat{\theta}_{T}-\theta)\to 2\theta^{1-H}\sqrt{H\Gamma(2H)}\frac{N}{\xi_{\infty}-\frac{\nu}{\theta}} \tag{25}$$

$$T^{1+H}(\hat{\nu}_{T}-\nu-\frac{B_{T}^{H}}{T})\to 2(\sqrt{H\Gamma(2H)}\theta^{-H})N \tag{26}$$

$$T^{1-H}(\hat{\nu}_{T}-\nu)\to M \tag{27}$$

其中M和N为两个独立于分数布朗运动B^{H}的标准正态随机变量并且$\xi_{\infty}=\int_{0}^{\infty}(s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^{2}-\sigma s}dB_{s}^{H}$。

当$H=\frac{1}{2}$时，B^{H}成为标准布朗运动，其证明是容易的，下面仅给出$\frac{1}{2}<H<1$时的证明。对$T>0$，记

$$\Phi_T = T\int_0^t (Y_t^H)^2 dt - (\int_0^t Y_t^H dt)^2$$

则最小二乘估计量$\hat{\theta_T}$和$\hat{\nu_T}$ 可写为

$$\begin{aligned}\hat{\theta_T} - \theta &= (T\int_0^T Y_t^H dX_t^H - X_T^H \int_0^T Y_t^H dt)\frac{1}{\Phi_T} - \theta \\ &= (T\int_0^T Y_t^H dB_t^H - B_T^H \int_0^T Y_t^H dt)\frac{1}{\Phi_T}\end{aligned} \tag{28}$$

并且

$$\hat{\nu_T} - \nu = \frac{1}{T}B_T^H - (\theta - \hat{\theta_T})\int_0^T Y_t^H dt. \tag{29}$$

注意到，当$\frac{1}{2} < H < 1$时，随机积分$\int_0^T Y_t^H dX_t^H$是Young积分。

定理 7中 23的证明. 假设$\frac{1}{2} < H < 1$，由 16 、引理 1和引理 3并运用洛必达法则，可得

$$e^{\theta T^2 - 2\sigma T}\Phi_T \to \frac{1}{2\theta}(\xi_\infty - \frac{\nu}{\theta})^2 \quad (T \to \infty) \tag{30}$$

以概率1成立。下面验证当T趋向于无穷大时，

$$T^{-2}e^{\frac{1}{2}\theta T^2 - \sigma T}(T\int_0^T Y_t^H dB_t^H - B_T^H \int_0^T Y_t^H dt) \to 0 \quad a.s. \tag{31}$$

由于当T趋向于无穷大时，

$$\frac{B_T^H}{T} \to 0 \quad a.s. \tag{32}$$

因此，由引理 1和 16可知，当T趋向于无穷大时，

$$T^{-2}e^{\frac{1}{2}\theta T^2 - \sigma T}(B_T^H \int_0^T Y_t^H dt) = \frac{B_T^H}{T}\cdot (T^{-1}e^{\frac{1}{2}\theta T^2 - \sigma T}\int_0^T Y_t^H dt) \to 0 \quad a.s. \tag{33}$$

另一方面，由分部积分公式和 16可得

$$\begin{aligned} T\int_0^T Y_t^H dB_t^H &= TY_T B_T^H - T\int_0^H B_t^H dY_t^H \\ &= TY_T B_T^H - T\int_0^H B_t^H d\left(e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t}\xi_t + \frac{\nu}{\theta}(1 - e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t})\right) \\ &= TY_T B_T^H - \theta T\int_0^T (t - \frac{\sigma}{\theta})e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t}B_t^H \xi_t dt \\ &\quad - T\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t}B_t^H d\xi_t - \nu T\int_0^T (t - \frac{\sigma}{\theta})e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t}B_t^H dt \\ &= TY_T B_T^H - \theta T\int_0^T (t - \frac{\sigma}{\theta})e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t}B_t^H \xi_t dt \\ &\quad - T\int_0^T tB_t^H dB_t^H - \nu T\int_0^T (t - \frac{\sigma}{\theta})e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t}B_t^H dt \end{aligned}$$

由 16和引理 3并运用洛必达法则，可以证明当T趋向于无穷大时，下列收敛性以概率1成立：

$$T^{-2}e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}(TY_TB_T^H)=\frac{B_T^H}{T}(e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}Y_T)\to 0,$$

$$T^{-2}e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}(T\int_0^T(t-\frac{\sigma}{\theta})e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}B_t^H\xi_t dt)=T^{-1}e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^T(t-\frac{\sigma}{\theta})B_t^H\xi_t dt\to 0,$$

$$T^{-2}e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}(T\int_0^T(t-\frac{\sigma}{\theta})e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}B_t^H dt)=T^{-1}e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^T(t-\frac{\sigma}{\theta})e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}B_t^H dt\to 0.$$

此外，T趋向于无穷大时，也有

$$\begin{aligned}T^{-1}e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^T tB_t^H dB_t^H)&=\frac{1}{2}T^{-1}e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^T td(B_t^H)^2\\&=\frac{1}{2}T^{-1}e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}(T(B_T^H)^2-\int_0^T(B_t^H)^2dt)\\&\to 0\quad a.s.\end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}e^{\theta t^2-2\sigma t}(T\int_0^T Y_t^H dB_t^H)&=\lim_{T\to\infty}(T^2e^{\frac{1}{2}\theta T^2-\sigma T})T^{-2}e^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}(T\int_0^T Y_t^H dB_t^H)\\&=0.\end{aligned}\tag{34}$$

以概率1收敛。再结合 33，可得 31的收敛性，再根据 30和 31，当T趋向于无穷大时，

$$\begin{aligned}\hat{\theta_T}-\theta&=\frac{1}{e^{\theta T^2-2\sigma T}\Phi_T}e^{\theta T^2-2\sigma T}(T\int_0^T Y_t^H dB_t^H-B_T^H\int_0^T Y_t^H dt)\\&\to 0\quad a.s.\end{aligned}$$

证毕。 □

定理 7中 24的证明. 假设$\frac{1}{2}<H<1$。由引理 1和Y的表示式 16 并运用洛必达法则可得，当T趋向于无穷大时，有

$$\begin{aligned}Te^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\int_0^T Y_t^H dt&=Te^{\frac{1}{2}\theta t^2-\sigma t}\left(\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}\xi_t dt-\frac{\nu}{\theta}\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}dt+\frac{\nu}{\theta}T\right)\\&\to\frac{1}{\theta}(\xi_\infty-\frac{\nu}{\theta})\quad a.s.\end{aligned}\tag{35}$$

据此，由收敛性 30和 31可得，当T趋向于无穷大时，

$$
\begin{aligned}
\hat{\nu_T} - \nu &= \frac{1}{T}(X_T^H + \hat{\theta_T}\int_0^T Y_t^H dt - T\nu) \\
&= \frac{1}{T}B_t^H - (\theta - \hat{\theta_T})\frac{1}{T}\int_0^T Y_t^H dt \\
&= \frac{1}{T}B_t^H - \frac{1}{e^{\theta T^2 - 2\sigma T}\Phi_T}T^{-2}e^{\frac{1}{2}\theta T^2 - \sigma T} \\
&\quad \cdot \left(T\int_0^T Y_t^H dB_t^H - B_T^H\int_0^T Y_t^H dt\right)\left(Te^{\theta T^2 - 2\sigma T}\int_0^T Y_t dt\right) \\
&\to 0 \quad a.s.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

证毕。 □

定理 7中 25的证明. 假设$\frac{1}{2} < H < 1$，对任意的$T > 0$，有

$$
\begin{aligned}
T^{H-1}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2 + \sigma T}(\hat{\theta_T} - \theta) &= \frac{1}{\Phi_T}T^H e^{-\frac{1}{2}\theta T^2 + \sigma T}\int_0^T Y_t^H dt - T^{H-1}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2 + \sigma T}\frac{1}{\Phi_T}B_T^H\int_0^T Y_t^H dt \\
&\equiv \frac{1}{\Phi_T}(\Upsilon_1(T) - \Upsilon_2(T)).
\end{aligned}
\tag{37}
$$

□

显然，由表示 16和引理 3 可得

$$
\begin{aligned}
e^{\theta T^2 - 2\sigma T}\Upsilon_2(T) &= T^{H-1}e^{\frac{1}{2}\theta T^2 - \sigma T}B_T^H\int_0^T Y_t^H dt \\
&= \frac{B_T^H}{T^{2-H}}\left(Te^{\frac{1}{2}\theta T^2 - \sigma T}\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta T^2 + \sigma T}\xi_t dt + Te^{\frac{1}{2}\theta T^2 - \sigma T}\int_0^T \frac{\nu}{\theta}(1 - e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t})dt\right) \\
&\to 0 \quad (T \to \infty)
\end{aligned}
$$

以概率1收敛。再考虑$\Upsilon_1(T)$的渐近分布，对任意$T \geq 0$，有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T (s - \frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2 - \sigma s}\left(\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t}dB_t^H\right)dB_s^H \\
&= \int_0^T (s - \frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2 - \sigma s}\left(\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t}\delta B_t^H\right)dB_s^H \\
&= \int_0^T (s - \frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2 - \sigma s}\left(\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t}\delta B_t^H\right)\delta B_s^H \\
&\quad \cdot \int_0^T (s - \frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2 - \sigma s}\int_0^T D_r^H(\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t}\delta B_t^H)|s - r|^{2H-2}dsdr \\
&= \int_0^T (s - \frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2 - \sigma s}\left(\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta t^2 + \sigma t}\delta B_t^H\right)\delta B_s^H \\
&\quad + \alpha_H\int_0^T (s - \frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2 - \sigma s}(s - r)^{2H-2}dsdr.
\end{aligned}
$$

由此，对任意的$T \geq 0$，有

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}\xi_t dB_t^H &= \int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}\left(\int_0^t (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}dB_s^H\right)dB_t^H \\ &= \int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}\left(\int_0^T (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}dB_s^H\right)dB_t^H \\ &\quad - \int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}\left(\int_t^T (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}dB_s^H\right)dB_t^H \\ &= \xi_T\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}dB_t^H \\ &\quad - \int_0^T (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}\left(\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}dB_t^H\right)dB_s^H \\ &= \xi_T\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}dB_t^H \\ &\quad - \int_0^T (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}\left(\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}\delta B_t^H\right)\delta B_s^H \\ &\quad - \alpha_H\int_0^T (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta r^2+\sigma r}(s-r)^{2H-2}dsdr.\end{aligned}$$

结合引理 1、 5、 6、收敛性 30和Slutsky定理可得，当T趋向于无穷大时，

$$\begin{aligned}\Upsilon_1(T)\frac{1}{\Phi_T} &= T^H e^{\frac{1}{2}\theta T^2-\sigma T}\left(\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}\xi_t dB_t^H + \frac{\nu}{\theta}B_T^H - \frac{\nu}{\theta}\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}dB_t^H\right)\frac{1}{e^{\theta T^2-2\sigma T}\Phi_T} \\ &= (\xi_T-\frac{\nu}{\theta})\left(T^H e^{\frac{1}{2}\theta T^2-\sigma T}\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}dB_t^H\right)\frac{1}{e^{\theta T^2-2\sigma T}\Phi_T} \\ &\quad - T^H e^{\frac{1}{2}\theta T^2-\sigma T}\left(-\frac{\nu}{\theta}B_T^H + \int_0^T (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}\left(\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta t^2+\sigma t}\delta B_t^H\right)\delta B_s^H\right. \\ &\quad \left. +\alpha_H T^H e^{-\frac{1}{2}\theta T^2+\sigma T}\int_0^T (s-\frac{\sigma}{\theta})e^{\frac{1}{2}\theta s^2-\sigma s}\int_0^s e^{-\frac{1}{2}\theta r^2+\sigma r}(s-r)^{2H-2}dsdr\right)\frac{1}{e^{\theta T^2-2\sigma T}\Phi_T} \\ &\to 2\theta^{1-H}\sqrt{H\Gamma(2H)}\frac{N}{\xi_\infty-\frac{\nu}{\theta}}\end{aligned}$$

依分布收敛。注意到，由引理 5可知随机变量N与B^H相互独立，从而收敛性 25得证。

定理 *7*中 *26*和 *27*的证明. 对于$\frac{1}{2}<H<1$，显然有如下的依分布收敛性：

$$\begin{aligned}T^{1+H}(\hat{\nu_T}-\nu-\frac{1}{T}B_T^H) &= T^{1+H}(X_T^H-\hat{\theta_T}\int_0^T Y_t^H dt - T\nu) \\ &= \left(T^{H-1}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2+\sigma T}(\hat{\theta_T}-\theta)\right)\left(Te^{\frac{1}{2}\theta T^2-\sigma T}\int_0^T Y_t dt\right) \\ &\to 2\sqrt{H\Gamma(2H)}\theta^{-H}N, \quad T\to\infty.\end{aligned}$$

结合 35- 37可证收敛性 26成立。

最后，根据 29、 35 和 37 可以证明当T趋向于无穷大时，

$$T^{1-H}(\hat{\nu_T}-\nu)=\frac{T^H}{B_T^H}+\{T^{H-1}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2+\sigma T}(\hat{\theta_T}-\theta)\}\cdot\{T^{1-2H}e^{\frac{1}{2}\theta T^2-\sigma T}\int_0^T Y_t^H dt\}$$
$$\to M\sim N(0,1)$$

依分布收敛。进一步地，引理 5已经指出了M与B^H相互独立，从而依分布收敛性 27成立。 □

5. 总结和展望

本文主要研究了带线性自排斥漂移项的分数O-U过程的统计推断问题，对于分数布朗运动驱动的随机方程的统计推断问题是在20世纪90年代在分数布朗运动随机微积分有了较大进展之后出现的，之后一直作为概率论及其应用领域的研究议题，本文通过对方程参数的最小二乘估计量的相关渐近性质进行研究，主要运用了分部积分、等距公式等方法，得到了主要的定理。

后续我们还将进行更为复杂的由分数布朗运动驱动的随机方程问题，比如在此方程的基础上增加函数项，可能会得到更为有趣的结果。

参考文献

[1] Durrett, R. and Rogers, L.C.G. (1991) Asymptotic Behavior of Brownian Polymer. *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 337-349. https://doi.org/10.1007/BF01300560

[2] Coppersmith, D. and Diaconis, P. (1986) Random Walks with Reinforcement. Unpublished manuscript.

[3] Cranston, M. and Le Jan, Y. (1995) Self-Attracting Diffusions: Two Case Studies. *Mathematische Annalen*, **303**, 87-93. https://doi.org/10.1007/BF01460980

[4] Benaïm, M., Ciotir, I. and Gauthier, C.-E. (2015) Self-Repelling Diffusions via an Infinite Dimensional Approach. *Stochastic Partial Differential Equations: Analysis and Computations*, **3**, 506-530. https://doi.org/10.1007/s40072-015-0059-5

[5] Gauthier, C.-E. (2016) Self Attracting Diffusions on a Sphere and Application to a Periodic Case. *Electronic Communications in Probability*, **21**, 1-12. https://doi.org/10.1214/16-ECP4547

[6] Herrmann, S. and Roynette, B. (2003) Boundedness and Convergence of Some Self-Attracting Diffusions. *Mathematische Annalen*, **325**, 81-96. https://doi.org/10.1007/s00208-002-0370-0

[7] Herrmann, S. and Scheutzow, M. (2004) Rate of Convergence of Some Self-Attracting Diffusions. *Stochastic Processes and Their Applications*, **111**, 41-55. https://doi.org/10.1016/j.spa.2003.10.012

[8] Benaïm, M., Ledoux, M. and Raimond, O. (2002) Self-Interacting Diffusions. *Probability Theory and Related Fields*, **122**, 1-41. https://doi.org/10.1007/s004400100161

[9] Chambeu, S. and Kurtzmann, A. (2011) Some Particular Self-Interacting Diffusions: Ergodic Behaviour and Almost Sure Convergence. *Bernoulli*, **17**, 1248-1267. https://doi.org/10.3150/10-BEJ310

[10] Cranston, M. and Mountford, T.S. (1996) The Strong Law of Large Numbers for a Brownian Polymer. *Annals of Probability*, **24**, 1300-1323. https://doi.org/10.1214/aop/1065725183

[11] Mountford, T. and Tarrès, P. (2008) An Asymptotic Result for Brownian Polymers. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, **44**, 29-46. https://doi.org/10.1214/07-AIHP113

[12] Yan, L., Sun, Y. and Lu, Y. (2008) On the Linear Fractional Self-Attracting Diffusion. *Journal of Theoretical Probability*, **21**, 502-516. https://doi.org/10.1007/s10959-007-0113-y

[13] Sun, X., Yan, L. and Ge, Y. (2022) The Laws of Large Numbers Associated with the Linear Self-Attracting Diffusion Driven by Fractional Brownian Motion and Applications. *Journal of Theoretical Probability*, **35**, 1423-1478. https://doi.org/10.1007/s10959-021-01126-0

[14] Chakravari, N. and Sebastian, K. (1997) Fractional Brownian Motion Models for Polymers. *Chemical Physics Letters*, **267**, 9-13. https://doi.org/10.1016/S0009-2614(97)00075-4

[15] Cherayil, B. and Biswas, P. (1993) Path Integral Description of Polymers Using Fractional Brownian Walks. *The Journal of Chemical Physics*, **99**, 9230-9236. https://doi.org/10.1063/1.465539

[16] Yan, L., Yang, Q. and Xia, X. Long Time Behavior on the Fractional Ornstein-Uhlenbeck Process with the Linear Self-Repelling Drift.

[17] Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B. and Zhang, T. (2008) Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications. In: *Probability and Its Application*, Springer, Berlin.

[18] Hu, Y. (2005) Integral Transformations and Anticipative Calculus for Fractional Brownian Motions. In: *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol. 175, American Mathematical Society, Rhode Island. https://doi.org/10.1090/memo/0825

[19] Mishura, Y.S. (2008) Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1929, Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-75873-0

[20] Nualart, D. (2006) Malliavin Calculus and Related Topics. 2nd Edition, Springer, Heidelberg, New York.

[21] Nourdin, I. (2012) Selected Aspects of Fractional Brownian Motion. Springer-Verlag, Milano. https://doi.org/10.1007/978-88-470-2823-4

[22] Tudor, C. (2013) Analysis of Variations for Self-Similar Processes. Springer, Heidelberg, New York.

[23] Nualart, D. and Ortiz-Latorre, S. (2008) Central Limit Theorems for Multiple Stochastic integrals And Malliavin Calculus. *Stochastic Processes and Their Applications*, **118**, 614-628. https://doi.org/10.1016/j.spa.2007.05.004

[24] Nualart, D. and Peccati, G. (2005) Central Limit Theorems for Sequences of Multiple Stochastic Integrals. *Annals of Probability*, **33**, 177-193. https://doi.org/10.1214/009117904000000621

[25] Decreusefond, L. and Üstünel, A.S. (1999) Stochastic Analysis of the Fractional Brownian Motion. *Potential Analysis*, **10**, 177-214. https://doi.org/10.1023/A:1008634027843

[26] Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. (1993) Fractional Integrals and Derivatives. Gordon and Breach Science Publishers, Langhorne, PA.

[27] Es-Sebaiy, K. and Nourdin, I. (1991) Parameter Estimation for α Fractional Bridges. *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 337-349.