Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(6), 2671-2676
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126269

Hans汉斯

二重积分计算的变量变换法

程　慧，黄振辉，韩　萍，何桂添*

广西民族大学数学与物理学院，广西　南宁

收稿日期：2023年5月9日；录用日期：2023年6月2日；发布日期：2023年6月12日

摘　要

重积分是微积分重要概念之一，在各学科领域都有重要应用。变量变换是计算重积分的重要方法与技巧，本文从重积分计算，积分等式或积分不等式的证明，以及曲线围成的面积计算与曲面围成的体积计算角度说明变量变换法的重要性以及计算的便捷性。

关键词

二重积分，变量变换法，极坐标变换

Variable Transformation Method for Double Integral Calculation

Hui Cheng, Zhenhui Huang, Ping Han, Guitian He*

School of Mathematics and Physics, Guangxi Minzu University, Nanning Guangxi

Received: May 9th, 2023; accepted: Jun. 2nd, 2023; published: Jun. 12th, 2023

Abstract

Multiple integral is one of the important concepts of calculus and has important applications in various disciplines. Variable transformation is an important method and technique to calculate the double integral. This paper explains the importance and convenience of variable transformation method from the calculation of double integral, the proof of integral equality or integral inequality, the calculation of the area enclosed by curves and the calculation of the volume enclosed by surfaces.

Keywords

Double Integral, Variable Transformation Method, Polar Coordinate Transformation

*通讯作者。

文章引用: 程慧, 黄振辉, 韩萍, 何桂添. 二重积分计算的变量变换法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 2671-2676.
DOI: 10.12677/aam.2023.126269

1. 引言

二重积分是微积分重要概念之一，其概念与性质在物理学、力学、工程以及金融等学科领域都有广泛应用[1] [2]。然而重积分在不规则积分区域或被积函数比较复杂情况下，其通过直角坐标系重积分计算公式往往计算量比较大或者难于计算。我们知道极坐标变换是一种特殊的变量变换，然而极坐标变换计算方法往往针对于积分区域是圆域、扇形域、环域或其中部分区域。换言之，经典极坐标变换计算方法也只能计算某类特殊情形的重积分。实际上，对于更一般化的积分区域或者更复杂的被积函数，可进行变量变换法进行计算[1] [2] [3] [4]。文献[3]研究了二重积分与定积分的变量替换公式的比较，文献[4]从线性变换与非线性变换角度研究了重积分的变量变换选取方法。文献[5]研究了变量变换法在重积分计算中的应用。文献[6]研究了重积分与课程思政元素的融合与映射。

本文通过典型例题，给出变量变换在重积分计算，积分等式或积分不等式的证明，以及曲线围成的面积计算与曲面围成的体积计算的应用。为方便叙述，下面先介绍 x 型区域或 y 型区的重积分计算公式以及变量变换的重积分计算公式。

定理 1 [1] 1) 若 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\}$ 上连续，其中 $y_1(x),y_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$。

2) 若 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid x_1(y)\le x\le x_2(y),c\le y\le d\}$ 上连续，其中 $x_1(y),x_2(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$。

定理 2 [1] 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，变换 $T:x=x(u,v),y=y(u,v)$ 将 uv 平面由按段光滑封闭曲线所围成的闭区域 Δ 一对一地映成 xy 平面上的闭区域 D，函数 $x(u,v),y(u,v)$ 在 Δ 内分别具有一阶连续偏导数且它们的函数行列式 $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0,(u,v)\in\Delta$，则 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_\Delta f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$。

2. 重积分计算

变量变换的典型应用就是重积分或多重积分的计算。特别是针对被积函数 $f(x,y)$ 可以看成函数 $g(x,y),h(x,y)$ 的四则远算或符合运算而成，积分区域 D 又由两族曲线族 $g(x,y)=c,h(x,y)=c'$ 的若干曲线围成，则在某种程度上可由变量变换法可简化计算。

例 1：计算 $\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $|x|+|y|=1$ 围成。

解法 1：$|x|+|y|=1$ (如图 1 所示)可看成如下 4 条直线组成：

$$x+y=1,x+y=-1,x-y=1,x-y=-1.$$

因此，可将 D 分成两个 x 型区域：

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,-1+x\le y\le 1-x\},D_2=\{(x,y)\mid -1\le x\le 0,-1-x\le y\le 1+x\}.$$

从而，

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_{D_1}(x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma\\ &=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-1+x}^{1-x}(x+y)^2\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{1+x}(x+y)^2\,\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-(2x-1)^3\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_{-1}^0\left[(2x+1)^3-1\right]\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

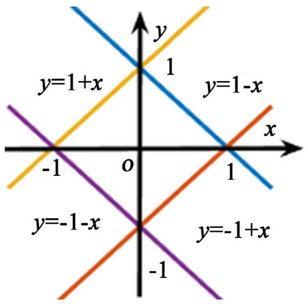

Figure 1. Example 1
图 1. 例 1

解法 2：为了简化积分区域，令 $u=x+y, v=x-y$，由区域 D 可知，$-1\le u\le 1, -1\le v\le 1$。作变换 $T: x=\frac{1}{2}(u+v), y=\frac{1}{2}(u-v)$，可得 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$。

从而 $\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^1\mathrm{d}v\int_{-1}^1 u^2\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u=\int_{-1}^1\frac{1}{2}\mathrm{d}v\int_{-1}^1 u^2\mathrm{d}u=\frac{1}{3}u^3\Big|_{u=-1}^{1}=\frac{2}{3}$。

注：比较上述两解法，可知变量变换可以简化计算。

例 2：计算 $\iint_D \sin\frac{y}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $x+y=1, x=0, y=0$ 围成。

分析：尽管积分区域可看成 x 型区域或 y 型区域，但考虑到被积函数比较复杂，利用定理 1 的直角坐标系计算公式比较复杂，计算量大，显然利用变量变换比较合适。

解：作变量变换 $T: x^{\frac{1}{2}}=r^{\frac{1}{2}}\cos\theta, y^{\frac{1}{2}}=r^{\frac{1}{2}}\sin\theta$，即 $x=r\cos^2\theta, y=r\sin^2\theta$，则

$$J=\begin{vmatrix}\cos^2\theta & -2r\cos\theta\sin\theta\\ \sin^2\theta & 2r\sin\theta\cos\theta\end{vmatrix}=2r\sin\theta\cos\theta.$$

在变换 T 作用下，D 变换为 $\Delta=\left\{(\theta,r)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le 1\right\}$。从而

$$\iint_D \sin\frac{y}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sin\left(\sin^2\theta\right)2r\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\sin^2\theta\right)2r\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

在进行换元积分，令 $u=\sin^2\theta$，则 $\sin\theta=\sqrt{u}, \cos\theta=\sqrt{1-u}, \theta=\arcsin\sqrt{u}, \mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\sqrt{1-u}\sqrt{u}}\mathrm{d}u$。故而，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\sin^2\theta\right)2r\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^1(\sin u)\sqrt{u}\sqrt{1-u}\frac{1}{2\sqrt{1-u}\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\frac{1-\cos 1}{2}$。

因此，$\iint\limits_D \sin\dfrac{y}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1-\cos 1}{2}$。

注：当积分区域可看成 $x+y\le a$ 或其一部分时，可由变量变换 $T:x^{\frac{1}{2}}=r^{\frac{1}{2}}\cos\theta, y^{\frac{1}{2}}=r^{\frac{1}{2}}\sin\theta$ 简化重积分的计算。

3. 积分等式或积分不等式的证明

积分中值定理以及积分估值定理在证明积分等式或积分不等式的往往具有重要应用。对于被积函数比较复杂或者积分区域不规则，或者被积函数与积分区域有某种关联关系时，积分中值定理以及积分估值定理的使用可能并不是特别适用。而此时，若能使用变量变换，则往往能柳暗花明。

例 3：设 $f(x)$ 为连续的奇函数，证明 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{f(x+y)}\mathrm{d}\sigma\ge 2$，其中 D 由 $|x|+|y|=1$ 围成。

分析：由直角坐标系公式，则 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{f(x+y)}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-1+x}^{1-x}\mathrm{e}^{f(x+y)}\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{1+x}\mathrm{e}^{f(x+y)}\mathrm{d}y$，考虑到 $f(x)$ 是一般抽象函数，如用直角坐标系计算公式，证明过程的计算量一般会比较复杂。为此，可变量变换进一步化简证明。

证明：使用变量变换进行证明积分不等式，令 $u=x+y, v=x-y$，由例 1 可知 $-1\le u\le 1, -1\le v\le 1$。从而，

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{f(x+y)}\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^1\mathrm{d}v\int_{-1}^1\frac{1}{2}\mathrm{e}^{f(u)}\mathrm{d}u=\int_{-1}^1\mathrm{e}^{f(u)}\mathrm{d}u=\int_{-1}^0\mathrm{e}^{f(u)}\mathrm{d}u+\int_0^1\mathrm{e}^{f(u)}\mathrm{d}u.$$

令 $u=-t, u\in[-1,0]$，并考虑奇函数性质，则

$$\int_{-1}^0\mathrm{e}^{f(u)}\mathrm{d}u=\int_0^1\mathrm{e}^{f(-t)}\mathrm{d}t=\int_0^1\mathrm{e}^{-f(t)}\mathrm{d}t=\int_0^1\mathrm{e}^{-f(u)}\mathrm{d}u,$$

因此，$\iint\limits_D \mathrm{e}^{f(x+y)}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{e}^{-f(u)}\mathrm{d}u+\int_0^1\mathrm{e}^{f(u)}\mathrm{d}u=\int_0^1\left[\mathrm{e}^{-f(u)}+\mathrm{e}^{f(u)}\right]\mathrm{d}u\ge\int_0^1 2\sqrt{\mathrm{e}^{-f(u)}\mathrm{e}^{f(u)}}\mathrm{d}u=\int_0^1 2\mathrm{d}u=2$。

例 4：证明等式 $\left(\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2+\int_0^1\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\Big/\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{4}$ 成立。

证明：对于积分 $\int_0^1\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\Big/\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t$，可作变量替换 $\alpha=\arctan t$，则

$$\int_0^1\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\Big/\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-a^2/\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha.$$

另一方面，$\left(\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\iint\limits_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $[0,a]\times[0,a]$。

作极坐标变换 $x=r\cos\alpha, y=r\sin\alpha$，可得

$$\left(\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\alpha\int_0^{\frac{a}{\cos\alpha}}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-a^2/\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha.$$

4. 曲线围成的面积与曲面围成的体积计算

由重积分的几何意义可知，曲线围成的面积与曲面围成的体积的计算可由重积分来计算。重积分的计算方法也比较多，这里不一一赘述。然而对于复杂曲线或复杂曲面由直角坐标系计算公式并不容易，此时往往可借助极坐标变换或更一般化的变量变换进行重积分简化计算。

例 5：求曲线 $(y-x)^2+x^2=a^2\ (a>0)$ 围成的面积。

解法 1：计算曲边梯形的面积可通过定积分计算，曲线如图 2 所示，该曲线(椭圆)方程可看成两个函

数 $y=x+\sqrt{a^2-x^2}$ 以及 $y=x-\sqrt{a^2-x^2}$ 组成。因此，所求曲线围成图形(椭圆)的面积为

$$S=\int_{-a}^{a}\left[\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right)-\left(x-\sqrt{a^2-x^2}\right)\right]\mathrm{d}x=2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\pi a^2 .$$

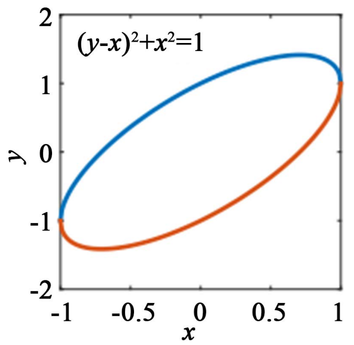

Figure 2. Example 2
图 2. 例 2

解法 2：借助重积分也可以计算曲线围成图形的面积，即 $S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为曲线围成的区域。结合曲线的表达式，我们可进行变量变换，不妨令 $x=r\cos\theta, y=r(\sin\theta+\cos\theta), \theta\in[0,2\pi]$。易知，

$J=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta+\cos\theta & r(\cos\theta-\sin\theta)\end{vmatrix}=r(1-2\sin\theta\cos\theta)$，从而

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r(1-2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}a^2(1-2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\pi a^2 .$$

例 6：求由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 与圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}(z>0;a,b,c>0)$ 围成的立体体积 V

解：两曲面的交线在 xoy 平面的投影为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$，记其所围区域为 D。由重积分的几何意义可知，

$V=\iint\limits_D\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。采用广义极坐标变换，令 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$，从而

$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}abr\left(c\sqrt{1-r^2}-cr\right)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}abc\left(2-\sqrt{2}\right)$。

通过上述例题，我们发现在重积分计算，积分等式或积分不等式的证明，以及曲线围成的面积计算与曲面围成的体积计算上，变量变换法都具有重要应用，并在某种程度上，也可简化计算过程。

基金项目

广西高等教育本科教学改革工程项目(2020JGA155)，广西民族大学高等教育教学改革工程项目(2019XJGY40)和广西自然科学基金(AD21159013, 2021GXNSFAA220033)。

参考文献

[1] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析(下册) [M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
[2] 周民强. 数学分析习题演练(第三册) [M]. 北京: 科学出版社, 2012.
[3] 张文丽, 陈丽珍, 靳佳润. 积分变量变换公式的类比和应用[J]. 高等数学研究, 2020, 23(3): 53-56.
[4] 张文丽, 张安玲. 二重积分变量变换选取方法的探究学习[J]. 高等数学研究, 2022, 25(2): 25-27.

[5] 王娇娇, 陈广锋, 王歆彤. 重积分的变量变换及其在积分计算中的应用[J]. 应用数学进展, 2020, 9(5): 728-732. https://doi.org/10.12677/aam.2020.95086

[6] 邓明香, 冯永平. 二重积分概念与性质课程思政教学设计[J]. 数理化解题研究, 2023(3): 47-49.