Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(6), 2643-2649**
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126266

一种新型的混合系统

魏金飞

浙江师范大学，数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年5月5日；录用日期：2023年5月28日；发布日期：2023年6月6日

摘　要

脉冲系统作为一类混杂系统，可以与逻辑动态系统相结合，研究逻辑选择脉冲效应的系统。由于动力系统由脉冲效应和逻辑运算组成，因此它们是更一般和更复杂的混合系统。运用矩阵的半张量积的方法，将逻辑函数转换为等价的代数形式，使这类脉冲系统的研究成为可能。本文主要运用矩阵的半张量积的方法将脉冲系统与逻辑动态系统结合。

关键词

脉冲系统，逻辑动态系统，矩阵的半张量积，稳定性

A Novel Hybrid System

Jinfei Wei

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: May 5^{th}, 2023; accepted: May 28^{th}, 2023; published: Jun. 6^{th}, 2023

Abstract

Impulsive systems, as a type of hybrid system, can be combined with logical dynamic systems to study systems with logic selective impulsive effects. Due to the fact that the power system consists of impulsive effects and logical operations, they are more general and complex hybrid systems. By using the semi-tensor product method of matrices,

文章引用: 魏金飞. 一种新型的混合系统[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 2643-2649.
DOI: 10.12677/aam.2023.126266

the logical function is transformed into an equivalent algebraic form, making the study of such impulsive systems possible. This article mainly uses the semi tensor product method of matrices to combine impulsive systems with logical dynamic systems.

Keywords

Impulsive System, Logical Dynamic System, The Semi Tensor Product of Matrices, Stability

1. 引言

在经典的微分方程理论中, 我们经常假设物体的运动状态是随着时间变化而连续变化的. 但在现实世界中, 许多事物的发展变化过程常常在短暂的时间内受到干扰, 使系统状态遭到突然的改变, 由于变化时间往往非常短, 其突变或跳跃过程可以视为在某时刻瞬间发生的 [1]. 像这样一种受瞬时干扰的演变过程 [2]在各个领域都存在, 我们把这种现象称之为脉冲现象, 具有脉冲现象的这些系统不能单靠传统的连续系统或单靠传统的离散系统就能解决的 [3]. 为了建模时充分考虑脉冲效应对系统的影响, 我们一般借助脉冲微分方程来刻画系统状态在演变过程中的变化规律 [4]. 这类用脉冲微分方程描述的系统常常被称作脉冲动态系统或者脉冲系统 [5, 6], 应用于许多领域, 如经济控制系统、姿态控制系统. 同时逻辑动态系统是学习系统生物学. 它由一组离散的逻辑变量组成, 每个逻辑变量由其相应的逻辑函数计算. 整个系统的逻辑状态由上一次每个变量的逻辑状态更新 [7]. 在近几年中有大量的文献将脉冲系统和逻辑动态系统相结合, 将逻辑动态系统的状态作为脉冲的选择, 本文我们考虑将逻辑动态系统的输出作为脉冲信号的转换, 用矩阵的半张量积的方法将两个系统合并, 形成一个新型的混合系统.

2. 预备知识

我们考虑这样一个系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), t \neq t_k, \\ x(t) = I_{\eta(t)}(x(t^-)), k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示系统状态. 我们假设系统 (1) 的解是右连续的. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 并且对于所有 $t \in \mathbb{R}_+^0$ 都有 $f(0) = 0$. 假设当 $t \geq t_0$ 时函数 f 满足系统 (1) 的解的全局存在性和唯一性的一些适当条件. 当 $n \to \infty$ 时脉冲序列 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 满足 $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_k \to +\infty$. $\eta(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{D}_N := \{0, 1, ..., N-1\}$ 是逻辑动态系统的输出:

$$\begin{cases} \sigma(t_{k+1}) = g(\sigma(t_k)) \\ \eta(t_k) = h(\sigma(t_k)) \end{cases} \tag{2}$$

并且 $I_\eta(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个连续的函数满足 $I_\eta(t) = 0$ 当 $x = 0$.

定义1. 设 $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\mathcal{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{p\times q}$. 则

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathcal{B} & a_{12}\mathcal{B} & \cdots & a_{1n}\mathcal{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathcal{B} & a_{m2}\mathcal{B} & \cdots & a_{mn}\mathcal{B} \end{bmatrix}$$

被称为矩阵 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的张量积.

定义2. 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{p\times q}$, 则

$$\mathcal{A} \ltimes \mathcal{B} = (\mathcal{A} \otimes I_{\alpha/n})(\mathcal{B} \otimes I_{\alpha/p})$$

被称为矩阵 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 的半张量积, 其中 α 为 n 与 p 的最小公倍数.

对于任意向量$x \in \mathbb{R}^n$, 我们定义$x^k = \underbrace{x \ltimes x \ltimes \cdots \ltimes x}_{k}$. 在此基础上, 一个逻辑函数 $h : \mathcal{D}_2^l \to \mathcal{D}_2$ 可以转化为一个映射: $\Delta_{2^l} \to \Delta_2$, 其中 $\Delta_2 = \{\delta_2^1, \delta_2^2\}$.

引理1. 设 $h(q_1, \ldots, q_l)$ 为一个逻辑函数, 在向量形式下, $h : \Delta_{2^l} \to \Delta_2$, 存在唯一的结构矩阵 $H \in \mathcal{L}_{2\times 2^l}$, 使得

$$h(q_1, \ldots, q_l) = Hq_1q_2\cdots q_l := H \ltimes_{i=1}^{l} q_i.$$

定义3. 函数 $W : [t_0 - h, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^0$ 属于 ν_0 , 如果

1) W 在 $[t_{n-1}, t_n) \times \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{Z}_+$ 上连续并且 $\lim_{(t,u)\to(t_n^-,v)} W(t, u) = W(t_n^-, v)$ 存在;

2) $W(t, x)$ 对 x 是满足局部 *Lipschitz* 并且 $W(t, 0) \equiv 0$.

引理2. 设 X 和 Y 分别为 n 维和 m 维的列向量. 则有

$$\mathbf{W}_{[n,m]}XY = YX.$$

其中 $\mathbf{W}_{[n,m]} = [I_m \otimes \delta_n^1\ I_m \otimes \delta_n^2 \ldots I_m \otimes \delta_n^n]$ 是交换矩阵,

引理3. 对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ 和$j \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, 则有

$$x^jy^j = [\prod_{s=1}^{j-1} \mathbf{W}_{[n^{j-s}m^{j-s},n]}](xy)^j$$

引理4. 对于任意 $x \in \Delta_n$，有$x^2 = M_{r,n}x$，其中$M_{r,n} = Diag\{\delta_n^1, \delta_n^2, ...\delta_n^n\}$ 是降幂矩阵.

引理5. 对于任意 $X \in \Delta_n$ 和$Y \in \Delta_n$，有$\mathbf{D}_{[n,m]}XY = X$，其中$\mathbf{D}_{[n,m]} := (\mathbf{1}_m^T \otimes I_n)\mathbf{W}_{[n,m]}$ 是伪矩阵.

引理6. 假设$A_j, j = 1, 2, ..., m$ 是一系列矩阵，那么对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$\omega \in \Delta_m$ 有

$$[A_1 x, ..., A_m x] \ltimes \omega = [A_1, ..., A_m] \ltimes \omega \ltimes x.$$

引理7. 对任意$x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Delta_m$，有$\|\omega \ltimes x\| = \|x \ltimes \omega\| = \|x\|$.

3. 主要内容

首先我们定义

$$G(x(t_k^-)) := [I_{N-1}(x(t_k^-))\ I_{N-2}(x(t_k^-)) \dots I_0(x(t_k^-))].$$

通过引理, 且对任意$\eta(t)$, 有$I_{\eta(t)} = 0$, 则有

$$I_{\eta(t)}(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p I_{\eta(t)}(0) \ltimes x^p.$$

因此, 容易得到

$$G(x(t_k^-)) := \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} [D^p I_{N-1}(0) \ltimes (x(t_k^-))^p \dots D^p I_0(0) \ltimes (x(t_k^-))^p].$$

我们定义 $\sigma(t_k)$ 和 $\eta(t_k)$ 的向量形式为 $\omega(t_k) = \delta_m^{m-\sigma}$ 和 $\lambda(t_k) = \delta_N^{N-\eta(t_k)}$. 通过引理, 可以得到

$$\begin{aligned} G(x(t_k^-)) \ltimes \lambda(t_k) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} [D^p I_{N-1}(0) \ltimes (x(t_k^-))^p \dots D^p I_0(0) \ltimes (x(t_k^-))^p] \ltimes \lambda(t_k) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p G(0) \ltimes \lambda(t_k) \ltimes x(t_k^-)^p \end{aligned} \tag{3}$$

其中$D^p G(0) = [D^p I_{N-1}(0) \dots D^p I_0(0)]$. 因此系统(1) 和系统(2) 可以等价地表述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), t \neq t_k, \\ x(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p G(0) \ltimes \lambda(t_k) \ltimes x(t_k^-)^p, k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

和

$$\begin{cases} \omega(t_{k+1}) = L_g(\omega(t_k)) \\ \lambda(t_k) = L_h(\omega(t_k)). \end{cases} \tag{5}$$

定义

$$\xi(t):=\begin{cases}\omega(t_{k-1})\ltimes x(t), t\in(t_{k-1},t_k),\\ \omega(t_k)\ltimes x(t_k), t=t_k.\end{cases} \tag{6}$$

因此, 当 $t\neq t_k$, $\dot{\xi}(t)=f(\xi(t))$. 当 $t=t_k$,

$$\begin{aligned}\xi(t_k)=&\omega(t_k)\ltimes x(t_k)\\ =&L_g\omega(t_{k-1})\ltimes\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}D^pG(0)\ltimes\lambda(t_k)\ltimes(x(t_k^-))^p\\ =&\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}L_g\omega(t_{k-1})D^pG(0)\ltimes\lambda(t_k)\ltimes(x(t_k^-))^p\\ =&\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}L_g\omega(t_{k-1})D^pG(0)\ltimes L_hL_g\omega(t_{k-1})\ltimes(x(t_k))^p\\ =&\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}L_g\mathbf{W}_{[N^2n^p,m]}D^pG(0)\ltimes L_hL_g(\omega(t_{k-1}))^2\ltimes(x(t_k))^p\\ =&\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}L_g\mathbf{W}_{[N^2n^p,m]}D^pG(0)\ltimes L_hL_g\mathbf{M}_{[r,m]}\omega(t_{k-1})\ltimes(x(t_k))^p\end{aligned} \tag{7}$$

对于$p=1$, 有$\omega(t_{k-1})\ltimes(x(t_k))^p=\omega(t_{k-1})\ltimes(x(t_k^-))=\xi(t_k^-)$. 对于$p\geq 2$, 有

$$\begin{aligned}\omega(t_{k-1})\ltimes(x(t_k))^p=&\mathbf{D}_{[m,m]}^{p-1}\omega(t_{k-1})^p\ltimes x(t_k^-)^p\\ =&\mathbf{D}_{[m,m]}^{p-1}(\prod_{s=0}^{p-1}\mathbf{W}_{[n^{p-s}m^{p-s},n]}\xi^p(t_k^-)\end{aligned} \tag{8}$$

定义

$$\Gamma_1:=L_g\mathbf{W}_{[N^2n,m]}DG(0)L_hL_g\mathbf{M}_{[r,m]}. \tag{9}$$

当 $p\geq 2$,

$$\Gamma_p:=L_g\mathbf{W}_{[N^2n^p,m]}DG(0)L_hL_g\mathbf{M}_{[r,m]}\mathbf{D}_{[m,m]}^{p-1}(\prod_{s=0}^{p-1}\mathbf{W}_{[n^{p-s}m^{p-s},n]}). \tag{10}$$

$$\Gamma(\xi(t_k^-)):=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\Gamma_p\xi^p(t_k^-). \tag{11}$$

因此, 系统(1)可以转换成以下新系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t), t\neq t_k,\\ x(t)=D_{\eta(t)}x(t^-), t=t_k, k\in\mathbb{Z}_+,\\ x(0)=x_0,\end{cases} \tag{12}$$

其中 A 和 $D_{\eta(t)}$ 是常数矩阵. 且定义

$$G(x(t_k^-)) := [D_{N-1}x(t_k^-)\ D_{N-2}x(t_k^-)\ldots D_0x(t_k^-)] \tag{13}$$

和

$$D := [D_{N-1}\ D_{N-2}\ldots D_0] \tag{14}$$

系统(12)可以写成

$$\begin{cases}\dot{\xi}(t) = A\xi(t), t \neq t_k,\\ x(t) = \Lambda(t)\xi(t^-), t = t_k, k \in \mathbb{Z}_+,\\ \xi(0) \in \Delta_m \ltimes \mathbb{R}^n,\end{cases} \tag{15}$$

其中$\Lambda := L_g\mathbf{W}_{[N^2n,m]}DL_hL_g\mathbf{M}_{[r,m]}$.

4. 总结

过去我们往往只研究逻辑动态系统或者脉冲系统, 在本文中我们将逻辑动态系统和脉冲系统相结合, 将逻辑动态系统的输出作为脉冲的选择, 通过矩阵的半张量积的方法, 得到一个新型的混合系统, 未来我们可以研究该系统的各种性质, 比如：稳定性等等.

参考文献

[1] Benchohra, M., Henderson, J. and Ntouyas, S. (2006) Impulsive Differential Equations and Inclusions. Hindawi Publishing Corporation, New York. https://doi.org/10.1155/9789775945501

[2] Ballinger, G. and Liu, X.Z. (1999) Existence and Uniqueness Results for Impulsive Delay Differential Equations. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, **5**, 579-591.

[3] Liu, X. and Ballinger, G. (2003) Boundedness for Impulsive Delay Differential Equations and Applications to Population Growth Models. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **53**, 1041-1062. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(03)00041-5

[4] Wang, Q. and Liu, X. (2005) Exponential Stability for Impulsive Delay Differential Equations by Razumikhin Method. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **309**, 462-473. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.09.016

[5] Li, X. (2010) New Results on Global Exponential Stabilization of Impulsive Functional Differential Equations with Infinite Delays or Finite Delays. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 4194-4201. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.05.006

[6] Li, X. and Song, S. (2016) Stabilization of Delay Systems: Delay-Dependent Impulsive Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **62**, 406-411. https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2530041

[7] Cheng, D.Z., Qi, H.S. and Li, Z.Q. (2011) Analysis and Control of Boolean Networks: A Semitensor Product Approach. Springer, New York.