Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(6), 3069-3085
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126307

轮图的边容错强Menger边连通性

南俐贞[*]，王世英

山西师范大学数学与计算机科学学院，山西 太原

收稿日期：2023年5月28日；录用日期：2023年6月23日；发布日期：2023年6月30日

摘 要

连通性是评估互连网络可靠度和容错性的一个非常重要的参数。若对于连通图G中的任意两个顶点x, y，它们之间有$\min\{\deg_G(x), \deg_G(y)\}$条边不相交的路，则连通图$G$是强Menger边连通的。若对于任意的边集$F_e \subseteq E(G)$且$|F_e| \le m$，$G - F_e$仍保持强Menger边连通性，则图$G$是$m$-边容错强Menger边连通的。若对于任意的边集$F_e \subseteq E(G)$且$|F_e| \le m$和$\delta(G - F_e) \ge 2$，$G - F_e$仍保持强Menger边连通性，则图$G$是$m$-条件边容错强Menger边连通的。在这篇文章中，我们证明$CW_n (n \ge 4)$是$(2n-4)$-边容错强Menger边连通的。此外，我们给出例子来说明我们保持强Menger边连通性的有关故障边的数量是最大值，即是最优的。

关键词

互连网络，容错性，轮图，强Menger边连通性

Edge-Fault-Tolerant Strong Menger Edge Connectivity of Wheel Networks

Lizhen Nan[*], Shiying Wang

School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Taiyuan Shanxi

Received: May 28th, 2023; accepted: Jun. 23rd, 2023; published: Jun. 30th, 2023

Abstract

Connectivity is an important measurement to evaluate the reliability and fault tolerance of interconnection networks. A connected graph is called strongly Menger edge connected if for any two distinct vertices x, y in G, there are $\min\{\deg_G(x), \deg_G(y)\}$ edge-disjoint paths between x and y.

[*]通讯作者。

文章引用: 南俐贞, 王世英. 轮图的边容错强 Menger 边连通性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 3069-3085.
DOI: 10.12677/aam.2023.126307

A graph G is called m-edge-fault-tolerant strongly Menger edge connected if $G-F_e$ remains strongly Menger edge connected for an arbitrary set $F_e \subseteq E(G)$ with $|F_e| \le m$. A graph G is called m-conditional edge-fault-tolerant strongly Menger edge connected if $G-F_e$ remains strongly Menger edge connected for an arbitrary set $F_e \subseteq E(G)$ with $|F_e| \le m$ and $\delta(G-F_e) \ge 2$. In this paper, we show that CW_n is $(2n-4)$-edge-fault-tolerant strongly Menger edge connected $\delta(G-F_e) \ge 2$ for $n \ge 4$ and $(6n-14)$-conditional edge-fault-tolerant strongly Menger edge connected for $n \ge 5$. Moreover, we present some examples to show that our results are all optimal with respect to the maximum number of tolerated edge faults.

Keywords

Interconnection Networks, Fault Tolerance, Wheel Network, Strong Menger Edge Connectivity

1. 引言

关于图的相关的定义和概念来源于[1]。$G(V(G),E(G))$是一个简单的无向连通图，$V(G)$代表顶点集，$E(G)$代表边集。对于任意的顶点$u \in V(G)$，$N_G(u)$表示 u 的邻域的集合，$E_G(u)$表示与 u 相连的边的集合，$d_G(u)=|E_G(u)|$表示 u 的度。$\delta(G)=\min\{d_G(u): u \in V(G)\}$定义为 G 的度，是 G 中顶点度的最小值。若 G 中的任意顶点 u，$d_G(u)=k$，则 G 是 k-正则的。若 G 中的边(u,v)满足$u \in F_1$，$v \in F_2$，则(u,v)是一个 F_1-F_2 边，所有 F_1-F_2 边的集合被定义为$E_G(F_1,F_2)$，用$e_G(F_1,F_2)$来表示集合中元素的个数。$F \subseteq V(G)$是 G 中的一个顶点集，$F_e \subseteq E(G)$是 G 中的一个边集。我们用$G-F$ 来代表 G 的一个子图，它的顶点集是$V(G)-F$ 和边集是$E(G)-\{(u,v) \in E(G) | \{u,v\} \cap F = \Phi\}$。如果$G-F$ 是不连通的或仅仅只有一个顶点，那么称 F 是 G 的一个顶点割。G 的连通度是 G 的顶点割的最小值，用$\kappa(G)$来表示。我们用$G-F_e$来代表 G 的一个子图，它的顶点集是$V(G)$和边集是$E(G)-F_e$。如果$G-F_e$是不连通的，那么称F_e是 G 的一个边割。G 的边连通度是 G 的边割的最小值，用$\lambda(G)$来表示。$P_k = ux_1x_2\cdots x_{k-2}v$ 且 $u,x_1,x_2,\cdots,x_{k-2},v$ 是 k 个不同的顶点表示一个 u,v-路。我们取两个不同的 u,v-路 $P_1 = ux_1x_2\cdots x_{k-2}v$ 和 $P_2 = uy_1y_2\cdots y_{k-2}v$。若$V(P_1) \cap V(P_2) = \{u,v\}$，则称 P_1 和 P_2 是顶点不相交的 u,v-路；若 $E(P_1) \cap E(P_2) = \Phi$，则称 P_1 和 P_2 是边不相交的 u,v-路。如果$G-F$ 没有 u,v-路，那么称 $F \subseteq V(G)-\{u,v\}$ 是一个 u,v-点割；如果$G-F_e$没有 u,v-路，那么称 $F_e \subseteq E(G)$是一个 u,v-边割。Menger 定理[2]是有关连通性和边连通性的一个典型的定理。

定理 1.1 [2] 1) x, y 是图 G 中的两个不同的顶点且$(x,y) \notin E(G)$，x,y-割的最小值等于 G 中点不相交的 x,y-路的最大值。

2) x, y 是图 G 中的两个不同的顶点，x,y-边割的最小值等于 G 中边不相交的 x,y-路的最大值。

在 Menger 定理的基础之上，Oh *et al.* [3]提出了强 Menger 连通性，也被称为最大局部连通性；Qiao *et al.* [4]提出了强 Menger 边连通性。

定义 1.2 [5] 1) x, y 是连通图 G 中的任意两个不同的顶点，若在 G 中 x 和 y 有 $\min\{\deg_G(x),\deg(y)\}$ 顶点不相交的路，则连通图 G 是强 Menger 连通的。

2) x, y 是连通图 G 中的任意两个不同的顶点，若在 G 中 x 和 y 之间有 $\min\{\deg_G(x),\deg(y)\}$ 边不相交的路，则连通图 G 是强 Menger 边连通的。

在真实的互连网络中故障可能发生，因此考虑互连网络的容错性是尤为重要的。Oh *et al.* [3] [6]提出了 m-容错强 Menger 连通性；Shih *et al.* [7]提出了 m-条件容错强 Menger 连通性。此外，边的容错强 Menger 连通性和条件容错强 Menger 连通性在参考文献[4]和[5]也被提出。

定义 1.3 [5] 1) 对于 G 中的任意一个顶点集 $F\subseteq V(G)$ 且 $|F|\le m$，若 $G-F$ 是强 Menger 连通的，则图 G 是 m-容错强 Menger 连通的。

2) 对于 G 中的任意一个边集 $F_e\subseteq E(G)$ 且 $|F_e|\le m$，若 $G-F_e$ 是强 Menger 边连通的，则图 G 是 m-边容错强 Menger 边连通的。

定义 1.4 [5] 1) 对于 G 中的任意一个顶点集 $F\subseteq V(G)$ 且 $|F|\le m$ 和 $\delta(G-F)\ge 2$，若 $G-F$ 是强 Menger 连通的，则图 G 是 m-条件容错强 Menger 连通的。

2) 对于 G 中的任意一个边集 $F_e\subseteq E(G)$ 且 $|F_e|\le m$ 和 $\delta(G-F_e)\ge 2$，若 $G-F_e$ 是强 Menger 边连通的，则图 G 是 m-条件边容错强 Menger 边连通的。

对于强 Menger 连通性和强 Menger 边连通性，许多拓扑结构已经被研究：超立方体 Q_n [4]，折叠超立方体 FQ_n [4] [8] [9]，平衡超立方体 BH_n [5]，类超立方体网络[7] [10]，一类正则网络[11]，泡型星图 BS_n [12] [13]，泡型图 B_n [14]等等。在这篇文章中我们研究的是 n-维轮图 CW_n [15]的边容错强 Menger 边连通性和条件边容错强 Menger 边连通性。轮图 CW_n 有许多优良的特性，如顶点传递性和高度正则性，轮图 CW_n 的许多性质已经被研究过，具体可以见参考文献[16]-[21]。

这篇文章剩余部分的结构安排如下。第二部分阐述了轮图的定义和一些有用的性质引理，未被证明的引理我们会在这一部分给出详细的证明；第三部分证明了 n-维轮图 $CW_n(n\ge 4)$ 的边容错强 Menger 边连通性；第四部分我们对这篇文章做出总结。

2. 预备知识

用 $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$ 代表置换，$i\to p_i$。为了方便，我们可以将置换 $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$ 表示为 $p_1p_2\cdots p_n$。此外每个置换也可以表示成一个轮换，例如：$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=(132)$。特别地，$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}=(1)$。

两个置换的乘积 $\sigma\tau$ 是先作用于 τ 后作用于 σ。例如：$(12)(13)=(123)$。设 a,b 是两个整数，规定 $[a,b]=\{x\,|\,x\text{是}a\le x\le b\text{中的整数}\}$。设 S_n 是 n 阶置换群，它的元素是集合 $[1,n]$ 中的所有置换 $p=p_1p_2\cdots p_n$。取 $i,j\in[1,n]$ 是两个整数且 $i\ne j$，$p=p_1p_2\cdots p_n$ 是置换群 S_n 中的一个置换，我们规定运算“$p\circ(i,j)$”是将置换 p 中 i,j 两个位置的数互换，其余位置的数不变，即 p_i 与 p_j 互换即可。例如：$p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n\circ(i,j)=p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$。运算“$p\circ(i,j)=p(i,j)$”可以简化成“$p(i,j)$”。

我们将在下面介绍轮图 CW_n 的定义和一些性质。

定义 2.1 [15] n-维轮图 CW_n 的顶点集 $V(CW_n)=S_n$。对于任意的 $u,v\in V(CW_n)$，$(u,v)\in E(CW_n)$ 当且仅当 $u=v\circ(1,k)$，$2\le k\le n$ 或者 $u=v\circ(k,k+1)$，$2\le k\le n-1$ 或者 $u=v\circ(2,n)$。n-维轮图 CW_n 的顶点数是 n 阶置换群 S_n 的元素个数 $n!$。

n-维轮图 CW_n 是一个特殊的凯莱图，因此我们可以得到一些性质。CW_n 是 $(2n-2)$-正则的和顶点传递的，$n\ge 4$。CW_n 是二部图并且围长是 4，$n\ge 4$。在这里展示出了 4-维轮图 CW_4 的结构(见图 1)。CW_n 可以被划分成 n 个不相交的子图 $CW_n^1,CW_n^2,\cdots,CW_n^3$，其中每个顶点 $u=u_1u_2\cdots u_n\in V(CW_n^i)$ 的最后一个位置 u_n 为一个固定的整数 i，其中 $i\in[1,n]$。显然，CW_n^i 是同构于 BS_{n-1}，我们知道 BS_{n-1} 是 $(n-1)$-维的泡型

星图。对于任意的顶点$v\in V(CW_n)$，有三个外部邻域$v(1,n)$，$v(n-1,n)$，$v(2,n)$被称为v的外部邻域，记为$v^+=v(1n)$，$v^-=v(n-1,n)$，$v^*=v(2n)$。如果一个边(u,v)的两个顶点在不同的子图CW_n^i中，那么边(u,v)被称为交叉边。对于任意的$v\in V(CW_n^i)$，其中$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$n\ge 4$，我们知道v^+,v^-,v^*属于三个不同的子图$CW_n^j\,(j\ne i)$中。规定集合$E_{ij}(CW_n)=\left\{(u,v)\in E(CW_n)\middle|u\in V(CW_n^i),v\in V(CW_n^j)\right\}$，其中$i,j\in[1,n]$，$i\ne j$。对于任意的边集$F_e\in E(CW_n)$，我们定义$F_e^i=F_e\cap E(CW_n^i)$，$F_e^0=F_e-\bigcup_{i=1}^n F_e^i$，其中$i\in[1,n]$。$CW_n^L$是由$\bigcup_{i\in L}V(CW_n^i)$诱导出来的$CW_n$的子集，其中$L\subseteq[1,n]$。

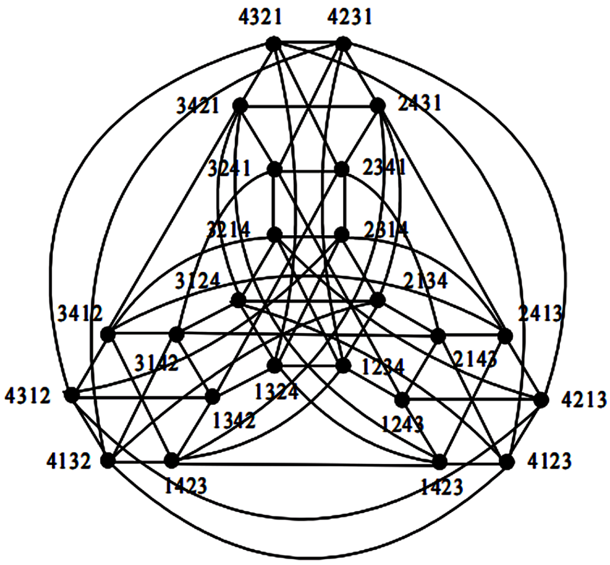

Figure1. Wheel network CW_4
图 1. 轮图 CW_4

引理 2.2 [16] [17]设n是一个整数且$n\ge 4$，有以下结论：

1) 对于任意的$i,j\in[1,n]$且$i\ne j$，$|E_{ij}(CW_n)|=3(n-2)!$；

2) 对于任意的$u,v\in V(CW_n^k)$，$u\ne v$且$k\in[1,n]$，$\{u^+,u^-,u^*\}\cap\{v^+,v^-,v^*\}=\phi$；

3) 对于任意的$u\in V(CW_n^{[1,3]})$，$u^+\in V(CW_n^{[4,n]})$或$u^-\in V(CW_n^{[4,n]})$或$u^*\in V(CW_n^{[4,n]})$；

4) 对于任意的$u\in V(CW_n^{[1,2]})$，存在两个顶点$u',u''\in\{u^+,u^-,u^*\}$，使得$u',u''\in V(CW_n^{[3,n]})$。

引理 2.3 [20] $\lambda(CW_n)=2n-2$，其中$n\ge 4$。

引理 2.4 [13] $\lambda(BS_n)=2n-3$，其中$n\ge 3$。

引理 2.5 [13] BS_n有以下性质：

1) 设$F_e\in E(BS_n)$，且$F_e\le 4n-9$，$n\ge 3$。如果BS_n-F_e不连通，则BS_n-F_e有一个连通分支H，$|V(H)|\ge n!-1$。

2) 设$F_e\in E(BS_n)$，且$F_e\le 6n-14$，$n\ge 3$。如果BS_n-F_e不连通，则BS_n-F_e有一个连通分支H，$|V(H)|\ge n!-2$。

3) 设$F_e\in E(BS_n)$，且$F_e\le 8n-21$，$n\ge 3$。如果BS_n-F_e不连通，则BS_n-F_e有一个连通分支H，$|V(H)|\ge n!-3$。

3. 最大连通部分

引理 2.6 设$F_e\subseteq E(CW_4)$，且$|F_e|\le 9$。如果CW_4-F_e不连通，则CW_4-F_e由两个连通部分组成，其

中一个连通部分是一个孤立点。

证明因为 $CW_4 - F_e$ 是不连通的，不失一般性，我们假设 $\left|F_e^1\right| \geq \left|F_e^2\right| \geq \left|F_e^3\right| \geq \left|F_e^4\right|$。因为 $n=4$，根据引理 2.2(1)，$\left|E_{i,j}\left(CW_4\right)\right| = 3\times(4-2)! = 6$，其中 $i,j\in[1,4]$，$i\neq j$。由 $\left|F_e\right|\leq 9$，可得 $\left|F_e^4\right|\leq 2$；否则 $\left|F_e\right|\geq 4\times 3 = 12 > 9$，与事实 $\left|F_e\right|\leq 9$ 相矛盾。根据引理 2.4，$CW_4^4 - F_e^4$ 是连通的。设 H 是 $CW_4 - F_e$ 的包含 $CW_4^4 - F_e^4$ 作为一个子集的连通部分。接下来我们考虑如下情况：

情形 1 $\left|F_e^1\right|\leq 2$

在这种情形下，根据引理 2.4，$CW_4^i - F_e^i$ 是连通的，$i\in[1,4]$。现在我们声称 $E_{1,2}\left(CW_4\right) - F_e \neq \Phi$ 或者 $E_{1,3}\left(CW_4\right) - F_e \neq \Phi$；否则的话 $\left|F_e\right| \geq \left|E_{1,2}\left(CW_4\right)\right| + \left|E_{1,3}\left(CW_4\right)\right| = 2\times 6 = 12 > 9$，与事实 $\left|F_e\right|\leq 9$ 相矛盾。不失一般性，我们可以假设 $E_{1,2}\left(CW_4\right) - F_e \neq \Phi$。相似的，可以得到 $E_{1,i}\left(CW_4\right) - F_e \neq \Phi$ 或者 $E_{2,i}\left(CW_4\right) - F_e \neq \Phi$，其中 $i\in[3,4]$。因此 $H = CW_4 - F_e$ 连通了，与假设相矛盾。

情形 2 $\left|F_e^1\right| = 3$

假设 $\left|F_e^2\right|\leq 2$，则 $\left|F_e^0\right|\leq 9-3=6$。根据引理 2.4，$CW_4^i - F_e^i$ 是连通的，$i\in[2,4]$。我们可以得到 $E_{2,3}\left(CW_4\right) - F_e \neq \Phi$ 或者 $E_{2,4}\left(CW_4\right) - F_e \neq \Phi$；否则 $\left|F_e\right| \geq \left|E_{2,3}\left(CW_4\right)\right| + \left|E_{2,4}\left(CW_4\right)\right| = 2\times 6 = 12 > 9$，与事实 $\left|F_e\right|\leq 9$ 相矛盾。不失一般性，我们可以假设 $E_{2,3}\left(CW_4\right) - F_e \neq \Phi$。相似的，可以得到 $E_{2,4}\left(CW_4\right) - F_e \neq \Phi$ 或者 $E_{3,4}\left(CW_4\right) - F_e \neq \Phi$。因此 $CW_4^{[2,4]} - F_e$ 是 H 的一个子集。因为 $\left|F_e^1\right| = 3$，根据引理 2.5(1)，$CW_4^1 - F_e^1$ 有一个连通分支 H_1，使得 $\left|V\left(H_1\right)\right| \geq 3! - 1$。因为 $\left|E_{CW_4}\left(V\left(H_1\right), V\left(CW_4^{[2,3]}\right)\right) - F_e\right| \geq \left|E_{1,2}\left(CW_4\right)\right| + \left|E_{1,3}\left(CW_4\right)\right| - 2\left|V\left(CW_4^1\right) - V\left(H_1\right)\right| - \left|F_e^0\right| \geq 6\times 2 - 2 - 9 > 0$，所以 H_1 是 H 的一个子集。因此 $\left|V(H)\right| \geq 4! - 1$。

假设 $\left|F_e^2\right| = 3$，则 $\left|F_e^0\right| \leq 9 - 3\times 2 = 3$。如果 $\left|F_e^3\right|\leq 2$，根据引理 2.4，$CW_4^i - F_e^i$ 是连通的，$i\in[3,4]$。因为 $\left|E_{3,4}\left(CW_4\right) - F_e\right| \geq \left|E_{3,4}\left(CW_4\right)\right| - \left|F_e^0\right| \geq 6 - 3 = 3 > 0$，所以 $CW_4^{[3,4]} - F_e$ 是 H 的一个子集。由引理 2.2(4)，对于任意的 $u\in V\left(CW_4^{[1,2]}\right)$，存在两个顶点 $u', u'' \in \left\{u^+, u^-, u^*\right\}$，使得 $u', u'' \in V\left(CW_4^{[3,4]}\right)$。因为 $\left|F_e^0\right| \leq 3 < 2\times 2$，所以在 $CW_4^{[1,2]}$ 中最多有一个顶点不被包含在 H 中。因此 $\left|V(H)\right| \geq 4! - 1$。如果 $\left|F_e^3\right| = 3$，则 $\left|F_e^0\right| \leq 9 - 3\times 3 = 0$。已知对于任意的 $v\in V\left(CW_4^{[3,4]}\right)$，存在一个顶点 $v' \in \left\{v^+, v^-, v^*\right\}$，使得 $v' \in V\left(CW_4^4\right)$。因为 $\left|F_e^0\right| = 0$，所以 $H = CW_4 - F_e$ 是连通的，与假设矛盾。

情形 3 $\left|F_e^1\right| \geq 4$

假设 $\left|F_e^2\right| \leq 2$，则根据引理 2.4，$CW_4^i - F_e^i$ 是连通的，$i\in[2,4]$。因为 $\left|E_{i,j}\left(CW_4\right) - F_e\right| \geq \left|E_{i,j}\left(CW_4\right)\right| - \left|F_e^0\right| \geq 6 - 5 = 1 > 0$，其中 $i,j\in[2,4]$，$i\neq j$，所以 $CW_4^{[2,4]} - F_e$ 是 H 的一个子图。已知对于任意的 $u\in V\left(CW_4^1\right)$，$\left\{u^+, u^-, u^*\right\} \subseteq V\left(CW_4^{[2,4]}\right)$。因为 $\left|F_e^0\right| \leq 5 < 3\times 2$，所以在 CW_4^1 中最多有一个顶点不被包含在 H 中。因此 $\left|V(H)\right| \geq 4! - 1$。

假设 $\left|F_e^2\right| \geq 3$，则 $\left|F_e^0\right| \leq 9 - 4 - 3 = 2$，$\left|F_e^3\right| \leq 2$。根据引理 2.4，$CW_4^3 - F_e^3$ 是连通的。因为 $\left|E_{3,4}\left(CW_4\right) - F_e\right| \geq \left|E_{3,4}\left(CW_4\right)\right| - \left|F_e^0\right| \geq 6 - 2 > 0$，所以 $CW_4^{[3,4]} - F_e$ 是 H 的一个子集。根据引理 2.2(4)，对于任意的 $v\in V\left(CW_4^{[1,2]}\right)$，存在两个顶点 $v', v'' \in \left\{v^+, v^-, v^*\right\}$，使得 $v' \in V\left(CW_4^{[3,4]}\right)$ 和 $v'' \in V\left(CW_4^{[3,4]}\right)$。因为 $\left|F_e^0\right| \leq 2 < 2\times 2$，所以在 $CW_4^{[1,2]}$ 中最多有一个顶点不被包含在 H 中。因此 $\left|V(H)\right| \geq 4! - 1$。

引理 2.7 设 $F_e \subseteq E\left(CW_n\right)$，且 $\left|F_e\right| \leq 4n - 7$，$n \geq 4$。如果 $CW_n - F_e$ 不连通，则 $CW_n - F_e$ 由两个连通部分组成，其中一个连通部分是一个孤立点。

证明当 $n=4$ 时，根据引理 2.6，证明结论是成立的。假设 $n\geq 5$ 且 $CW_n - F_e$ 是不连通的。不失一般性，我们可以假设 $\left|F_e^1\right| \geq \left|F_e^2\right| \geq \left|F_e^3\right| \geq \cdots \geq \left|F_e^n\right|$。假设 H 是 $CW_n - F_e$ 的包含 $CW_n^n - F_e^n$ 作为一个子集的连通部分。

接下来我们考虑如下情况：

情形 1 $\left|F_e^1\right| \le 2n-6$

在这种情况下，根据引理 2.4，$CW_n^i - F_e^i$ 是连通的，$i \in [1,n]$。因为 $\left|E_{i,j}(CW_n) - F_e\right| \ge \left|E_{i,j}(CW_n)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)! - (4n-7) > 0$，其中 $i, j \in [1,n]$，$i \ne j$，$n \ge 5$，因此 $H = CW_n - F_e$ 是连通的，与假设 $CW_n - F_e$ 不连通相矛盾。

情形 2 $2n-5 \le \left|F_e^1\right| \le 4n-13$

假设 $\left|F_e^2\right| \le 2n-6$，则 $\left|F_e^0\right| \le 4n-7-(2n-5) = 2n-2$。根据引理 2.4，$CW_n^i - F_e^i$ 是连通的，$i \in [2,n]$。因为 $\left|E_{i,j}(CW_n) - F_e\right| \ge \left|E_{i,j}(CW_n)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)! - (2n-2) > 0$，其中 $i, j \in [2,n]$，$i \ne j$，$n \ge 5$，所以 $CW_n^{[2,n]} - F_e$ 是 H 的一个子集。因为 $2n-5 \le \left|F_e^1\right| \le 4n-13 = 4(n-1)-9$，根据引理 2.5(1)，$CW_n^1 - F_e^1$ 有一个连通分支 H_1，使得 $\left|V(H_1)\right| \ge (n-1)! - 1$。又因为 $\left|E_{CW_n}\left(V(H_1), V\left(CW_n^2\right)\right) - F_e\right| \ge \left|E_{1,2}(CW_4)\right| - \left(\left|V\left(CW_n^1\right)\right| - \left|V(H_1)\right|\right) - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)! - 1 - (2n-2) > 0$ $n \ge 5$，所以 H_1 是 H 的一个子集。因此 $\left|V(H)\right| \ge n! - 1$。

假设 $\left|F_e^2\right| \ge 2n-5$，则 $\left|F_e^0\right| \le 4n-7-2(2n-5) = 3$，$\left|F_e^3\right| \le 3 < 2n-6$，$n \ge 5$。根据引理 2.4，$CW_n^i - F_e^i$ 是连通的，$i \in [3,n]$。因为 $\left|E_{i,j}(CW_n) - F_e\right| \ge \left|E_{i,j}(CW_n)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)! - 3 > 0$，其中 $i, j \in [3,n]$，$i \ne j$，$n \ge 5$，所以 $CW_n^{[3,n]} - F_e$ 是 H 的一个子集。由引理 2.2(4)，对于任意的 $v \in V\left(CW_n^{[1,2]}\right)$，存在两个顶点 $v', v'' \in \left\{v^+, v^-, v^*\right\}$，使得 $v' \in V\left(CW_n^{[3,n]}\right)$ 和 $v'' \in V\left(CW_n^{[3,n]}\right)$。又因为 $\left|F_e^0\right| \le 3 < 2 \times 2$，所以在 $CW_n^{[1,2]}$ 中最多有一个顶点不被包含在 H 中。因此 $\left|V(H)\right| \ge n! - 1$。

情形 3 $4n-12 \le \left|F_e^1\right| \le 4n-7$

在这种情形下，可得 $\left|F_e^0\right| \le 4n-7-(4n-12) = 5$，$\left|F_e^3\right| \le 2 < 2n-6$，$n \ge 5$，根据引理 2.4，$CW_n^i - F_e^i$ 是连通的，$i \in [3,n]$。因为 $\left|E_{i,j}(CW_n) - F_e\right| \ge \left|E_{i,j}(CW_n)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)! - 5 > 0$，其中 $i, j \in [3,n]$，$i \ne j$，$n \ge 5$，所以 $CW_n^{[3,n]} - F_e$ 是 H 的一个子集。

假设 $\left|F_e^2\right| \le 2n-6$，则 $CW_n^{[2,n]} - F_e$ 是 H 的一个子集。已知对于任意的 $u \in V\left(CW_n^1\right)$，有 $\left\{u^+, u^-, u^*\right\} \subseteq V\left(CW_n^{[2,n]}\right)$。又因为 $\left|F_e^0\right| \le 5 < 3 \times 2$，所以在 CW_n^1 中最多有一个顶点不被包含在 H 中。因此 $\left|V(H)\right| \ge n! - 1$。

假设 $\left|F_e^2\right| \ge 2n-5$。因为 $n \ge 5$，所以 $\left|F_e^2\right| \ge 5$，则 $\left|F_e^0\right| \le 4n-7-(4n-12)-5 = 0$。根据引理 2.2(4)，$H = CW_n - F_e$ 是连通的，与假设相矛盾。

引理 2.8 设 $F_e \subseteq E(CW_5)$，且 $\left|F_e\right| \le 19$。如果 $CW_5 - F_e$ 不连通，则 $CW_5 - F_e$ 有一个连通分支 H，$\left|V(H)\right| \ge 5! - 2$。

证明因为 $CW_5 - F_e$ 是不连通的，不失一般性，我们可以假设 $\left|F_e^1\right| \ge \left|F_e^2\right| \ge \left|F_e^3\right| \ge \left|F_e^4\right| \ge \left|F_e^5\right|$。因为 $n = 5$，根据引理 2.2(1)，所以 $\left|E_{i,j}(CW_5)\right| = 3 \times (5-2)! = 18$，$i, j \in [1,5]$，$i \ne j$。由 $\left|F_e\right| \le 19$，可得 $\left|F_e^5\right| \le \left|F_e^4\right| \le 4$；否则的话 $\left|F_e\right| \ge 5 \times 4 = 20 > 19$，与事实 $\left|F_e\right| \le 19$ 相矛盾。根据引理 2.4，$CW_5^i - F_e^i$ 是连通的，$i \in [4,5]$。设 H 是 $CW_5 - F_e$ 中包含 $CW_5^5 - F_e^5$ 作为一个子集的连通部分。现在我们考虑下面的几种情形：

情形 1 $\left|F_e^1\right| \le 4$

在这种情况下，根据引理 2.4，$CW_5^i - F_e^i$ 是连通的，$i \in [1,5]$。现在我们声称 $E_{1,2}(CW_5) - F_e \ne \Phi$ 或者 $E_{1,3}(CW_5) - F_e \ne \Phi$；否则的话 $\left|F_e\right| \ge \left|E_{1,2}(CW_5)\right| + \left|E_{1,3}(CW_5)\right| = 2 \times 18 = 36 > 19$，与事实 $\left|F_e\right| \le 19$ 产生了矛盾。不失一般性，我们可以假设 $E_{1,2}(CW_5) - F_e \ne \Phi$。同样的道理，可以得到 $E_{1,3}(CW_5) - F_e \ne \Phi$ 或者 $E_{2,i}(CW_5) - F_e \ne \Phi$。因此 $H = CW_5 - F_e$ 是连通的，与假设 $CW_5 - F_e$ 是不连通的产生了矛盾。

情形 2 $5 \le \left|F_e^1\right| \le 7$

情形 2.1 $\left|F_e^2\right| \le 4$

在这种情形下，$\left|F_e^0\right| \le 19-5=14$。根据引理 2.4，$CW_5^i - F_e^i$ 是连通的，$i \in [2,5]$。现在我们声称 $E_{2,3}(CW_5)-F_e \ne \Phi$ 或者 $E_{2,4}(CW_5)-F_e \ne \Phi$；否则的话 $\left|F_e\right| \ge \left|E_{2,3}(CW_5)\right| + \left|E_{2,4}(CW_5)\right| = 2\times 18 = 36 > 19$，与事实 $\left|F_e\right| \le 19$ 产生矛盾。不失一般性，我们可以假设 $E_{2,3}(CW_5)-F_e \ne \Phi$。相似的，可得 $E_{2,i}(CW_5)-F_e \ne \Phi$ 或者 $E_{3,i}(CW_5)-F_e \ne \Phi$，$i \in [4,5]$。因此 $CW_5^{[2,5]} - F_e$ 是 H 的一个子集。

假设 $CW_5^1 - F_e^1$ 是连通的。我们可以得到 $E_{1,2}(CW_5)-F_e \ne \Phi$ 或者 $E_{1,3}(CW_5)-F_e \ne \Phi$，与上面类似。因此 $H = CW_5 - F_e$ 是连通的，与事实 $CW_5 - F_e$ 不连通相矛盾。

假设 $CW_5^1 - F_e^1$ 是不连通的。因为 $5 \le \left|F_e^1\right| \le 7$，根据引理 2.5(1)，$CW_5^1 - F_e^1$ 有一个连通分支 H_1，使得 $\left|V(H_1)\right| \ge 4!-1$。又因为 $\left|E_{CW_5}\left(V(H_1), V\left(CW_5^2\right)\right) - F_e\right| \ge \left|E_{1,2}(CW_5)\right| - \left|V\left(CW_5^1\right) - V(H_1)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 18-1-14 = 3 > 0$，因此 H_1 是 H 的一个子集。因此 $\left|V(H)\right| \ge 5!-1 > 5!-5$。

情形 2.2 $5 \le \left|F_e^2\right| \le 7$

我们又将情形 2.2 分成以下两个子情形来讨论。

情形 2.2.1 $\left|F_e^3\right| \le 4$

在这种情形下，可得 $\left|F_e^0\right| \le 19-2\times 5 = 9$。根据引理 2.4，$CW_5^i - F_e^i$ 是连通的，$i \in [3,5]$。因为 $\left|E_{i,j}(CW_5)-F_e\right| \ge \left|E_{i,j}(CW_5)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 18-9 = 9 > 0$，其中 $i, j \in [3,5]$，$i \ne j$，所以 $CW_5^{[3,5]} - F_e$ 是 H 的一个子集。因为 $5 \le \left|F_e^2\right| \le \left|F_e^1\right| \le 7$，根据引理 2.5(1)，所以 $CW_5^k - F_e^k$ 有一个连通部分 H_k，使得 $\left|V(H_k)\right| \ge 4!-1$，$k \in [1,2]$。又因为 $\left|E_{CW_5}\left(V(H_k), V\left(CW_5^3\right)\right) - F_e\right| \ge \left|E_{k,3}(CW_5)\right| - \left|V\left(CW_5^k\right) - V(H_k)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 18-1-9 = 8 > 0$，因此 H_k 是 H 的一个子集，$k \in [1,2]$。因此 $\left|V(H)\right| \ge 5!-2$，引理成立。

情形 2.2.2 $5 \le \left|F_e^3\right| \le 7$

在这种情形下，可得 $\left|F_e^0\right| \le 19-3\times 5 = 4$。因为 $\left|E_{4,5}(CW_5)-F_e\right| \ge \left|E_{4,5}(CW_5)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 18-4 > 0$，所以 $CW_5^{[4,5]} - F_e$ 是 H 的一个子集。因为 $5 \le \left|F_e^3\right| \le \left|F_e^2\right| \le \left|F_e^1\right| \le 7$，根据引理 2.5(1)，$CW_5^k - F_e^k$ 有一个连通分支 H_k，使得 $\left|V(H_k)\right| \ge 4!-1$，$k \in [1,3]$。又因为 $\left|E_{CW_5}\left(V(H_k), V\left(CW_5^4\right)\right) - F_e\right| \ge \left|E_{k,4}(CW_5)\right| - \left|V\left(CW_5^k\right) - V(H_k)\right| - \left|F_e^0\right|$ $\ge 18-1-4 > 0$，因此 H_k 是 H 的一个子集，$k \in [1,3]$。如果对于某个 $k \in [1,3]$，$CW_5^k - F_e^k$ 是连通的，那么 $\left|V(H)\right| \ge 5!-2$。现在我们考虑 $\left|V(H_1)\right| = \left|V(H_2)\right| = \left|V(H_3)\right| = 4!-1$。设 $u_i \in V\left(CW_5^i\right) - V(H_i)$，其中 $i = 1,2,3$。如果对于某个 $i \in [1,3]$，有 $u_i \in V(H)$，那么 $\left|V(H)\right| \ge 5!-2$。接下来我们考虑 $\{u_1, u_2, u_3\} \cap V(H) = \Phi$。因为 CW_5 是二部图，所以 u_1, u_2, u_3 在 $CW_5 - F_e$ 中形成三个孤立的顶点或者一个边和一个孤立的顶点或者一个 P_3。如果 u_1, u_2, u_3 在 $CW_5 - F_e$ 中是三个孤立的顶点，则 $\left|F_e\right| \ge 3\times 8 - 2 = 22 > 19$，与事实 $\left|F_e\right| \le 19$ 产生矛盾；如果 u_1, u_2, u_3 在 $CW_5 - F_e$ 中是一个边和一个孤立的顶点，则 $\left|F_e\right| \ge 2\times 7 + 8 - 1 = 21 > 19$，与事实 $\left|F_e\right| \le 19$ 产生矛盾；如果 u_1, u_2, u_3 在 $CW_5 - F_e$ 中是一个 P_3，则 $\left|F_e\right| \ge 2\times 7 + 8 - 2 = 20 > 19$，与事实 $\left|F_e\right| \le 19$ 产生矛盾。

情形 3 $8 \le \left|F_e^1\right| \le 10$

情形 3.1 $\left|F_e^2\right| \le 4$

在这种情形下，可得 $\left|F_e^0\right| \le 19-8 = 11$。根据引理 2.4，$CW_5^i - F_e^i$ 是连通的，$i \in [2,5]$。因为 $\left|E_{i,j}(CW_5)-F_e\right| \ge \left|E_{i,j}(CW_5)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 18-11 = 7 > 0$，其中 $i, j \in [3,5]$，$i \ne j$，所以 $CW_5^{[2,5]} - F_e$ 是 H 的一个子集。假设 $CW_5^1 - F_e^1$ 是连通的，我们有 $\left|E_{1,2}(CW_5)-F_e\right| \ge \left|E_{1,2}(CW_5)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 18-11 = 7 > 0$，因此 $H = CW_5 - F_e$ 是连通的，与事实 $CW_5 - F_e$ 不连通产生矛盾。假设 $CW_5^1 - F_e^1$ 是不连通的，根据引理 2.5(2)，

$CW_5^1-F_e^1$ 有一个连通分支 H_1，使得 $|V(H_1)|\ge 4!-2$。因为 $\left|E_{CW_5}\left(V(H_1),V(CW_5^2)\right)-F_e\right|\ge|E_{1,2}(CW_5)|-\left|V(CW_5^1)-V(H_1)\right|-|F_e^0|\ge 18-2-11>0$，所以 H_1 是 H 的一个子集。因此 $|V(H)|\ge 5!-2$。

情形 3.2 $5\le|F_e^2|\le 7$

情形 3.2.1 $|F_e^3|\le 4$

在这种情形下，可得 $|F_e^0|\le 19-8-5=6$。根据引理 2.4，$CW_5^i-F_e^i$ 是连通的，$i\in[3,5]$。因为 $|E_{i,j}(CW_5)-F_e|\ge|E_{i,j}(CW_5)|-|F_e^0|\ge 18-6>0$，其中 $i,j\in[3,5]$，$i\ne j$，所以 $CW_5^{[3,5]}-F_e$ 是 H 的一个子集。因为 $5\le|F_e^2|\le 7$，根据引理 2.5(1)，$CW_5^2-F_e^2$ 有一个连通分支 H_2，使得 $|V(H_2)|\ge 4!-1$。

假设 $CW_5^1-F_e^1$ 是连通的。又因为 $|E_{1,3}(CW_5)-F_e|\ge|E_{1,3}(CW_5)|-|F_e^0|\ge 18-6>0$ 且 $\left|E_{CW_5}\left(V(H_2),V(CW_5^3)\right)-F_e\right|\ge|E_{2,3}(CW_5)|-\left|V(CW_5^2)-V(H_2)\right|-|F_e^0|\ge 18-1-6>0$，所以 $CW_5^1-F_e^1$ 和 H_2 都是 H 的一个子集。因此 $|V(H)|\ge 5!-1$。

假设 $CW_5^1-F_e^1$ 是不连通的。根据引理 2.5(2)，$CW_5^1-F_e^1$ 有一个连通部分 H_1，使得 $|V(H_1)|\ge 4!-2$。如果 $|V(H_1)|\ge 4!-1$，那么 $|V(H)|\ge 5!-2$。如果 $|V(H_1)|\ge 4!-2$，$|V(H_2)|=4!$，那么 $|V(H)|\ge 5!-2$。现在我们假设 $|V(H_1)|=4!-2$，$|V(H_2)|=4!-1$。设 $u_{11},u_{12}\in V(CW_5^1)-V(H_1)$，$u_2\in V(CW_5^2)-V(H_2)$。因为 $|F_e^0|\le 6$，根据引理 2.2(2)，所以存在一个顶点 $v\in\left(\{u_{11}^+,u_{11}^-,u_{11}^*,u_{12}^+,u_{12}^-,u_{12}^*,u_2^+,u_2^-,u_2^*\}-\{u_{11},u_{12},u_2\}\right)\cap V(H)$，使得 $(v,u_{11})\in E(CW_5)-F_e$ 或者 $(v,u_{12})\in E(CW_5)-F_e$ 或者 $(v,u_2)\in E(CW_5)-F_e$。因此 $\{u_{11},u_{12},u_2\}\cap V(H)\ne\Phi$，得 $|V(H)|\ge 5!-2$。

情形 3.2.2 $5\le|F_e^3|\le 7$

在这种情形下，$|F_e^0|\le 19-8-5\times 2=1$。因为 $|E_{4,5}(CW_5)-F_e|\ge|E_{4,5}(CW_5)|-|F_e^0|\ge 18-1>0$，所以 $CW_5^{[4,5]}-F_e$ 是 H 的一个子集。现在我们声称 $|V(H)|\ge 5!-2$。用反证法来证明，假设 $|V(H)|\le 5!-3$。因此存在三个不同的顶点 $v_1,v_2,v_3\in V\left(CW_5^{[1,3]}\right)$，使得 $\{v_1,v_2,v_3\}\cap V(H)=\Phi$。根据引理 2.2(2)(3)，存在三个不同的顶点 $v_1',v_2',v_3'\in V\left(CW_5^{[4,5]}\right)$，使得 $\{(v_1,v_1'),(v_2,v_2'),(v_3,v_3')\}\subseteq E(CW_5)$。因为 $\{v_1,v_2,v_3\}\cap V(H)=\Phi$ 且 $v_1',v_2',v_3'\subseteq V\left(CW_5^{[4,5]}\right)\subseteq V(H)$，所以我们有 $\{(v_1,v_1'),(v_2,v_2'),(v_3,v_3')\}\subseteq F_e^0$，得到 $|F_e^0|\ge 3$，与事实 $|F_e^0|\le 1$ 产生矛盾。因此 $|V(H)|\ge 5!-2$。

情形 3.3 $8\le|F_e^2|\le 10$

在这种情形下，$|F_e^0|\le 19-8\times 2=3$ 因为 $|F_e^3|\le|F_e^0|\le 3<4$，由引理 2.4，可得 $CW_5^3-F_e^3$ 是连通的。因为 $|E_{i,j}(CW_5)-F_e|\ge|E_{i,j}(CW_5)|-|F_e^0|\ge 18-3>0$，所以 $CW_5^{[3,5]}-F_e$ 是 H 的一个子集。现在我们声称 $|V(H)|\ge 5!-2$。已知对于任意的 $v\in V\left(CW_5^{[1,2]}\right)$，根据引理 2.2(4)，存在两个顶点 $v',v''\in\{v^+,v^-,v^*\}$，使得 $v'\in V\left(CW_5^{[3,5]}\right)$ 和 $v''\in V\left(CW_5^{[3,5]}\right)$。假设有一个矛盾，即 $|V(H)|\le 5!-3$。因此存在三个不同的顶点 $v_1,v_2,v_3\in V\left(CW_5^{[1,2]}\right)$，使得 $v_1,v_2,v_3\notin V(H)$。根据引理 2.2(2)(4)，存在六个不同的顶点 $\{v_1',v_1'',v_2',v_2'',v_3',v_3''\}\subseteq V\left(CW_5^{[3,5]}\right)\subseteq V(H)$，使得 $\{(v_1,v_1'),(v_1,v_1''),(v_2,v_2'),(v_2,v_2''),(v_3,v_3'),(v_3,v_3'')\}\subseteq F_e^0$，可得 $|F_e^0|\ge 6$，与事实 $|F_e^0|\le 3$ 产生矛盾。因此 $|V(H)|\ge 5!-2$。

情形 4 $|F_e^1|=11$

情形 4.1 $|F_e^2|\le 4$

在这种情形下，$|F_e^0|\le 19-11=8$。根据引理 2.4，$CW_5^i-F_e^i$ 是连通的，$i\in[2,5]$。因为 $|E_{i,j}(CW_5)-F_e|\ge|E_{i,j}(CW_5)|-|F_e^0|\ge 18-8=10>0$，其中 $i,j\in[2,5]$，$i\ne j$，因此 $CW_5^{[2,5]}-F_e$ 是 H 的一个子集。已知对于任意的 $v\in V(CW_5^1)$，$\{v^+,v^-,v^*\}\subseteq V\left(CW_5^{[2,5]}\right)$。接下来用反证法来证明 $|V(H)|\ge 5!-2$。假设矛盾，$|V(H)|\le 5!-3$。因此存在三个不同的顶点 $v_1,v_2,v_3\in V(CW_5^1)$，使得 $\{v_1,v_2,v_3\}\cap V(H)=\Phi$。因为 $\{v_1^+,v_1^-,v_1^*,v_2^+,v_2^-,v_2^*,v_3^+,v_3^-,v_3^*\}\subseteq V\left(CW_5^{[2,5]}\right)\subseteq V(H)$，所以有

$\{(v_1,v_1^+),(v_1,v_1^-),(v_1,v_1^*),(v_2,v_2^+),(v_2,v_2^-),(v_2,v_2^*),(v_3,v_3^+),(v_3,v_3^-),(v_3,v_3^*)\}\subseteq F_e^0$，可得$|F_e^0|\ge 9$，与事实$|F_e^0|\le 8$产生矛盾。因此$|V(H)|\ge 5!-2$。

情形 4.2 $5\le|F_e^2|\le 7$

在这种情形下，可得$|F_e^0|\le 19-11-5=3$。因为$|F_e^3|\le|F_e^0|\le 3<4$，根据引理 2.4，$CW_5^3-F_e^3$是连通的。因为$|E_{i,j}(CW_5)-F_e|\ge|E_{i,j}(CW_5)|-|F_e^0|\ge 18-3>0$，其中$i,j\in[3,5]$，$i\ne j$，所以$CW_5^{[3,5]}-F_e$是 H 的一个子集。对于任意的$v\in V(CW_5^{[1,2]})$，根据引理 2.2(4)，存在两个顶点$v',v''\in\{v^+,v^-,v^*\}$，使得$v'\in V(CW_5^{[3,5]})$和$v''\in V(CW_5^{[3,5]})$。现在我们声称$|V(H)|\ge 5!-1$。用反证法来证明，假设$|V(H)|\le 5!-2$。因此存在两个不同的顶点$v_1,v_2\in V(CW_5^{[1,2]})$，使得$v_1,v_2\notin V(H)$。根据引理 2.2(2)(4)，存在四个不同的顶点$\{v_1',v_1',v_2',v_2''\}\subseteq V(CW_5^{[3,5]})\subseteq V(H)$，使得$\{(v_1,v_1'),(v_1,v_1''),(v_2,v_2'),(v_2,v_2'')\}\subseteq F_e^0$，因此$|F_e^0|\ge 4$，与事实$|F_e^0|\le 3$产生矛盾。因此$|V(H)|\ge 5!-1>5!-2$。

情形 4.3 $8\le|F_e^2|\le 10$

在这种情形下，$|F_e^0|\le 19-11-8=0$，进一步可以得到$|F_e^1|=11$，$|F_e^2|=8$，$|F_e^3|=0$。因为$|E_{i,j}(CW_5)-F_e|\ge|E_{i,j}(CW_5)|-|F_e^0|\ge 18-0>0$，其中$i,j\in[3,5]$，$i\ne j$，因此$CW_5^{[3,5]}-F_e$是 H 的一个子集。因为$|F_e^0|=0$，所以对于任意的$v\in V(CW_5^{[1,2]})$，存在$v'\in\{v^+,v^-,v^*\}$，使得$v'\in V(CW_5^{[3,5]})\subseteq V(H)$，$(v,v_1')\in E(CW_5-F_e)$。因此$H=CW_5-F_e$是连通的，与事实$CW_5-F_e$不连通的相矛盾。

情形 5 $12\le|F_e^1|\le 19$

情形 5.1 $|F_e^2|\le 4$

在这种情形下，$|F_e^0|\le 19-12=7$。根据引理 2.4，$CW_5^i-F_e^i$是连通的，$i\in[2,5]$。与情形 4.1 同样的讨论方法可以证明引理成立。

情形 5.2 $5\le|F_e^2|\le 7$

在这种情形下，$|F_e^0|\le 19-12-5=2$，$|F_e^3|\le|F_e^0|\le 2$。再根据引理 2.4，$CW_5^i-F_e^i$是连通度的，$i\in[3,5]$。与情形 4.2 同样的讨论方法可以证明引理成立。

引理 2.9 设$F_e\subseteq E(CW_n)$，且$|F_e|\le 6n-11$，$n\ge 5$。如果CW_n-F_e不连通，则CW_n-F_e有一个连通部分 H，使得$|V(H)|\ge n!-2$。

证明 当$n=5$时，根据引理 2.8，证明结论是成立的。假设$n\ge 6$且CW_n-F_e是不连通的。不失一般性，我们可以假设$|F_e^1|\ge|F_e^2|\ge|F_e^3|\ge\cdots\ge|F_e^n|$。因为$|F_e|\le 6n-11$，所以$|F_e^n|\le\cdots\le|F_e^4|\le 2n-6$；否则的话$|F_e|\ge 4(2n-5)>6n-11$，$n\ge 6$，这与事实$|F_e|\le 6n-11$产生矛盾。再根据引理 2.4，$CW_n^i-F_e^i$是连通的，$i\in[4,n]$。假设 H 是CW_n-F_e的包含$CW_n^n-F_e^n$作为一个子集的连通部分。接下来我们考虑如下情况：

情形 1 $|F_e^1|\le 2n-6$

在这种情形下，根据引理 2.4，$CW_n^i-F_e^i$是连通的，$i\in[1,n]$。现在我们声称$E_{1,2}(CW_n)-F_e\ne\Phi$或者$E_{1,3}(CW_n)-F_e\ne\Phi$；否则的话$|F_e|\ge|E_{1,2}(CW_n)|+|E_{1,3}(CW_n)|=2\times 3(n-2)!>6n-11$，$n\ge 6$，与事实$|F_e|\le 6n-11$产生矛盾。不失一般性，我们可以假设$E_{1,2}(CW_n)-F_e\ne\Phi$。相似的，我们可以得到$E_{1,i}(CW_n)-F_e\ne\Phi$或者$E_{2,i}(CW_n)-F_e\ne\Phi$，$i\in[3,n]$。因此$H=CW_n-F_e$是连通的，与事实$CW_n-F_e$是不连通的产生矛盾。

情形 2 $2n-5\le|F_e^1|\le 4n-13$

在这种情形下，$|F_e^0|\le(6n-11)-(2n-5)=4n-6$。

情形 2.1 $\left|F_e^2\right| \le 2n-6$

在这种情形下，根据引理 2.4，$CW_n^i - F_e^i$ 是连通的，$i \in [2,n]$。因为 $\left|E_{i,j}(CW_n) - F_e\right| \ge \left|E_{i,j}(CW_n)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)! - (4n-6) > 0$，其中 $i,j \in [2,n]$，$i \ne j$，$n \ge 6$，所以 $CW_n^{[2,n]} - F_e$ 是 H 的一个子集。因为 $2n-5 \le \left|F_e^1\right| \le 4n-13 = 4(n-1)-9$，根据引理 2.5(1)，$CW_n^1 - F_e^1$ 有一个连通部分 H_1，使得 $\left|V(H_1)\right| \ge (n-1)!-1$。因为 $\left|E_{CW_n}\left(V(H_1), V(CW_n^2)\right) - F_e\right| \ge \left|E_{1,2}(CW_n)\right| - \left|V(CW_n^1) - V(H_1)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)!-1 -(4n-6) > 0$，$n \ge 6$，所以 H_1 是 H 的一个子集。因此 $\left|V(H)\right| \ge n!-1 > n!-2$。

情形 2.2 $2n-5 \le \left|F_e^2\right| \le 4n-13$

假设 $\left|F_e^3\right| \le 2n-6$，可得 $\left|F_e^0\right| \le (6n-11) - 2(2n-5) = 2n-1$，根据引理 2.4，$CW_n^i - F_e^i$ 是连通的，$i \in [3,n]$。因为 $\left|E_{i,j}(CW_n) - F_e\right| \ge \left|E_{i,j}(CW_n)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)! - (2n-1) > 0$，其中 $i,j \in [3,n]$，$i \ne j$，$n \ge 6$，所以 $CW_n^{[3,n]} - F_e$ 是 H 的一个子集。因为 $2n-5 \le \left|F_e^2\right| \le \left|F_e^1\right| \le 4n-13$，根据引理 2.5(1)，$CW_n^k - F_e^k$ 有一个连通部分 H_k，使得 $\left|V(H_k)\right| \ge (n-1)!-1$，其中 $k=1,2$。因为 $\left|E_{CW_n}\left(V(H_k), V(CW_n^3)\right) - F_e\right| \ge \left|E_{k,3}(CW_n)\right| - \left|V(CW_n^k) - V(H_k)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)!-1-(2n-1) > 0$，$k=1,2$，$n \ge 6$，所以 H_1 和 H_2 是 H 的一个子集。因此 $\left|V(H)\right| \ge n!-2$。

假设 $\left|F_e^3\right| \ge 2n-5$，可得 $\left|F_e^0\right| \le (6n-11) - 3(2n-5) = 4$。因为 $\left|E_{i,j}(CW_n) - F_e\right| \ge \left|E_{i,j}(CW_n)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)! - 4 > 0$，其中 $i,j \in [4,n]$，$i \ne j$，$n \ge 6$，所以 $CW_n^{[4,n]} - F_e$ 是 H 的一个子集。因为 $2n-5 \le \left|F_e^3\right| \le \left|F_e^2\right| \le \left|F_e^1\right| \le 4n-13$，根据引理 2.5(1)，$CW_n^k - F_e^k$ 有一个连通部分 H_k，使得 $\left|V(H_k)\right| \ge (n-1)!-1$，$k \in [1,3]$。因为 $\left|E_{CW_n}\left(V(H_k), V(CW_n^4)\right) - F_e\right| \ge \left|E_{k,4}(CW_n)\right| - \left|V(CW_n^k) - V(H_k)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)!-1-4 > 0$，其中 $k \in [1,3]$，$n \ge 6$，所以 H_k 是 H 的一个子集，$k \in [1,3]$。如果对于某个 $k \in [1,3]$，$CW_n^k - F_e^k$ 是连通的，那么 $\left|V(H)\right| \ge n!-2$。现在我们考虑 $\left|V(H_1)\right| = \left|V(H_2)\right| = \left|V(H_3)\right| = n!-1$。设 $u_i \in V(CW_n^i) - V(H_i)$，$i = 1,2,3$。如果对于某个 $i \in [1,3]$，$u_i \in V(H)$，那么 $\left|V(H)\right| \ge n!-2$。

接下来我们考虑 $\{u_1,u_2,u_3\} \cap V(H) = \Phi$。因为 CW_n 是二部图，所以 u_1,u_2,u_3 在 $CW_n - F_e$ 中是三个孤立点或者在 $CW_n - F_e$ 中是一个边和一个孤立的点或者在 $CW_n - F_e$ 中是一个 P_3 路。如果 u_1,u_2,u_3 在 $CW_n - F_e$ 中是三个孤立点，则 $\left|F_e\right| \ge 3\times(2n-2)-2 = 6n-8 > 6n-11$，这与事实 $\left|F_e\right| \le 6n-11$ 相矛盾；如果 u_1,u_2,u_3 在 $CW_n - F_e$ 中形成一个边和一个孤立的点，则 $\left|F_e\right| \ge 2\times(2n-3) + (2n-2) - 1 = 6n-9 > 6n-11$，这与事实 $\left|F_e\right| \le 6n-11$ 相矛盾；如果 u_1,u_2,u_3 在 $CW_n - F_e$ 中形成一个 P_3，则 $\left|F_e\right| \ge 2\times(2n-3) + (2n-2) - 2 = 6n-10 > 6n-11$，这与事实 $\left|F_e\right| \le 6n-11$ 相矛盾。

情形 3 $4n-12 \le \left|F_e^1\right| \le 6n-20$

在这种情形下，可得 $\left|F_e^0\right| \le (6n-11) - (4n-12) = 2n+1$，且 $\left|F_e^3\right| \le 2n-6$；否则的话 $\left|F_e\right| \ge 2(2n-5) + (4n-12) - 1 = 8n-22 > 6n-11$，$n \ge 6$，这与事实 $\left|F_e\right| \le 6n-11$ 相矛盾。再根据引理 2.4，$CW_n^i - F_e^i$ 是连通的，$i \in [3,n]$。因为 $\left|E_{i,j}(CW_n) - F_e\right| \ge \left|E_{i,j}(CW_n)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)! - (2n+1) > 0$，其中 $i,j \in [3,n]$，$i \ne j$，$n \ge 6$，所以 $CW_n^{[3,n]} - F_e$ 是 H 的一个子集。

假设 $CW_n^2 - F_e^2$ 是连通的。因为 $\left|E_{2,3}(CW_n) - F_e\right| \ge \left|E_{2,3}(CW_n)\right| - \left|F_e^0\right| \ge 3(n-2)! - (2n+1) > 0$，$n \ge 6$，所以 $CW_n^2 - F_e^2$ 是 H 的一个子集。因为 $CW_n^1 \cong BS_{n-1}$ 且 $4n-12 \le \left|F_e^1\right| \le 6n-20 = 6(n-1)-14$，根据引理 2.5(2) 归纳假设，$CW_n^1 - F_e^1$ 有一个连通部分 H_1，使得 $\left|V(H_1)\right| \ge (n-1)!-2$。因为 $\left|E_{CW_n}\left(V(H_1), V(CW_n^2)\right) - F_e\right| \ge$

$\left|E_{1,2}\left(CW_n\right)\right|-\left|V\left(CW_n^1\right)-V\left(H_1\right)\right|-\left|F_e^0\right|\geq 3(n-2)!-2-(2n+1)>0$，$n\geq 6$，所以 H_1 是 H 的一个子集。因此 $\left|V(H)\right|\geq n!-2$。

假设 $CW_n^2-F_e^2$ 是不连通的。由引理 2.4，$\left|F_e^2\right|\geq 2n-5$，可得 $\left|F_e^0\right|\leq(6n-11)-(4n-12)-(2n-5)=6$。因为 $\left|F_e^0\right|\leq 6$，我们接下来将要证明 $\left|V\left(CW_n\right)-V(H)\right|\leq 3$。用反证法来证明，假设 $\left|V\left(CW_n\right)-V(H)\right|\geq 4$，存在四个不同的顶点 $v_1,v_2,v_3,v_4\in V\left(CW_n^{[1,2]}\right)$，使得 $\left\{v_1,v_2,v_3,v_4\right\}\cap V(H)=\Phi$。根据引理 2.2(2)(4)，存在八个不同的顶点 $\left\{v_1',v_1'',v_2',v_2'',v_3',v_3'',v_4',v_4''\right\}\subseteq V\left(CW_n^{[3,n]}\right)$，使得 $\left\{(v_1,v_1'),(v_1,v_1''),(v_2,v_2'),(v_2,v_2''),(v_3,v_3'),(v_3,v_3''),(v_4,v_4'),(v_4,v_4'')\right\}\subseteq E\left(CW_n\right)$。因为 $\left\{v_1,v_2,v_3,v_4\right\}\cap V(H)=\Phi$ 且以上八个不同的顶点属于 $V\left(CW_n^{[3,n]}\right)\subseteq V(H)$，所以有 $\left\{(v_1,v_1'),(v_1,v_1''),(v_2,v_2'),(v_2,v_2''),(v_3,v_3'),(v_3,v_3''),(v_4,v_4'),(v_4,v_4'')\right\}\subseteq F_e^0$，因此 $\left|F_e^0\right|\geq 8$，与事实 $\left|F_e^0\right|\leq 6$ 产生矛盾。因此 $\left|V\left(CW_n\right)-V(H)\right|\leq 3$。如果 $\left|V\left(CW_n\right)-V(H)\right|\leq 2$，那么引理成立。现在我们假设 $\left|V\left(CW_n\right)-V(H)\right|=3$，可设 $V\left(CW_n\right)-V(H)=\left\{u_1,u_2,u_3\right\}$，那么 u_1,u_2,u_3 在 CW_n-F_e 中是三个孤立的顶点或者一个边和一个孤立的顶点或者一个 P_3。接下来用与情形 2.2 中同样的讨论方法可以推出矛盾，引理得证。

情形 4 $\left|F_e^1\right|\geq 6n-19$

在这种情形下，$\left|F_e^0\right|\leq(6n-11)-(6n-19)=8$，且 $\left|F_e^3\right|\leq 4<2n-6$，$n\geq 6$。根据引理 2.4，$CW_n^3-F_e^3$ 是连通的。因为 $\left|E_{i,j}\left(CW_n\right)-F_e\right|\geq\left|E_{i,j}\left(CW_n\right)\right|-\left|F_e^0\right|\geq 3(n-2)!-8>0$，其中 $i,j\in[3,n]$，$i\neq j$，$n\geq 6$，所以 $CW_n^{[3,n]}-F_e$ 是 H 的一个子集。

假设 $CW_n^2-F_e^2$ 是连通的。因为 $\left|E_{2,3}\left(CW_n\right)-F_e\right|\geq\left|E_{2,3}\left(CW_n\right)\right|-\left|F_e^0\right|\geq 3(n-2)!-8>0$，$n\geq 6$，所以 $CW_n^2-F_e^2$ 是 H 的一个子集。对于任意的 $u\in V\left(CW_n^1\right)$，有 $\left\{u^+,u^-,u^*\right\}\subseteq V\left(CW_n^{[2,n]}\right)$。因为 $\left|F_e^0\right|\leq 8<3\times 3$，所以在 $V\left(CW_n^1\right)$ 中最多存在两个顶点不被包含在 H 中。因此 $\left|V(H)\right|\geq n!-2$。

现在我们考虑 $CW_n^2-F_e^2$ 是不连通的，再由引理 2.4，$2n-5\leq\left|F_e^2\right|\leq 8$，$n\geq 6$，这意味着 $\left|F_e^2\right|=7$ 或者 8，且 $\left|F_e^0\right|=1$ 或者 0。根据引理 2.2(3)(4)，对于任意的 $u\in V\left(CW_n^{[1,2]}\right)$，有至少两个外部邻域在 $CW_n^{[3,n]}$ 中，再结合 $\left|F_e^0\right|\leq 1$，因此 $H=CW_n-F_e$ 是连通的，与事实 CW_n-F_e 不连通产生矛盾。

引理 2.10 设 $F_e\subseteq E\left(CW_5\right)$，且 $\left|F_e\right|\leq 23$。如果 CW_5-F_e 不连通，则 CW_5-F_e 有一个连通部分 H，$\left|V(H)\right|\geq 5!-3$。

证明 因为 CW_5-F_e 是不连通的，不失一般性，我们可以假设 $\left|F_e^1\right|\geq\left|F_e^2\right|\geq\left|F_e^3\right|\geq\left|F_e^4\right|\geq\left|F_e^5\right|$。因为 $n=5$，根据引理 2.2(1)，所以 $\left|E_{i,j}\left(CW_5\right)\right|=3\times(5-2)!=18$，$i,j\in[1,5]$，$i\neq j$。由 $\left|F_e\right|\leq 23$，可得 $\left|F_e^5\right|\leq 4$；否则的话 $\left|F_e\right|\geq 5\times 5=25>23$，与事实 $\left|F_e\right|\leq 23$ 矛盾。因此 $CW_n^5-F_e^5$ 是连通的。设 H 是 CW_5-F_e 中包含 $CW_n^5-F_e^5$ 作为一个子集的连通部分。如果 $\left|F_e^1\right|\leq 4$，与引理 2.8 的情形 1 相同的讨论方法，可得 $H=CW_5-F_e$ 是连通的，这与事实 CW_5-F_e 是不连通的产生矛盾。因此 $\left|F_e^1\right|\geq 5$。接下来我们考虑以下几个情形：

情形 1 $5\leq\left|F_e^1\right|\leq 7$

情形 1.1 $\left|F_e^2\right|\leq 4$

在这种情形下，可得 $\left|F_e^0\right|\leq 23-5=18$。根据引理 2.4，$CW_n^i-F_e^i$ 是连通的，$i\in[2,5]$。现在我们声称 $E_{2,3}\left(CW_5\right)-F_e\neq\Phi$ 或者 $E_{2,4}\left(CW_5\right)-F_e\neq\Phi$；否则的话 $\left|F_e\right|\geq\left|E_{2,3}\left(CW_5\right)\right|+\left|E_{2,4}\left(CW_5\right)\right|=2\times 18=36>23$，这与事实 $\left|F_e\right|\leq 23$ 产生矛盾。不失一般性，我们可以假设 $E_{2,3}\left(CW_5\right)-F_e\neq\phi$。相似的，我们可以得到 $E_{2,i}\left(CW_5\right)-F_e\neq\Phi$ 或者 $E_{3,i}\left(CW_5\right)-F_e\neq\Phi$，$i\in[4,5]$。因此 $CW_5^{[2,5]}-F_e$ 是 H 的一个子集。因为 $5\leq\left|F_e^1\right|\leq 7$，根据引理 2.5(1)，$CW_5^1-F_e^1$ 有一个连通分支 H_1，使得 $\left|V\left(H_1\right)\right|\geq 4!-1$。因为 $\left|E_{CW_5}\left(V\left(H_1\right),V\left(CW_5^{[2,3]}\right)\right)-F_e\right|\geq$

$\left|E_{1,2}\left(CW_5\right)\right|+\left|E_{1,3}\left(CW_5\right)\right|-2\left|V\left(CW_5^1\right)-V\left(H_1\right)\right|-\left|F_e^0\right|\geq 18\times 2-2-18>0$，所以 H_1 是 H 的一个子集。因此 $\left|V\left(H\right)\right|\geq 5!-1>5!-3$。

情形 1.2 $5\leq\left|F_e^2\right|\leq 7$

情形 1.2.1 $\left|F_e^3\right|\leq 4$

在这种情形下，$\left|F_e^0\right|\leq 23-2\times 5=13$。根据引理 2.4，$CW_5^i-F_e^i$ 是连通的，$i\in[2,5]$。因为 $\left|E_{i,j}\left(CW_5\right)-F_e\right|\geq\left|E_{i,j}\left(CW_5\right)\right|-\left|F_e^0\right|\geq 18-13>0$，其中 $i,j\in[3,5]$，$i\neq j$，所以 $CW_n^{[3,5]}-F_e$ 是 H 的一个子集。因为 $5\leq\left|F_e^2\right|\leq\left|F_e^1\right|\leq 7$，由引理 2.5(1)，$CW_5^k-F_e^k$ 有一个连通部分 H_k，使得 $\left|V\left(H_k\right)\right|\geq 4!-1$，$k\in[1,2]$。因为 $\left|E_{CW_5}\left(V\left(H_k\right),V\left(CW_5^2\right)\right)-F_e\right|\geq\left|E_{k,3}\left(CW_5\right)\right|-\left|V\left(CW_5^k\right)-V\left(H_k\right)\right|-\left|F_e^0\right|\geq 18-1-3>0$，所以 H_k 是 H 的一个子集。因此 $\left|V\left(H\right)\right|\geq 5!-1>5!-3$。

情形 1.2.2 $5\leq\left|F_e^3\right|\leq 7$

在这种情形下，因为 $5\leq\left|F_e^3\right|\leq\left|F_e^2\right|\leq\left|F_e^1\right|\leq 7$，在由引理 2.5(1)，$CW_5^k-F_e^k$ 有一个连通部分 H_k，使得 $\left|V\left(H_k\right)\right|\geq 4!-1$，$k\in[1,3]$。

假设 $\left|F_e^4\right|\leq 4$，可得 $\left|F_e^0\right|\leq 23-3\times 5=8$。因为 $\left|E_{i,j}\left(CW_5\right)-F_e\right|\geq\left|E_{i,j}\left(CW_5\right)\right|-\left|F_e^0\right|\geq 18-8>0$，其中 $i,j\in[4,5]$，$i\neq j$，所以 $CW_5^{[4,5]}-F_e$ 是 H 的一个子集。因为 $\left|E_{CW_5}\left(V\left(H_k\right),V\left(CW_5^4\right)\right)-F_e\right|\geq\left|E_{k,4}\left(CW_5\right)\right|-\left|V\left(CW_5^k\right)-V\left(H_k\right)\right|-\left|F_e^0\right|\geq 18-1-8>0$，所以 H_k 是 H 的一个子集，$k\in[1,3]$。因此 $\left|V\left(H\right)\right|\geq 5!-3$。

假设 $\left|F_e^4\right|\geq 5$，可得 $\left|F_e^0\right|\leq 23-4\times 5=3$。我们有 $\left|F_e^4\right|=5$；否则的话 $\left|F_e\right|\geq 4\times 6=24>23$，这与事实 $\left|F_e\right|\leq 23$ 相矛盾。根据引理 2.5(1)，$CW_5^4-F_e^4$ 有一个连通部分 H_4，使得 $\left|V\left(H_4\right)\right|\geq 4!-1$。因为 $\left|E_{CW_5}\left(V\left(H_i\right),V\left(CW_5^5\right)\right)-F_e\right|\geq\left|E_{i,5}\left(CW_5\right)\right|-\left|V\left(CW_5^i\right)-V\left(H_i\right)\right|-\left|F_e^0\right|\geq 18-1-13>0$，所以 H_i 是 H 的一个子集，$i\in[1,4]$。如果对于某个 $i\in[1,4]$，$\left|V\left(H_i\right)\right|\geq 4!-1$，则 $\left|V\left(H\right)\right|\geq 5!-3$。现在我们考虑 $\left|V\left(H_1\right)\right|=\left|V\left(H_2\right)\right|=\left|V\left(H_3\right)\right|=\left|V\left(H_4\right)\right|=4!-1$。设 $u_i\in V\left(CW_5^i\right)-V\left(H_i\right)$，$i\in[1,4]$。如果对于某个 $i\in[1,4]$，有 $u_i\in V\left(H\right)$，则 $\left|V\left(H\right)\right|\geq 5!-3$。现在我们考虑 $\left\{u_1,u_2,u_3,u_4\right\}\cap V\left(H\right)=\Phi$。因为 $u_i\notin V\left(H\right)$，所以 $u_i^+,u_i^-,u_i^*\in\left\{u_1,u_2,u_3,u_4\right\}$ 或者 $\left(u_i,u_i^+\right),\left(u_i,u_i^-\right),\left(u_i,u_i^*\right)$ 属于 $\left|F_e^0\right|$。因为 CW_5 的围长是 4 且 $\left|F_e^0\right|\leq 3$，所以存在一个顶点 $v\in\left\{u_1^+,u_1^-,u_1^*,u_2^+,u_2^-,u_2^*,u_3^+,u_3^-,u_3^*,u_4^+,u_4^-,u_4^*\right\}\cap V\left(H\right)$，使得对于某个 $i\in[1,4]$，有 $\left(v,u_i\right)\in E\left(CW_5\right)-F_e$，这意味着对于某个 $i\in[1,4]$，有 $u_i\in V\left(H\right)$，这与事实对于每一个 $i\in[1,4]$，$u_i\notin V\left(H\right)$ 产生矛盾。因此 $\left|V\left(H\right)\right|\geq 5!-3$。

情形 2 $8\leq\left|F_e^1\right|\leq 10$

因为 $CW_5^1\cong BS_4$，根据引理 2.5(2)，$CW_5^1-F_e^1$ 有一个连通部分 H_1，使得 $\left|V\left(H_1\right)\right|\geq 4!-2$。我们又将情形 2 分成以下几个子情形来讨论：

情形 2.1 $\left|F_e^2\right|\leq 4$

在这种情形下，$\left|F_e^0\right|\leq 23-8=15$。根据引理 2.4，$CW_5^i-F_e^i$ 是连通的，$i\in[2,5]$。因为 $\left|E_{i,j}\left(CW_5\right)-F_e\right|\geq\left|E_{i,j}\left(CW_5\right)\right|-\left|F_e^0\right|\geq 18-15>0$，其中 $i,j\in[2,5]$，$i\neq j$，所以 $CW_5^{[2,5]}-F_e$ 是 H 的一个子集。因为 $\left|E_{CW_5}\left(V\left(H_1\right),V\left(CW_5^2\right)\right)-F_e\right|\geq\left|E_{1,2}\left(CW_5\right)\right|-\left|V\left(CW_5^1\right)-V\left(H_1\right)\right|-\left|F_e^0\right|\geq 18-2-15>0$，所以 H_1 是 H 的一个子集。因此 $\left|V\left(H\right)\right|\geq 5!-3$。

情形 2.2 $5\leq\left|F_e^2\right|\leq 7$

因为$5\le\left|F_e^2\right|\le 7$，根据引理2.5(1)，$CW_5^2-F_e^2$有一个连通部分$H_2$，使得$\left|V(H_2)\right|\ge 4!-1$。

情形2.2.1 $\left|F_e^3\right|\le 4$

在这种情形下，$\left|F_e^0\right|\le 23-8-5=10$。根据引理2.4，$CW_5^i-F_e^i$是连通的，$i\in[3,5]$。因为$\left|E_{i,j}(CW_5)-F_e\right|\ge\left|E_{i,j}(CW_5)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-10>0$，其中$i,j\in[3,5]$，$i\ne j$，所以$CW_5^{[3,5]}-F_e$是$H$的一个子集。因为$\left|E_{CW_5}\left(V(H_k),V(CW_5^3)\right)-F_e\right|\ge\left|E_{k,3}(CW_5)\right|-\left|V(CW_5^k)-V(H_k)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-2-10>0$，所以$H_k$是$H$的一个子集，$k\in[1,2]$。因此$\left|V(H)\right|\ge 5!-3$。

情形2.2.2 $5\le\left|F_e^3\right|\le 7$

在这种情形下，$\left|F_e^0\right|\le 23-8-5\times 2=5$。根据引理2.5(1)，$CW_5^3-F_e^3$有一个连通部分$H_3$，使得$\left|V(H_3)\right|\ge 4!-1$。

假设$\left|F_e^4\right|\le 4$。因为$\left|E_{4,5}(CW_5)-F_e\right|\ge\left|E_{4,5}(CW_5)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-5>0$，所以$CW_5^{[4,5]}-F_e$是$H$的一个子集。因为$\left|E_{CW_5}\left(V(H_k),V(CW_5^4)\right)-F_e\right|\ge\left|E_{k,4}(CW_5)\right|-\left|V(CW_5^k)-V(H_k)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-2-5>0$，所以$H_k$是$H$的一个子集，$k\in[1,3]$。如果$\left|V(H_1)\right|\ge 4!-1$，那么$\left|V(H)\right|\ge 5!-3$。如果$\left|V(H_2)\right|=4!$或者$\left|V(H_3)\right|=4!$，那么$\left|V(H)\right|\ge 5!-3$。现在我们考虑$\left|V(H_1)\right|=4!-2$，$\left|V(H_2)\right|=\left|V(H_3)\right|=4!-1$。设$u_{11},u_{12}\in V(CW_5^1)-V(H_1)$，$u_i\in V(CW_5^i)-V(H_i)$，其中$i\in[2,3]$。如果$u_{11}\in V(H)$或者$u_{12}\in V(H)$或者$u_1\in V(H)$或者$u_3\in V(H)$，那么$\left|V(H)\right|\ge 5!-3$。现在我们假设$u_{11},u_{12},u_3,u_4$不属于$V(H)$。由$CW_5$是二部图，$\left|F_e^0\right|\le 5$和引理2.2(2)，存在一个顶点$v\in\left(\{u_{11}^+,u_{11}^-,u_{11}^*,u_{12}^+,u_{12}^-,u_{12}^*,u_2^+,u_2^-,u_2^*,u_3^+,u_3^-,u_3^*\}-\{u_{11},u_{12},u_3,u_4\}\right)\cap V(H)$，使得$(v,u_{11})\in E(CW_5)-F_e$或者$(v,u_{12})\in E(CW_5)-F_e$或者$(v,u_i)\in E(CW_5)-F_e$，$i\in[2,3]$。因此$\{u_{11},u_{12},u_3,u_4\}\cap V(H)\ne\Phi$，这与事实$u_{11}\notin V(H)$，$u_{12}\notin V(H)$，$u_3\notin V(H)$，$u_4\notin V(H)$产生矛盾。

假设$\left|F_e^4\right|\ge 5$，可以得到$\left|F_e^1\right|=8$，$\left|F_e^2\right|=\left|F_e^3\right|=\left|F_e^4\right|=5$，$\left|F_e^0\right|=0$。又根据引理2.5(1)，$CW_5^4-F_e^4$有一个连通部分$H_4$，使得$\left|V(H_4)\right|\ge 4!-1$。因为$\left|E_{CW_5}\left(V(H_i),V(CW_5^5)\right)-F_e\right|\ge\left|E_{i,5}(CW_5)\right|-\left|V(CW_5^i)-V(H_i)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-0>0$，所以$H_i$是$H$的一个子集，$i\in[1,4]$。如果$CW_5^4-F_e^4$是连通的，我们可以得到$CW_5^4-F_e^4$是$H$的一个子集。设$v$任意的顶点$v\in V\left(CW_5^{[1,3]}\right)$，根据引理2.2(3)，存在一个顶点$v'\in\{v^+,v^-,v^*\}$，使得$v'\in V\left(CW_5^{[4,5]}\right)$，$(v,v')\in E\left(CW_5^{[4,5]}\right)$。因为$\left|F_e^0\right|=0$，对于任意的$v\in V\left(CW_5^{[1,3]}\right)$，我们有$v\in V(H)$。因此$H=CW_5-F_e$是连通的，与事实$CW_5-F_e$是不连通的相矛盾。因此$\left|V(H_4)\right|=4!-1$，存在一个顶点$u_4\in V(CW_5^4)-V(H_4)$。因为$\left|F_e^0\right|=0$和$u_4\notin V(H)$，所以$\{u_4^+,u_4^-,u_4^*\}\subseteq V\left(CW_5^{[1,3]}\right)-V(H)$。设$\{u_4^+,u_4^-,u_4^*\}\cap V(CW_5^i)=\{u_i\}$，其中$i\in[1,3]$。因为$CW_5$是二部图，存在一个顶点$u_1'\in V(CW_5^1)-V(H)-\{u_1\}$，使得$(u_1',u_3)\in E(CW_5)$，且存在一个顶点$u_2'\in V(CW_5^2)-V(H)-\{u_2\}$，使得$(u_2',u_3)\in E(CW_5)$，因此$\left|V(H_1)\right|\le 4!-2$和$\left|V(H_2)\right|\le 4!-2$，这与事实$\left|V(H_2)\right|\ge 4!-1$产生矛盾。

情形2.3 $8\le\left|F_e^2\right|\le 10$

因为$CW_5^i\cong BS_4$，根据引理2.5(2)，$CW_5^i-F_e^i$有一个连通部分H_i，使得$\left|V(H_i)\right|\le 4!-2$，其中$i=1,2$。

假设$\left|F_e^3\right|\le 4$，$\left|F_e^0\right|\le 23-8\times 2=7$。根据引理2.4，$CW_5^i-F_e^i$是连通的，$i\in[3,5]$。因为$\left|E_{i,j}(CW_5)-F_e\right|\ge\left|E_{i,j}(CW_5)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-7>0$，其中$i,j\in[3,5]$，$i\ne j$，因此$CW_5^{[3,5]}-F_e$是$H$的一个子集。

因为$\left|E_{CW_5}\left(V\left(H_k\right),V\left(CW_5^3\right)\right)-F_e\right|\ge\left|E_{k,3}\left(CW_5\right)\right|-\left|V\left(CW_5^k\right)-V\left(H_k\right)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-2-7>0$，所以$H_k$是$H$的一个子集，$k\in[1,2]$。现在我们声称$\left|V\left(H\right)\right|\ge 5!-3$。因为$\left|F_e^0\right|\le 7<2\times 4$，由引理2.2(4)，在$CW_5-F_e$中我们最多能得到三个点不被包含在$H$中。因此$\left|V\left(H\right)\right|\ge 5!-3$。

假设$\left|F_e^3\right|\ge 5$，$\left|F_e^0\right|\le 23-8\times 2-5=2$，$CW_5^4-F_e^4$是连通的。因为$\left|E_{4,5}\left(CW_5\right)-F_e\right|\ge\left|E_{4,5}\left(CW_5\right)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-2>0$，所以$CW_5^{[4,5]}-F_e$是$H$的一个子集。现在我们声称$\left|V\left(H\right)\right|\ge 5!-2$。用反证法来证明，假设$\left|V\left(H\right)\right|\le 5!-3$。设有三个顶点$v_1,v_2,v_3\in V\left(CW_5^{[1,3]}\right)$，使得$\left\{v_1,v_2,v_3\right\}\cap V\left(H\right)=\Phi$。根据引理2.2(2)(3)，存在三个不同的顶点$v_1',v_2',v_3'\in V\left(CW_5^{[4,5]}\right)$，使得$\left\{\left(v_1,v_1'\right),\left(v_2,v_2'\right),\left(v_3,v_3'\right)\right\}\subseteq E\left(CW_5\right)$。因为$\left\{v_1,v_2,v_3\right\}\cap V\left(H\right)=\Phi$且$v_1',v_2',v_3'\subseteq V\left(CW_5^{[4,5]}\right)\subseteq V\left(H\right)$，所以我们有$\left\{\left(v_1,v_1'\right),\left(v_2,v_2'\right),\left(v_3,v_3'\right)\right\}\subseteq F_e^0$，因此$\left|F_e^0\right|\ge 3$，这与事实$\left|F_e^0\right|\le 2$产生矛盾。因此$\left|V\left(H\right)\right|\ge 5!-2>5!-3$。

情形3 $\left|F_e^1\right|=11$

在这种情形下，根据引理2.5(3)，$CW_5^1-F_e^1$有一个连通部分H_1，使得$\left|V\left(H_1\right)\right|\ge 4!-3$。

情形3.1 $\left|F_e^2\right|\le 4$

在这种情形下，$\left|F_e^0\right|\le 23-11=12$。根据引理2.4，$CW_5^i-F_e^i$是连通的，$i\in[2,5]$。因为$\left|E_{i,j}\left(CW_5\right)-F_e\right|\ge\left|E_{i,j}\left(CW_5\right)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-12>0$，其中$i,j\in[2,5]$，$i\ne j$，因此$CW_5^{[2,5]}-F_e$是$H$的一个子集。因为$\left|E_{CW_5}\left(V\left(H_1\right),V\left(CW_5^2\right)\right)-F_e\right|\ge\left|E_{1,2}\left(CW_5\right)\right|-\left|V\left(CW_5^1\right)-V\left(H_1\right)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-3-12>0$，所以$H_1$是$H$的一个子集。因此$\left|V\left(H\right)\right|\ge 5!-3$。

情形3.2 $5\le\left|F_e^2\right|\le 11$

在这种情形下，根据引理2.5(3)，$CW_5^2-F_e^2$有一个连通部分H_2，使得$\left|V\left(H_2\right)\right|\ge 4!-3$。

情形3.2.1 $\left|F_e^3\right|\le 4$

在这种情形下，$\left|F_e^0\right|\le 23-11-5=7$。根据引理2.4，$CW_5^i-F_e^i$是连通的，$i\in[3,5]$。因为$\left|E_{i,j}\left(CW_5\right)-F_e\right|\ge\left|E_{i,j}\left(CW_5\right)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-7>0$，其中$i,j\in[3,5]$，$i\ne j$，因此$CW_5^{[3,5]}-F_e$是$H$的一个子集。因为$\left|E_{CW_5}\left(V\left(H_k\right),V\left(CW_5^3\right)\right)-F_e\right|\ge\left|E_{k,3}\left(CW_5\right)\right|-\left|V\left(CW_5^k\right)-V\left(H_k\right)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-3-7>0$，所以$H_k$是$H$的一个子集，其中$k=1,2$。设$v$是任意的顶点使得$v\in V\left(CW_5^{[1,2]}\right)$，根据引理2.2(4)，存在两个顶点$v',v''\in\left\{v^+,v^-,v^*\right\}$，使得$v'\in V\left(CW_5^{[3,5]}\right)$和$v''\in V\left(CW_5^{[3,5]}\right)$。因为$\left|F_e^0\right|\le 7<2\times 4$，根据引理2.2(4)，我们能得到在$CW_5^{[1,2]}-F_e$中最多有三个顶点不被包含在$H$中。因此$\left|V\left(H\right)\right|\ge 5!-3$。

情形3.2.2 $5\le\left|F_e^3\right|\le 7$

在这种情形下，$\left|F_e^0\right|\le 23-11-5\times 2=2$。因为$5\le\left|F_e^3\right|\le 7$，根据引理2.5(1)，所以$CW_5^3-F_e^3$有一个连通部分$H_3$，使得$\left|V\left(H_3\right)\right|\ge 4!-1$。因为$\left|F_e^4\right|\le\left|F_e^0\right|\le 2<4$，所以$CW_5^4-F_e^4$是连通的。因为$\left|E_{4,5}\left(CW_5\right)-F_e\right|\ge\left|E_{4,5}\left(CW_5\right)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-2>0$，所以$CW_5^{[4,5]}-F_e$是$H$的一个子集。因为$\left|E_{CW_5}\left(V\left(H_k\right),V\left(CW_5^4\right)\right)-F_e\right|\ge\left|E_{k,4}\left(CW_5\right)\right|-\left|V\left(CW_5^k\right)-V\left(H_k\right)\right|-\left|F_e^0\right|\ge 18-3-2>0$，所以$H_k$是$H$的一个子集，$k\in[1,3]$。设$v$是任意的顶点使得$v\in V\left(CW_5^{[1,3]}\right)$，根据引理2.2(3)，存在一个顶点$v'\in\left\{v^+,v^-,v^*\right\}$，使$v'\in V\left(CW_5^{[4,5]}\right)$。因为$\left|F_e^0\right|\le 2<1\times 3$，我们能得到在$CW_5^{[1,3]}-F_e$中最多有三个顶点不被包含在$H$中，因

此$|V(H)|\ge 5!-3$。

情形 4 $|F_e^1|=12$

我们接下来将情形 4 分成以下几个情形来讨论：

情形 4.1 $|F_e^2|\le 4$

在这种情形下，$|F_e^0|\le 23-12=11$。根据引理 2.4，$CW_5^i-F_e^i$ 是连通的，$i\in[2,5]$。因为 $|E_{i,j}(CW_5)-F_e|\ge|E_{i,j}(CW_5)|-|F_e^0|\ge 18-11>0$，其中 $i,j\in[2,5]$，$i\ne j$，因此 $CW_5^{[2,5]}-F_e$ 是 H 的一个子集。已知对于任意一个 $v\in V(CW_5^1)$，有 $\{v^+,v^-,v^*\}\subseteq V(CW_5^{[2,5]})$。因为 $|F_e^0|\le 11<3\times 4$，在 $CW_5^1-F_e$ 中最多有三个顶点不被包含在 H 中。因此 $|V(H)|\ge 5!-3$。

情形 4.2 $5\le|F_e^2|\le 11$

假设 $|F_e^3|\le 4$，$|F_e^0|\le 23-12-5=6$。根据引理 2.4，$CW_5^i-F_e^i$ 是连通的，$i\in[3,5]$。因为 $|E_{i,j}(CW_5)-F_e|\ge|E_{i,j}(CW_5)|-|F_e^0|\ge 18-6>0$，其中 $i,j\in[3,5]$，$i\ne j$，所以 $CW_5^{[3,5]}-F_e$ 是 H 的一个子集。设 v 是任意一个顶点使得 $v\in V(CW_5^{[1,2]})$，根据引理 2.2(4)，存在两个顶点 $v',v''\in\{v^+,v^-,v^*\}$，使得 $v',v''\in V(CW_5^{[3,5]})$。因为 $|F_e^0|\le 6<2\times 4$，所以在 $CW_5^{[1,2]}-F_e$ 中至多有三个顶点不被包含在 H 中。因此 $|V(H)|\ge 5!-3$。

假设 $|F_e^3|\ge 5$，$|F_e^0|\le 23-12-5\times 2=1$，$|F_e^4|\le|F_e^0|\le 1$。因此 $CW_5^4-F_e^4$ 是连通的。因为 $|E_{4,5}(CW_5)-F_e|\ge|E_{4,5}(CW_5)|-|F_e^0|\ge 18-1>0$，所以 $CW_5^{[4,5]}-F_e$ 是 H 的一个子集。现在我们声称 $|V(H)|\ge 5!-1$。用反证法来证明，假设 $|V(H)|\le 5!-2$。因此存在两个顶点 $v_1,v_2\in V(CW_5^{[1,3]})$，使得 $\{v_1,v_2\}\cap V(H)=\Phi$。根据引理 2.2(2)(3)存在两个不同的顶点 $v_1',v_2'\in V(CW_5^{[4,5]})$，使得 $\{(v_1,v_1'),(v_2,v_2')\}\subseteq E(CW_5)$。因为 $\{v_1,v_2\}\cap V(H)=\Phi$ 和 $v_1',v_2'\subseteq V(CW_5^{[4,5]})\subseteq V(H)$，我们有 $\{(v_1,v_1'),(v_2,v_2')\}\subseteq F_e^0$，可得 $|F_e^0|\ge 2$ 这与事实 $|F_e^0|\le 1$ 相矛盾。因此 $|V(H)|\ge 5!-1>5!-3$。

4. *n*-维轮图 CW_n 的边容错强 Menger 边连通性

定理 3.1 对于 $n\ge 4$，轮图 CW_n 是 $(2n-4)$-边容错强 Menger 边连通的，且数值 $(2n-4)$ 是最优的。

证明 设 $F_e\subseteq E(CW_n)$ 是任意的边集，且 $|F_e|\le 2n-4$。根据引理 2.3，CW_n-F_e 是连通的。取 u,v $(u\ne v)$ 是 CW_n 中任意两个顶点，且 $t=\min\{d_{CW_n-F_e}(u),d_{CW_n-F_e}(v)\}$。根据引理 1.1，我们可以证明对于任意的 $F_f\subseteq E(CW_n)-F_e$ 且 $|F_f|\le t-1$，u 和 v 在 $CW_n-F_e-E_f$ 中是连通的。接下来我们用反证法来证明以上结论成立。假设对于某个 $F_f\subseteq E(CW_n)-F_e$ 且 $|F_f|\le t-1$，使得 u 和 v 在 $CW_n-F_e-E_f$ 中是不连通的。因为 $d_{CW_n-F_e}(u)\le 2n-2$ 和 $d_{CW_n-F_e}(v)\le 2n-2$，所以 $|F_f|\le 2n-3$。因此 $|F_e\cup F_f|\le(6n-14)+(2n-3)=8n-17$。根据引理 2.6，$CW_n-F_e-E_f$ 有一个连通部分 H，使得 $|V(H)|\ge n!-1$。因为 u 和 v 在 $CW_n-F_e-E_f$ 中是不连通的，所以 $|V(H)|=n!-1$ 且 $\{u,v\}\cap V(H)=1$。不失一般性，我们可以假设 $u\notin V(H)$，$v\in V(H)$。因此 $E_{CW_n}(\{u\},N_{CW_n-F_e}(u))\subseteq E_f$，这意味着 $|F_f|\ge d_{CW_n-F_e}(u)$，与事实 $|F_f|\le t-1\le d_{CW_n-F_e}(u)-1$ 产生矛盾。因此 CW_n 是 $(2n-4)$-边容错强 Menger 边连通的。

注意 以上定理的数值 $(2n-4)$ 是最优的。

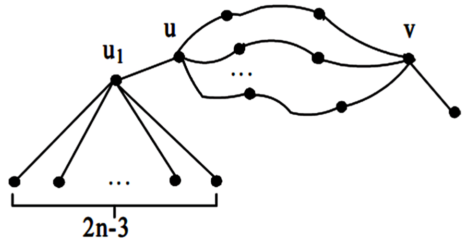

Figure 2. The illustration of Note
图 2. 注意的阐述

取 $u,u_1\in V(CW_n)$ 且 $(u,u_1)\in E(CW_n)$。取 $v\in V(CW_n)-N_{CW_n}(u_1)-\{u_1\}$。取 $F_e=(u_1,N_{CW_n}(u_1))-(u,u_1)$ (见图 2)。则 $|F_e|=2n-2-1=2n-3$，且 $d_{CW_n-F_e}(u)=d_{CW_n-F_e}(v)=2n-2$，$n\geq 4$。显然，最多只能有 $2n-3$ 条边不相交的 u,v -路。

5. 结论

互连网络的连通性是基础的性质，连通性又决定着互连网络的容错性。在这篇文章中，我们研究了 n-维轮图 CW_n 的边容错强 Menger 边连通性。若 F_e 是 CW_n 中任意的边集且满足 $|F_e|\leq 2n-4$，则对于任意一对 CW_n 中不同的顶点 u,v 在 CW_n-F_e 中是连通的且有 $\min\{d_{CW_n-F_e}(u),d_{CW_n-F_e}(v)\}$ 边不相交的路。此外，我们也举出了例子来证明我们的结果是最优的。

致　谢

本论文是在我的导师王世英教授的悉心指导下完成的。王老师以其严谨求实的治学态度、高度的敬业精神、兢兢业业、孜孜以求的工作作风和大胆创新的进取精神对我产生重要影响。他渊博的知识，开阔的视野和敏锐的思维给了我深深的启迪。这篇论文是在老师的精心指导和大力支持下才完成的感谢所有授我以业的老师，没有这些年知识的积淀，我没有这么大的动力和信心完成这篇论文。同时还要感谢我的师姐和同门们，从选题指导、论文框架到细节修改，她们都给予了细致的指导，提出了很多宝贵的意见与建议！谨以此致谢，最后，我要向百忙之中抽时间对本文进行审阅的各位老师表示衷心的感谢。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(61772010)，山西省基础研究计划(202203021221128)。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2007) Graph Theory. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7400-6

[2] Menger, K. (1927) Zur allgemeinen kurvebtheorie. *Fundamenta Mathematicae*, **10**, 96-115. https://doi.org/10.4064/fm-10-1-96-115

[3] Oh, E. and Chen, J. (2003) On Strong Menger Connectivity of Star Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **129**, 499-511. https://doi.org/10.1016/S0166-218X(02)00600-5

[4] Qiao, Y.L. and Yang, W.H. (2017) Edge Disjoint Paths in Hypercubes and Folded Hypercubes with Conditional Faults. *Applied Mathematics and Computation*, **294**, 96-101. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.09.002

[5] Li, P.S. and Xu, M. (2018) Fault-Tolerant Strong Menger (Edge) Connectivity and 3-Extra Edge-Connectivity of Balanced Hypercubes. *Theoretical Computer Science*, **707**, 56-68. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.10.017

[6] Oh, E. and Chen, J. (2003) Strong Fault Tolerance: Parallel Routing in Star Networks with Faults. *Journal of Interconnection Networks*, **4**, 113-126. https://doi.org/10.1142/S0219265903000763

[7] Shih, L.M., Chiang, C.F., Hsu, L.H. and Tan, J.J.M. (2008) Strong Menger Connectivity with Conditional Faults on the Class of Hypercube-Like Networks. *Information Processing Letters*, **106**, 64-69. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2007.10.009

[8] Cheng, Q., Li, P.S. and Xu, M. (2018) Conditional (Edge-) Fault-Tolerant Strong Menger (Edge) Connectivity of Folded Hypercubes. *Theoretical Computer Science*, **728**, 1-8. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2018.03.011

[9] Yang, W.H., Zhao, S.L. and Zhang, S.R. (2017) Strong Menger Connectivity with Conditional Faults of Folded Hypercubes. *Information Processing Letters*, **125**, 30-34. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2017.05.001

[10] Li, P.S. and Xu, M. (2019) Edge-Fault-Tolerant Strong Menger Edge Connectivity on the Class of Hypercube-Like Networks. *Discrete Applied Mathematics*, **259**, 145-152. https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.12.024

[11] He, S.J. Hao, R.X. and Cheng, E. (2018) Strongly Menger-Edge-Connectedness and Strongly Menger-Vertex-Connectedness of Regular Networks. *Theoretical Computer Science*, **731**, 50-67. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2018.04.001

[12] Cai, H.Y., Liu, H.Q. and Lu, M. (2015) Fault-Tolerant Maximal Local-Connectivity on Bubble-Sort Star Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **181**, 33-40. https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.10.006

[13] Guo, J. and Lu, M. (2021) Edge-Fault-Tolerant Strong Menger Edge Connectivity of Bubble-Sort Star Graphs. *Discrete Applied Mathmatics*, **297**, 109-119. https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.03.006

[14] Wang, Y.L. and Wang, S.Y. (2021) Edge-Fault-Tolerant Strong Menger Edge Connectivity of Bubble-Sort Graphs. *AIMS Mathematics*, **6**, 13210-13221. https://doi.org/10.3934/math.2021763

[15] Shi, H.Z. and Lu, J.B. (2008) On Conjectures of Interconnection Networks. *Computer Engineering and Applications*, **44**, 112-115. (In Chinese)

[16] Feng, W., Jirimutu, and Wang, S.Y. (2019) The Nature Diagnosability of Wheel Graph Networks under the PMC Model and MM Model. *Ars Combinatoria*, **143**, 255-287.

[17] Feng, W., Ren, J.M., Enhe, C. and Wang, S.Y. (2020) The 2-Good-Neighbor Connectivity of Wheel Graph Networks. *Utilitas Mathematica*, **116**, 139-167.

[18] Feng, W. and Wang, S.Y. (2020) The 2-Extra Connectivity of Wheel Networks. *Mathematical Problems in Engineering*, **2020**, Article ID: 8910240. https://doi.org/10.1155/2020/8910240

[19] Feng, W. and Wang, S.Y. (2021) Structure Connectivity and Substructure Connectivity of Wheel Networks. *Theoretical Computer Science*, **850**, 20-29. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2020.10.028

[20] Hou, F.F. (2013) Some New Results of the Wheel Networks and Bubble-Sort Star Networks. Ph.D. Thesis, Northwest Normal University, Lanzhou. (In Chinese)

[21] Shi, H.Z., Hou, F.F. and Ma, J.Y. (2012) Study on Diameter and Average Distance of Wheel Network. *Journal of Gansu Sience*, **24**, 103-106. (In Chinese)