

自适应加权核范数最小化的图像去噪

苟玉莹*

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2023年5月13日; 录用日期: 2023年6月7日; 发布日期: 2023年6月15日

摘要

针对加权核范数最小化算法在图像去噪过程中存在难以分离低秩信息与噪声、参数选取过度依赖经验值的问题, 提出了一种自适应加权核范数最小化的图像去噪算法。首先, 利用图像非局部相似先验构建加权核范数最小化图像去噪模型, 然后引入改进Gerschgorin理论从观测矩阵中准确估计出低秩矩阵的秩。在此基础上, 结合秩估计方法提出自适应思想, 通过奇异值分解与软阈值算子对自适应加权核范数最小化图像去噪模型进行求解, 得到最终的去噪图像。实验结果表明, 文章算法与现有的多种经典去噪算法相比具有更高的峰值信噪比值和结构相似性值, 有效提高去噪性能的同时保持了图像的边缘纹理等细节信息, 具有良好的鲁棒性和泛化性。

关键词

加权核范数最小化, 秩估计, 自适应权重, 低秩矩阵恢复

Image Denoising with Adaptive Weighted Kernel Norm Minimization

Yuying Gou*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 13th, 2023; accepted: Jun. 7th, 2023; published: Jun. 15th, 2023

Abstract

Aiming at the problems that it is difficult to separate low-rank information from noise and over-dependence on empirical value in parameter selection in image denoising process of weighted kernel norm minimization algorithm, an adaptive weighted kernel norm minimization algorithm is proposed. Firstly, a weighted kernel norm minimization image denoising model is constructed using image non-local similar priors, and then an improved Gerschgorin theory is introduced to accurately es-

*Email: 1424923385@qq.com

estimate the rank of the low-rank matrix from the observation matrix. On this basis, an adaptive idea is proposed by combining rank estimation method, and the adaptive weighted kernel norm minimization image denoising model is solved by singular value decomposition and soft threshold operator, and the final denoising image is obtained. The experimental results show that the proposed algorithm has higher peak signal-to-noise ratio and structural similarity value compared with the existing classical denoising algorithms, which can effectively improve the denoising performance while preserving the image edge texture and other details, and has good robustness and generalization.

Keywords

Weighted Kernel Norm Minimization, Rank Estimation, Adaptive Weight, Low Rank Matrix Recovery

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图像去噪是图像处理邻域的一个经典病态反问题，其目的是从受噪声干扰的退化图像中恢复出原始的真实图像。图像去噪在去除噪声的同时也需要保留图像信息，因此如何既能够有效去除图像中的噪声，又能尽可能多地保留图像细节信息一直是热门的科研问题。

在现有的图像去噪问题研究中，图像的非局部自相似(Nonlocal Self-Similarity, NSS)先验[1]的算法得到了广泛的研究与应用。利用图像中包含大量自相似结构的性质，文献[2]提出了一种非局部均值(Nonlocal Means, NLM)滤波算法，该算法在有效减少高斯噪声的同时较好地保护了原图像中的局部纹理特征。NLM 算法具有良好的去噪效果，吸引了众多学者，大量基于 NLM 的改进算法也随之被提出。比如对 NSS 先验的进一步研究激发了基于字典学习的稀疏性先验。常用的基于字典学习的稀疏性先验算法为 KSVD 字典学习去噪算法[3]，利用图像的稀疏性和内部自相似性先验来避免伪影。基于稀疏性先验的方法将图像当成向量来处理，忽视了图像自身块与块之间存在的结构相似特性。为了更好地利用图像块的 NSS 特性，通常将相似度较高的图像块组合成图像组矩阵。如文献[4]提出的非局部中心化稀疏表示(Nonlocally Centralized Sparse Representation, NCSR)方法的图像复原模型，文献[5]在非局部相似块分组技术的基础上，提出了一种三维块匹配(Block Matching 3D, BM3D)协同滤波算法理论。该算法是首个将图像的非局部自相似性和稀疏表示结合起来的去噪算法，虽然其去噪效果极好，但是在边缘纹理等方面表现并不是很好，甚至出现了伪纹理现象。

利用图像自身的非局部自相似性进行图像去噪的另一个研究思路是低秩矩阵恢复(Low-Rank Matrix Recovery, LRMR)算法，而低秩矩阵恢复算法可以分成两类：低秩矩阵分解[6]和秩最小化[7]。其中，低秩矩阵分解方法是以 SVD 分解为核心的，通过限制奇异值的数量或大小来约束矩阵结构的稀疏性，从而给出图像块矩阵的低秩逼近[8]。由于秩最小化方法是一个非凸优化问题，较难求解，一般采用核范数最小化凸近似代替秩最小化实现低秩矩阵恢复。文献[9]提出了核范数最小化(Nuclear Norm Minimization, NNM)算法，利用核范数近似秩函数来构建低秩去噪模型，通过求解奇异值软阈值来恢复低秩矩阵实现图像去噪。然而，该算法对奇异值同时均等地减去一个固定的阈值，忽略了不同的奇异值具有不同物理意义，造成了数据偏差。为了解决此问题，文献[10]提出了加权核范数最小化(Weighted Nuclear Norm Minimization, WNNM)算法，权重的分配随奇异值的不同而改变，能更好地恢复低秩矩阵用于改善去噪性能。由于容易求解和去噪效果好的特点，许多基于低秩矩阵恢复的图像去噪算法都以 WNNM 为基础进一步展开研究。文献[11]论证了非凸松弛对于核范数的优点，提出加权 Schatten-p 范数最小化(WSNM)模型，

该模型更加灵活,也能更好地逼近原始的低秩矩阵逼近问题,获得了比 NNM 更好的低秩矩阵估计结果。文献[12]将 WNNM 模型中的核范数替换为伽马范数,提出基于伽马范数最小化的图像去噪算法。针对 WNNM 去噪算法存在的问题,文献[13]提出快速加权核范数最小化算法。文献[9]利用相似图像块张量表示低秩特性,基于张量核范数最小化估算低秩张量实现图像去噪,得到较好的去噪性能。文献[14]在 WNNM 的基础上结合彩色图像三通道特点,提出了多通道加权核范数最小化(Multi-Channel Weighted Nuclear Norm Minimization, MCWNNM)的彩色图像去噪算法。

虽然 WNNM 算法基于奇异值的物理特性对奇异值赋予不同的权值,但权值是由与低秩矩阵的秩相关的经验参数所确定的。选择一个合适的经验参数适应现实场景的情况是十分困难的,一旦参数选择不当,会影响图像的去噪效果。针对此问题,文章提出一种自适应加权低秩矩阵恢复的图像去噪算法,通过自适应加权策略来准确有效地恢复出原始图像的低秩矩阵部分,达到去噪目的。与其它方法不同的是,文章通过改进的 Gerschgorin 圆盘估计方法来估计低秩矩阵的秩,利用估计的秩设计自适应权重对奇异值不同程度的惩罚,能够更加准确有效地恢复原始图像中的低秩结构。在大量的图像去噪实验中,通过与主流算法进行主观与客观评价,文章算法均能够表现出优秀的去噪性能。

2. 加权核范数最小化模型

加权核范数最小化是一种约束矩阵奇异值稀疏性的低秩算法,在核范数最小化的理论基础上增加了核范数权重,有效利用了自然图像的先验信息并提高了核范数的灵活性。作为 NNM 的推广,加权核范数最小化(WNNM)模型被描述为:

$$\hat{X} = \arg \min_X \frac{1}{\sigma_n^2} \|Y - X\|_F^2 + \|X\|_{w,*} \quad (1)$$

$$\|X\|_{w,*} = \sum_{i=1} w_i \sigma_i(X) \quad (2)$$

式中 $\|X\|_{w,*}$ 是矩阵 X 的加权核范数, $w = [w_1, \dots, w_n]^T$ ($w_i \geq 0$) 为矩阵 X 中第 i 个奇异值对应的权重向量。文献[15]给出了式(1)在 $\sigma_n(X) \leq \sigma_{n-1}(X) \leq \dots \leq \sigma_0(X)$ 且 $0 \leq w_1 \leq \dots \leq w_n$ 时,上述加权核范数最小化模型的全局最优解:

$$\hat{X} = US_w[\Sigma]V^T \quad (3)$$

式中, $S_w[\Sigma]$ 是权值向量 w 的广义软阈值算子,也可表示为:

$$S_w[\Sigma] = \max(\sigma_i(X) - w_i, 0) \quad (4)$$

3. 自适应加权核范数最小化恢复模型

3.1. 提出的模型

WNNM 模型因其优良的性能在近年来被广泛的应用,但是这一类方法中权重取决于经验上选择的一个正则化参数,并与低秩矩阵的秩相关,对于不同的任务通常需要反复调节参数。针对这一问题,文章提出一种自适应加权核范数最小化图像去噪模型,能够在通过观测数据本身自适应地加权,并能够准确有效恢复出低秩矩阵。

如前所述,在低秩矩阵恢复问题中,低秩矩阵的秩是一个非常重要的参数。在某些场景中,该参数是已知的,但是绝大部分的场景中,该参数是未知的。为了解决低秩矩阵的秩未知这一问题,文章引入 Gerschgorin 盘估计[15]的思想来估计低秩矩阵的秩。根据文献[16]可知,在噪声环境中传感器阵列接收到的信号 M 同样可以表示为低秩信号源矩阵 L 和稀疏噪声信号矩阵 S 的和。秩为 r 的矩阵 M 的协方差矩阵 MR 可以定义为:

$$R_M = MM^T \tag{5}$$

对 R_M 进行特征值分解得:

$$R_M = U_{R_M} \Sigma_{R_M} U_{R_M}^H \tag{6}$$

式中 $U_{R_M} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ 是特征向量构成的矩阵, $\Sigma_{R_M} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ 是特征值构成的对角阵。在无噪环境中 R_M 秩为 r , 但在真实环境中由于噪声影响, R_M 秩为 n ($n \gg r$)。为准确估计低秩矩阵的秩 r , 引入 Gerschgorin 盘理论。首先, 划分协方差矩阵:

$$R_{\tilde{M}} = \begin{bmatrix} R_{M1} & R \\ R^H & R_{nn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

式中 $R_{M1} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$ 是通过删去 R_M 的最后一行和最后一列得到的。对矩阵 R_{M1} 进行特征值分解可得:

$$R_{M1} = U_{R_{M1}} \Sigma_{R_{M1}} U_{R_{M1}}^T \tag{8}$$

$U_{R_{M1}} = [q'_1, q'_2, \dots, q'_{n-1}]$ 为矩阵 R_{M1} 特征向量矩阵, $\Sigma_{R_{M1}} = \text{diag}(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{n-1})$ 矩阵 R_{M1} 特征值矩阵。定义一个酉变化矩阵 $U \in R^{n \times n}$ ($UU^H = I$) 如下所示:

$$U = \begin{pmatrix} U_{R_{M1}} & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

则协方差矩阵经过酉变化之后为:

$$R_T = U^H R_M U = \begin{pmatrix} \Sigma_{R_{M1}} & U_{R_{M1}}^H R \\ R^H U_{R_{M1}} & R_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho_1 \\ 0 & \lambda'_2 & 0 & \dots & 0 & \rho_2 \\ 0 & 0 & \lambda'_3 & \dots & 0 & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda'_{n-1} & \rho_{n-1} \\ \rho_1^* & \rho_2^* & \rho_3^* & \dots & \rho_{n-1}^* & R_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

式中, $\rho_i = q_i'^H R$

为了进一步提高秩估计的准确性, 文章提出一种新方法来缩小 Gerschgorin Disk 的有效半径。因此, 构造一个对角矩阵 D 如下:

$$D = \text{diag}(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{n-1}, \lambda'_n) \tag{11}$$

$$\lambda'_n = \sqrt{\sum_1^{n-1} \lambda_i'^2} \tag{12}$$

定义一个新的转换矩阵 R_{TD} 为:

$$R_{TD} = DR_T D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda'_1}{\lambda'_n} \rho_1 \\ 0 & \lambda'_2 & 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda'_2}{\lambda'_n} \rho_2 \\ 0 & 0 & \lambda'_3 & \dots & 0 & \frac{\lambda'_3}{\lambda'_n} \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda'_{n-1} & \frac{\lambda'_{n-1}}{\lambda'_n} \rho_{n-1} \\ \frac{\lambda'_1}{\lambda'_n} \rho_1^* & \frac{\lambda'_2}{\lambda'_n} \rho_2^* & \frac{\lambda'_3}{\lambda'_n} \rho_3^* & \dots & \frac{\lambda'_{n-1}}{\lambda'_n} \rho_{n-1}^* & R_{nn} \end{pmatrix} \tag{13}$$

其中, R_{TD} 和 R_T 是相似矩阵, 这两个矩阵具有相同的特征值。通过公式(13)可知, 经过转换后的 Gerschgorin Disk 其圆心位置并没有改变, 但是 Gerschgorin Disk 的半径受到不同程度的压缩。稀疏部分的 Gerschgorin Disk 半径被压缩的程度比低秩部分 Gerschgorin Disk 被压缩的程度要大。这意味着, 低秩特征值定位集与稀疏特征值定位集的间距变得更大, 两个定位集的边界变得更为清晰。由此, 提出了新的启发式决策规则:

$$RANK(k) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i'^2}} \left[|\lambda_k'| r_k - \frac{D^{(k)}(M)}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i'| r_i \right] \quad (14)$$

式中, $k=1, 2, \dots, n-2$, 当公式在 k 处首次达到负值时, 低秩矩阵的秩为 $k-1$ 。调整因子 $0 < D^{(k)}(M) < 1$ 如下所示:

$$D^{(k)}(M) = \frac{2|\lambda_{k+1}'|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i'^2}} \quad (15)$$

根据公式(15)定义可知, $D^{(k)}(M)$ 的值无需人为调整, 完全由矩阵 R_{TD} 自身所定义。因此, 文章改进的 Gerschgorin Disk 估计法使其可以自动识别低秩矩阵的秩。

通过上述所提出的改进秩估计算法得到低秩矩阵的秩, 结合加权核范数最小化算法, 文章提出了一种基于秩估计的自适应加权核范数最小化恢复模型, 即:

$$\hat{X} = \arg \min_X \frac{1}{\sigma_n^2} \|Y - X\|_F^2 + \mu \|X\|_{W_X, *}, \quad (16)$$

式中 $\|X\|_{W_X, *} = \sum_i \omega_{X,i} \lambda_i(X)$, $W_X = \text{diag}(\{\omega_{X,i}\}_{1 \leq i \leq \min(m,n)})$ 是低秩矩阵 X 的权重。

对于噪声图像 Y , 先确定它的某个图像块, 然后在尺寸为 $X \times X$ 的搜索窗口中搜索它的相似块, 把它们聚集为一个矩阵, 记为 Y_j 。对于每组相似块矩阵 Y_j 求解则有如下优化问题:

$$\hat{X}_j = \arg \min_{X_j} \frac{1}{\sigma_n^2} \|Y_j - X_j\|_F^2 + \mu \|X_j\|_{W_X, *} \quad (17)$$

对于最小化问题(15), 通过广义软阈值算法可以得出闭式解为:

$$\sigma_i(\hat{X}_j) = \max(\sigma_i(Y_j) - \mu \omega_{X,i}, 0) \quad (18)$$

再结合给出的权重, 可得到最后的奇异值闭式解为:

$$\sigma_i(\hat{X}_j) = \begin{cases} \sigma_i(Y_j) - \frac{(\sigma_{r+1}(Y_j))^2}{\sigma_i(Y_j)}, & i \leq r \\ 0, & i > r \end{cases} \quad (19)$$

式(17)提供了估计出低秩矩阵 \hat{X}_j 的解, 最后通过组合所有组矩阵 $\{\hat{X}_j\}_i^n$ 来得到去噪后图像 X 。在实际去噪过程中, 可以通过进行多次迭代上述去噪过程来获取更清晰的图像。

3.2. 去噪算法流程

算法: 自适应加权核范数最小化图像去噪

输入: 噪声图像 Y

输出: 去噪图像 X^k

- 初始化: $\hat{X}_0 = Y, Y_0 = X$
- 步骤 1: 设置 $k = 1$, 最大迭代次数 s
- 步骤 2: 迭代正则化 $Y^k = X^{k-1} + \varepsilon(Y - X^{k-1})$
- 步骤 3: 通过式(14)估计 r
- 步骤 4: 通过式(19)估计 X_j
- 步骤 5: 将 X_j 聚合成去噪图像 X^k

4. 实验结果与分析

实验的硬件设备为: 处理器 Intel Core(TM)i5-4210U CPU@1.70 GHz 2.40 GHz 内存为 4.00 GB; 系统为 64 位 Windows 10 操作系统; 运行环境为 Matlab R2021a。

为了验证文章提出的自适应加权低秩矩阵恢复算法在图像去噪任务上的有效性, 文章选用标准图像库与 Berkeley 数据集[17]中的图片进行实验测试, 并使用峰值信噪比(PSNR)和结构相似性(SSIM)两个客观指标与经典算法 KSVD [3]、NCSR [4]、BM3D [5]和 WNNM [10]进行定量评价与分析。实验参数设置如下, 搜索窗口为 30×30 。对于噪声标准差为 $\sigma_n < 30, 30 \leq \sigma_n < 50, 50 \leq \sigma_n < 75, \sigma_n \geq 75$ 的含噪图像, 图像块尺寸分别设置为 $6 \times 6, 7 \times 7, 8 \times 8$ 和 9×9 搜索相似块个数 m 分别为 60、80、110 和 130, 算法迭代次数分别为 7、9、11、13。

4.1. 主观视觉评价

为了验证文章提出方法的有效性, 选用标准数据库的测试图像如图 1 所示, 分别对所有图像添加均值为 0、标准差 σ_n 为 10、30、50 和 100 的高斯噪声来生成噪声测试图像。图 2 为 $\sigma = 10$ 时多种算法的去噪效果比较图; 图 3 为 $\sigma = 30$ 时多种算法的去噪效果比较图; 图 4 为 $\sigma = 50$ 时多种算法的去噪效果比较图; 图 5 为 $\sigma = 100$ 时多种算法的去噪效果比较图。

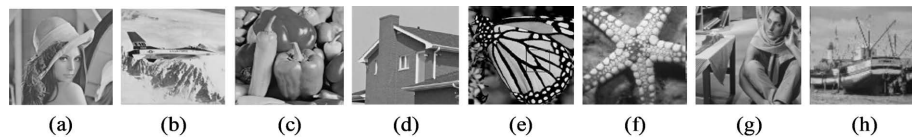


Figure 1. Test image for comparison of denoising algorithms

图 1. 用于去噪算法对比的测试图像



Figure 2. $\sigma = 10$ when Lena image using a variety of algorithms denoising effect comparison chart

图 2. $\sigma = 10$ 时 Lena 图像使用多种算法去噪效果比较图

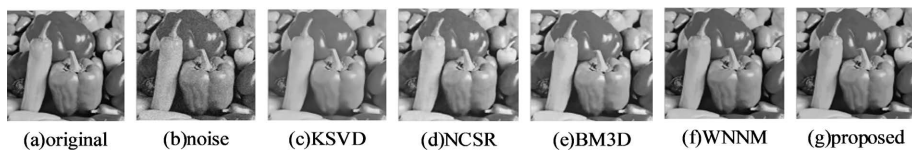


Figure 3. $\sigma = 30$ Peppers image using a variety of algorithms when denoising effect comparison chart

图 3. $\sigma = 30$ 时 Peppers 图像使用多种算法去噪效果比较图



Figure 4. $\sigma = 50$ House image denoising effect comparison chart USES a variety of algorithm
图 4. $\sigma = 50$ 时 House 图像使用多种算法去噪效果比较图

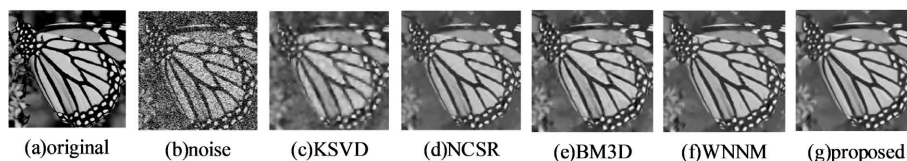


Figure 5. $\sigma = 100$ Monarch image denoising effect comparison chart USES a variety of algorithm
图 5. $\sigma = 100$ 时 Monarch 图像使用多种算法去噪效果比较图

通过对以上各种方法实验结果的对比，可以看出，KSVD 算法得到的图像质量较差，BM3D 算法产生了一些人工瑕疵，并光滑掉了一些细节，NCSR 和 WNNM 算法都在不同程度上损失了一些图像的细节信息。文章算法在有效抑制图像噪声的同时，较好地保护了图像的边缘结构和细节信息。

为更好地进行主观视觉评价，在图 6 和图 7 中，展示了 Berkeley 数据集 House 图像和 Monarch 图像在噪声标准差 50 和 100 的情况下不同算法的去噪结果局部细节放大图。

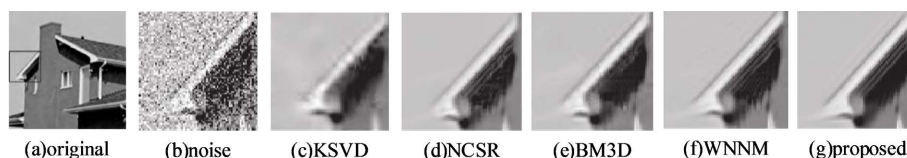


Figure 6. House local details enlarge figure
图 6. House 图像局部细节放大图

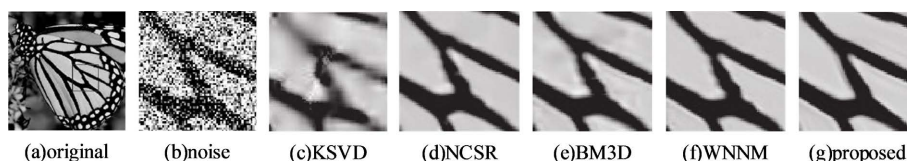


Figure 7. Enlarged view of local details in the Monarch image
图 7. Monarch 图像局部细节放大图

从图 6 House 图像的细节对比图片来看，KSVD、NCSR 算法产生了不同程度的伪影，BM3D、WNNM 算法产生了模糊的纹理结构。而本文算法得到的去噪图片整体观感较为清晰且对局部结构的处理也较为平滑。图 7 是 Monarch 图像在 $\sigma = 100$ 时几种算法去噪结果的局部翅膀结构细节放大图。在高噪声的情况下，KSVD 算法去噪效果最差，去噪后的细节图像模糊不清。BM3D 算法在去噪后的图像中出现噪声白斑。WNNM 和 NCSR 算法在条纹处出现大量伪影。相比之下文章算法仍然有较为清晰的翅膀细节结构，且伪影更少。

4.2. 客观评价指标

为客观地验证文章算法的有效性，采用峰值信噪比和结构相似度两个指标进行评价。峰值信噪比越大，结构相似度越接近 1，说明去噪图像与原始图像越接近，去噪效果越好；反之效果越差。表 1 给出了噪声水平为 10、30、50、100 时 8 幅图像去噪恢复后的峰值信噪比(PSNR)和结构相似度(SSIM)的结果。

从表 1 可以看出, KSVD 算法去噪效果欠佳; NCSR 算法和 BM3D 算法去噪性能相对一般, 随着噪声水平的增加, 去噪性能明显下降; WNNM 算法的去噪性能相比其它算法都有较好的效果, 但是 WNNM 算法需要通过调整经验参数来适用于不同图像。文章算法在大多数情况下评价指标取得最优值, 由此可知, 文章所提算法相比其他算法, 在不同噪声水平情况下都有较好的去噪性能。

Table 1. Comparison of PSNR and SSIM of different algorithms under different noise intensities
表 1. 不同算法在不同噪声强度下的 PSNR 和 SSIM 对比

图像	噪声水平	KSVD	NCSR	BM3D	WNNM	Our
		PSNR/SSIM	PSNR/SSIM	PSNR/SSIM	PSNR/SSIM	PSNR/SSIM
Lena	10	34.65/0.889	35.85/0.916	35.93/0.917	36.03/0.917	36.74/0.928
	30	30.75/0.803	31.06/0.846	31.26/0.845	31.43/0.850	32.03/0.869
	50	27.86/0.734	28.90/0.802	29.05/0.799	29.24/0.806	29.84/0.827
	100	24.48/0.643	25.71/0.728	25.95/0.709	26.20/0.725	26.80/0.752
Airplane	10	32.03/0.874	33.40/0.925	33.33/0.926	33.64/0.927	34.65/0.886
	30	26.68/0.784	27.53/0.841	27.56/0.837	27.83/0.843	30.28/0.826
	50	24.68/0.713	24.93/0.775	25.10/0.772	25.43/0.785	28.17/0.785
	100	20.79/0.597	21.83/0.677	21.11/0.671	22.55/0.685	24.98/0.708
Peppers	10	34.24/0.923	34.78/0.927	34.68/0.928	34.95/0.930	34.97/0.878
	30	28.79/0.837	29.10/0.849	29.28/0.850	29.49/0.857	31.41/0.825
	50	25.95/0.766	26.82/0.800	26.68/0.794	26.91/0.801	29.34/0.793
	100	21.80/0.623	22.84/0.701	23.39/0.688	23.46/0.698	26.19/0.721
House	10	32.03/0.848	36.80/0.920	36.71/0.922	36.95/0.923	36.98/0.931
	30	28.65/0.789	32.07/0.846	32.09/0.848	32.52/0.852	32.65/0.861
	50	26.39/0.728	29.62/0.819	29.69/0.812	30.32/0.823	30.34/0.822
	100	24.89/0.672	25.56/0.736	25.87/0.720	26.68/0.754	26.76/0.755
Monarch	10	33.31/0.941	34.51/0.957	34.12/0.956	35.03/0.960	35.68/0.965
	30	27.61/0.843	28.46/0.889	28.36/0.882	28.92/0.893	28.96/0.896
	50	24.49/0.768	25.73/0.828	25.82/0.820	26.32/0.835	26.33/0.836
	100	21.39/0.618	22.11/0.708	22.52/0.702	22.95/0.726	22.98/0.731
Starfish	10	33.26/0.912	33.65/0.935	33.30/0.932	33.99/0.937	34.12/0.938
	30	26.13/0.758	27.78/0.830	27.65/0.829	28.08/0.835	28.14/0.832
	50	24.79/0.657	25.07/0.744	25.04/0.743	25.44/0.759	25.51/0.759
	100	21.83/0.576	21.67/0.604	22.10/0.605	22.23/0.616	22.24/0.620
Barbara	10	34.13/0.940	35.00/0.943	34.98/0.942	35.51/0.945	35.84/0.943
	30	27.83/0.837	29.62/0.868	29.81/0.869	30.31/0.881	30.36/0.881
	50	25.89/0.763	26.99/0.794	27.23/0.795	27.79/0.820	27.84/0.822
	100	21.98/0.549	23.20/0.640	23.62/0.643	24.37/0.686	24.37/0.691
Boat	10	33.64/0.884	33.91/0.887	33.92/0.888	34.09/0.889	34.37/0.888
	30	28.39/0.742	28.94/0.769	29.12/0.780	29.24/0.780	29.31/0.782
	50	25.97/0.659	26.66/0.695	26.78/0.705	26.97/0.708	27.04/0.711
	100	22.82/0.529	23.68/0.589	23.97/0.594	24.10/0.598	24.42/0.599

5. 结论

针对加权核范数最小化图像去噪对低秩矩阵秩约束不强导致图像去噪效果不佳的问题, 文章提出一种基于自适应加权核范数最小化的图像去噪算法。该算法通过引入改进的 Gerschgorin Disk 理论思想来估计低秩矩阵的秩, 再通过观察矩阵的奇异值自适应地更新加权核范数的权重, 从而更有效地恢复出低秩矩阵。在含噪图像上的实验结果表明, 与现有的经典去噪算法 KSVD、NCSR、BM3D、WNNM 等相比, 文章算法在不同噪声强度下具有更好的去噪性能, 能在有效去除噪声的情况下, 更好地保留原图像细节信息。

基金项目

国家自然科学基金(61861040)、甘肃省科学院应用研究与开发(2018JK-02)、甘肃省重点研发计划(20YF8GA125)、兰州市科技计划项目(2018-4-35)。

参考文献

- [1] Gilboa, G. and Osher, S. (2009) Nonlocal Operators with Applications to Image Processing. *Multiscale Modeling & Simulation*, **7**, 1005-1028. <https://doi.org/10.1137/070698592>
- [2] Sutour, C., Deledalle, C.A. and Aujol, J.F. (2014) Adaptive Regularization of the NL-Means: Application to Image and Video Denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, **23**, 3506-3521. <https://doi.org/10.1109/TIP.2014.2329448>
- [3] Aharon, M., Elad, M. and Bruckstein, A. (2006) K-SVD: An Algorithm for Designing Overcomplete Dictionaries for Sparse Representation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **54**, 4311-4322. <https://doi.org/10.1109/TSP.2006.881199>
- [4] Dong, W., Zhang, L., Shi, G. and Li, X. (2013) Nonlocally Centralized Sparse Representation for Image Restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, **22**, 1620-1630. <https://doi.org/10.1109/TIP.2012.2235847>
- [5] Dabov, K., Foi, A., Katkovnik, V. and Egiazarian, K. (2007) Image Denoising by Sparse 3-D Transform-Domain Collaborative Filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, **16**, 2080-2095. <https://doi.org/10.1109/TIP.2007.901238>
- [6] Bertalmio, M. (2018) Denoising of Photographic Images and Video: Fundamentals, Open Challenges and New Trends. Springer Publishing Company, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-96029-6>
- [7] Gu, S., Xie, Q., Meng, D., et al. (2017) Weighted Nuclear Norm Minimization and Its Applications to Low Level Vision. *International Journal of Computer Vision*, **121**, 183-208. <https://doi.org/10.1007/s11263-016-0930-5>
- [8] Cai, J., Candès, E.J. and Shen, Z. (2008) A Singular Value Thresholding Algorithm for Matrix Completion. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1956-1982. <https://doi.org/10.1137/080738970>
- [9] Zhang, C., Hu, W., Jin, T., et al. (2018) Nonlocal Image Denoising via Adaptive Tensor Nuclear Norm Minimization. *Neural Computing & Application*, **29**, 3-19. <https://doi.org/10.1007/s00521-015-2050-5>
- [10] Gu, S., Zhang, L. and Feng, X. (2014) Weighted Nuclear Norm Minimization with Application to Image Denoising. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Columbus, 23-28 June 2014, 2862-2869. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2014.366>
- [11] Xie, Y., Gu, S. and Zhang, L. (2016) Weighted Schatten p-Norm Minimization for Image Denoising and Background Subtraction. *IEEE Transactions on Image Processing*, **25**, 4842-4857. <https://doi.org/10.1109/TIP.2016.2599290>
- [12] 王洪雁, 王拓, 潘勉, 等. 基于伽马范数最小化的图像去噪算法[J]. 通信学报, 2020, 41(10): 222-230.
- [13] 王彩云, 赵焕玥, 王佳宁, 等. 快速加权核范数最小化的 SAR 图像去噪算法[J]. 系统工程与电子技术, 2019, 41(7): 1504-1508.
- [14] Xu, J., Zhang, L., Zhang, D., et al. (2017) Multi-Channel Weighted Nuclear Norm Minimization for Real Color Image Denoising. *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, Venice, 22-29 October 2017, 1096-1104. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2017.125>
- [15] Guo, Y., Li, W., Shen, J., et al. (2014) Source Number Estimation with Gerschgorin Radii by Reduced-Rank Covariance Matrix. *International Conference on Information and Communications Technologies (ICT)*, Nanjing, 15-17 May 2014, 1-5.
- [16] Li, C. (2014) A New Approximation of the Matrix Rank Function and Its Application to Matrix Rank Minimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **163**, 569-594. <https://doi.org/10.1007/s10957-013-0477-3>
- [17] Arbelaez, P., Maire, M., Fowlkes, C., et al. (2010) Contour Detection and Hierarchical Image Segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **33**, 898-916. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2010.161>