Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(6), 2663-2670
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126268

马尔可夫切换概率布尔控制网络的有限时间镇定

林仕楠

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年5月9日；录用日期：2023年6月2日；发布日期：2023年6月9日

摘 要

本文主要研究了马尔可夫切换概率布尔控制网络有限时间稳定问题，我们给出了一个验证马尔可夫切换概率布尔控制网络有限时间稳定的充要条件，并且给出具体的证明来论述我们的结论。

关键词

半张量积，马尔可夫切换，布尔网络，有限时间镇定

Finite-Time Stabilization of Markovian Switching Probabilitic Boolean Control Networks

Shinan Lin

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: May 9^{th}, 2023; accepted: Jun. 2^{nd}, 2023; published: Jun. 9^{th}, 2023

Abstract

In this paper, we mainly studies the finite time stability problem of Markovian switch-

文章引用: 林仕楠. 马尔可夫切换概率布尔控制网络的有限时间镇定[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 2663-2670.
DOI: 10.12677/aam.2023.126268

ing probability Boolean control networks. We provide a necessary and sufficient condition to verify the finite time stability of Markovian switching probabilitic Boolean control networks and provide specific proof to verify our conclusion.

Keywords

Semi-Tensor Product, Markovian Switch, Boolean Networks, Finite-Time Stabilization

1. 引言

随着系统生物学的发展，许多学者们深入研究了基因调控网络的相关问题，并取得许多卓越的结果. 基因调控网络主要是指细胞或染色体组中的基因之间相互作用而产生的一些抽象网络, 其主要作用是通过一组分子调控因子(调节因子可以是DNA、RNA、蛋白质或这三种物质中两种或多种形成复合物的任何组合)相互作用或与细胞中的其他物质相互作用, 以控制mRNA和蛋白质的基因表达水平, 进而决定细胞的功能. 为了更加深入研究基因调控网络, 学者们从不同角度来研究和剖析基因调控网络模型, 分别提出了各种不同的数学模型和计算模型来描述基因之间的相互作用关系, 例如常微分方程模型 [1]、马尔可夫链模型 [2]、布尔网络 [3]等, 这些数学模型在基因干预和调控研究中发挥着重要作用.

在1976年, Kaufman提出布尔网络模型, 并且把它应用于基因调控网络的内部动力学问题方面的研究. 布尔网络由一组离散的布尔变量组成, 每个布尔变量都有一个相对应的布尔函数(每个变量对应的函数可能不同), 函数f_i确定变量 i 的下一个状态, 并用布尔运算符 $\wedge$, $\vee$ 和 $\neg$ (分别为逻辑运算符交, 并和否)表示. 最近, 程代展在布尔网络逻辑动态系统的研究中引入了一种新方法, 称为矩阵半张量积, 可以用来研究逻辑动态网络系统控制等相关问题, 这种方法充分展现了它在处理离散值系统方面相关问题的优越性. 在文献 [4]中, 程代展等人利用矩阵的半张量积的方法, 在离散时间动态的逻辑系统中, 将逻辑变量“0”和“1”的值转化为向量形式$[0, 1]^\top$ 和$[1, 0]^\top$, 进而可以把逻辑函数转化为相应的代数形式. 因此, 研究人员们解决了布尔网络的能控性 [5]、可观测性 [6]、稳定性 [7]等相关问题, 并获得了一系列重要的结果.

系统的稳定和镇定问题是一个非常重要的问题, 具有实际应用价值. 例如, 在治疗疾病时, 人们希望通过药物尽快引导生物体达到理想健康状态 [8]. 关于布尔控制网络, 概率布尔控制网络和马尔可夫切换布尔控制网络的稳定和镇定问题已经取得了许多卓越的成果. 此外，李芳菲在 [9]中研究

带有脉冲的布尔控制网络的稳定和镇定问题, 并给出了一些相应的充要准则. 在 [10]中, 刘洋等人利用数据采样来研究概率布尔控制网络的状态反馈控制器使得其镇定和集合镇定.

关于概率布尔控制网络, 马尔可夫切换布尔控制网络的镇定问题已经有相关的结果, 但是关于马尔可夫切换概率布尔控制网络的镇定问题没有任何相关的结论, 并且复杂网络的研究具有实际意义, 因此我们对其进行了研究分析.

2. 预备知识

符号：$\mathcal{D}=\{0,1\}$；$\mathcal{D}^n=\prod_{i=1}^{n}\mathcal{D}$；$\mathbb{N}$是自然数的集合；$\mathbb{N}_+$是一个正整数集；$*$是Khatri-Rao积，$\otimes$是Kronecker 积；$R_{a\times b}$ 是一个$a\times b$的维度实矩阵集合；δ_n^i是单位矩阵I_n的第i-列; $W_{[m,n]}=[I_n\otimes\delta_m^1, I_n\otimes\delta_m^2,\ldots,I_n\otimes\delta_m^m]$是一个交换矩阵；$\Phi_{2^n}=\delta_{2^{2n}}[1,2^n+2,\ldots,(2^n-2)2^n+2^n-1,2^{2n}]$是一个降幂矩阵；$\Delta_n=\{\delta_n^1,\ldots,\delta_n^n\}$；$[a,b]=\{a,a+1,\ldots,b\}$，其中$a<b$和$a,b\in\mathbb{N}_+$；$\delta_n^i$是单位矩阵$I_n$的第$i$-列；$\Delta_n=\{\delta_n^1,\ldots,\delta_n^n\}$；$A=[\delta_n^{l_1},\ldots,\delta_n^{l_s}]$，$l_1,...,l_s\in[1,n]$是一个逻辑矩阵，简记为$A=\delta_n[l_1,\ldots,l_s]$；$\mathcal{L}_{a\times b}$ ；$\mathcal{L}_{a\times b}$是一个维度为的逻辑矩阵集合；$\mid M\mid$表示集合M中元素的基数;$\mathcal{P}_{m\times n}$是一个$m\times n$维度为的概率矩阵集合； 给定一个矩阵$P\in\mathcal{P}_{m\times n}$，$P_{ij}$表示的第$i$行和第$j$列的元素，满足$0\le P_{ij}\le 1$，$\sum\limits_{j=1}^{m}P_{ij}=1$；给定两个集合$M$和$N$，$M\backslash N=\{x\in M\mid x\notin N\}$；$\mathbf{1}_n^\top=[\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n}]$； $\Pr\{A\mid B\}$ 表示事件A在另一事件B已经发生的条件下的发生的概率.

定义2.1. [4] *给定两个矩阵$M\in R_{n\times m}$和$N\in R_{p\times q}$，矩阵M和N的半张量积运算如下:$M\ltimes N=(M\otimes I_{l/m})(N\otimes I_{l/p})$，记为$M\ltimes N$，其中$l$表示$m$和$p$的最小公倍数.*

引理2.1. [4] *考虑一个逻辑函数$f(a_1,\cdots,a_n):\mathcal{D}^n\to\mathcal{D}$，存在一个唯一的矩阵$F\in\mathcal{L}_{2\times 2^n}$，使得$\delta_2^{2-f(a_1,\cdots,a_n)}=F\ltimes_{i=1}^{n}\delta_2^{2-a_i}$，其中$f$的结构矩阵由$F$表示.*

3. 主要结果

我们主要考虑的是带有s个切换信号, n个节点和m个控制输入的马尔可夫切换概率布尔控制网络:

$$X_i(t+1)=f_i^{\sigma(t)}(X(t),U(t)),i\in[1,n],\sigma(t)\in[1,s]. \tag{1}$$

其中$X(t)=(X_1(t),\cdots,X_n(t))\in\mathcal{D}^n$, $U(t)=(U_1(t),\cdots,U_m(t))\in\mathcal{D}^m$分别表示系统(1)的状态和控制输入; $\sigma(t)$表示切换信号, 并且切换信号序列$\sigma(t),t\in\mathbb{N}$是一个有限状态齐次马尔可夫链, 它的空间状态集合为$\mathcal{S}=[1,s]$和概率转移矩阵为P.

在基因调控网络中, 把系统状态通过闭环控制使得能够稳定在理想状态, 因此我们主要设计一个切换依赖控制器$U(t)=k_{\sigma(t)}(X(t))$, 使得系统(1)能够镇定到状态X_e. 那么, 我们需要先给出如下系统(1)有限时间镇定的概念.

定义3.1. *给定一个状态$X_e\in\mathcal{D}^n$，考虑系统(1)，如果对每一个初始状态$X(0)=X_0\in\mathcal{D}^n$和切换信号$\sigma(0)\in\mathcal{S}$，存在一个正整数T和控制序列$U:\mathbb{N}\to\mathcal{D}^m$，使得$\Pr\{X(t)=X_e\mid X(0)=X_0,\sigma(0),U\}=1,\forall t\ge T$，那么系统(1)是有限时间$X_e$-镇定的.*

给定一个切换信号$\sigma(t)=\omega$, 逻辑函数$f_i^{\omega}\in\{f_i^{\omega,1},f_i^{\omega,2},\cdots,f_i^{\omega,\mu_i^{\omega}}\}:\mathcal{D}^n\to\mathcal{D}$, $\omega\in[1,s],i\in[1,n]$, 也就是说每个切换信号ω下的节点更新的逻辑函数f_i^{ω}从集合$\{f_i^{\omega,1},f_i^{\omega,2},\cdots,f_i^{\omega,\mu_i^{\omega}}\}$按一定的正概率选取, 每个节点逻辑函数的选取概率为$p_i^{\omega,j}=\Pr\{f_i^{\omega}=f_i^{\omega,j}\}$, $j\in[1,\mu_i^{\omega}]$, 其中$\sum_{j=1}^{\mu_i^{\omega}}p_i^{\omega,j}=1$.

在这章节中, 我们假设每个切换信号$\sigma(t)$下的各节点逻辑函数的选取是独立同分布, 也就是说n个节点选取逻辑函数发生的概率为$\Pr\{f_1^{\sigma(t)}=f_1^{\sigma(t),l_1},\cdots,f_n^{\sigma(t)}=f_n^{\sigma(t),l_n}\}=\Pr\{f_1^{\sigma(t)}=f_1^{\sigma(t),l_1}\}\times\cdots\times\Pr\{f_n^{\sigma(t)}=f_n^{\sigma(t),l_n}\}$, 其中$l_i\in[1,\mu_i^{\sigma(t)}]$, $i\in[1,n]$. 在每一个切换信号$\sigma(t)$下, 可选择的子系统网络一共有$\prod_{i=1}^{n}\mu_i^{\sigma(t)}$ 种. 在每一个切换信号$\sigma(t)$ 下, 所有子系统指标集合可以由如下的矩阵$M^{\sigma(t)}$表示,

$$M^{\sigma(t)}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1&\mu_n^{\sigma(t)}\\1&1&\cdots&2&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\\mu_1^{\sigma(t)}&\mu_2^{\sigma(t)}&\cdots&\mu_{n-1}^{\sigma(t)}&\mu_n^{\sigma(t)}\end{bmatrix}$$

其中$M^{\sigma(t)}\in\mathcal{R}_{\mu^{\sigma(t)}\times n}$和$\mu^{\sigma(t)}=\prod_{i=1}^{n}\mu_i^{\sigma(t)}$. 矩阵的第$k$行表示第$k$个子网络系统, 它的概率$p_k^{\sigma(t)}=\Pr\{$选择第$k$个网络系统$\}=\prod_{i=1}^{n}p_i^{[M^{\sigma(t)}]_{ki}}$, $k\in[1,\mu^{\sigma(t)}]$, 其中$[M^{\sigma(t)}]_{ki}$ 表示第k行和第i列的元素. 由引理2.1, 我们可以得到逻辑函数$f_i^{\omega,\mu_i^{\omega}}$, $\omega\in[1,s]$, $i\in[1,n]$ 的结构矩阵$F_i^{\omega,\mu_i^{\omega}}\in\mathcal{L}_{m\times n}$; 记$x(t)=\ltimes_{i=1}^{n}x_i(t)$和$u(t)=\ltimes_{i=1}^{n}u_i(t)$, 那么上述逻辑函数式(1)转化为如下的代数形式:

$$x_i(t+1)=F_i^{\sigma(t)}u(t)x(t),\sigma(t)\in[1,s],i\in[1,n].$$

其中$\sigma(t)\in[1,s]$,$F_i^{\sigma(t)}\in\{F_i^{\omega,1},F_i^{\omega,2},\cdots,F_i^{\omega,\mu_i^{\omega}}\}$, $\omega\in[1,s]$, $i\in[1,n]$. 进一步, 利用Khatri-Rao积, 我们有如下代数形式:

$$x(t+1)=F^{\sigma(t)}u(t)x(t)\tag{2}$$

其中$F^{\sigma(t)}=*_i^{n}F_i^{\sigma(t)}$, $F^{\sigma(t)}\in\{F^{\omega,k}\mid F^{\omega,k}=*_i^{n}F_i^{\omega,[M^{\sigma(t)}]_{ki}}$, $\omega\in[1,s]$, $k\in[1,\mu^{\sigma(t)}]\}$, 并且它的概率为$\Pr\{F^{\sigma(t)}=F^{\omega,k}\}=p_k^{\omega}$, $k\in[1,\mu^{\sigma(t)}]$. 对式子(2)两边取期望, 我们有

$$x(k+1)=G^{\sigma(t)}u(k)x(k),\tag{3}$$

其中$G^{\sigma(t)}=\sum_{k=1}^{\mu^{\sigma(t)}}p_k^{\omega}F^{\sigma(t),k}\in\mathcal{P}_{2^n\times 2^{m+n}}$.

标量形式$\sigma(t)$可以转换为矢量形式$\theta(t)=\delta_s^{\sigma(t)}$. 因此, 马尔可夫链$\theta(t),t\in\mathbb{N}$ 的状态空间为Δ_s, 并且它的概率转移矩阵为P. 让$G=[G^1,G^2,\cdots,G^s]$, 那么式子(3)等价于下述代数形式:

$$x(t+1)=G\theta(t)u(t)x(t)=GW_{[2^m,s]}u(t)\theta(t)x(t)=\widehat{G}u(t)\theta(t)x(t),\tag{4}$$

其中$\widehat{G}=GW_{[2^m,s]}$. 下面, 定义辅助变量$z(t)=\theta(t)\ltimes x(t)\in\Delta_N$, 其中$N=s2^n$, 也就是说对于每一

个$\theta(t) \in \Delta_s$和$z(t) = \delta_N^j \in \Delta_N$, 我们有

$$\Pr\{\theta(t+1) = \delta_s^i \mid z(t) = \delta_N^j, u(t) = \delta_{2^m}^k\} = [\mathrm{Blk}_k(P^\top \otimes 1_{2^{m+n}}^\top)]_{ij}. \tag{5}$$

结合式子(4)和(5), 对于每一个$\delta_N^i, \delta_N^j \in \Delta_N$, 我们有$\Pr\{z(t+1) = \delta_N^i \mid z(t) = \delta_N^j, u(t) = \delta_{2^m}^{\mu_j}\} = [\mathrm{Blk}_k(\widetilde{G})]_{ij}$, 其中$\widetilde{G} = (P^\top \otimes 1_{2^{m+n}}^\top) * \widehat{G}$. 那么我们可以得到如下的增广系统,

$$z(t+1) = \widetilde{G}u(t)z(t), \tag{6}$$

矩阵$\widetilde{G}^\top$是一个概率转移矩阵, 即$\sum_{i=1}^{n} [\widetilde{G}^\top]_{ji} = 1$, $j \in [1, N2^m]$.

如果存在一个切换依赖控制器$U(t) = k_{\sigma(t)}(X(t))$, 使得系统(1)能够镇定到状态$X_e$, 那么系统应该具有什么么的特征. 由定义3.1和引理2.1, 即存在一个控制器$u(t) = K_{\sigma(t)}(x(t))$, 使得系统(1)能够镇定到状态$x_e$.

我们定义集合$\chi_e = \{\delta_s^i \ltimes x_e \mid i \in [1:s]\}$, 如果存在一个控制$u \in \Delta_{2^m}$, 使得$\Pr\{z(t+1) \in \chi_e \mid z(t) \in \chi_e, u(t) = u\} = 1$, 那么$\chi_e$ 称为不变子集, 且不变子集χ_e的最大不变子集记作为$I_\omega(\chi_e)$. 我们可以通过判断$z(t), t \in \mathbb{N}$是否达到$I_\omega(\chi_e)$-稳定来判断系统(1)是否达到x_e-镇定. 我们很容易得到这个结论：如果存在一个切换依赖状态反馈控制器$u(t) = K_{\sigma(t)}(x(t))$, 使得$z(t), t \in \mathbb{N}$达到$I_\omega(\chi_e)$-镇定, 那么该切换依赖状态反馈控制器$u(t) = K_{\sigma(t)}(x(t))$, 使得系统(3)达到$x_e$-镇定.

下面, 对于辅助变量$z(t)$, 我们进行如下分类, 得到一系列集合$\{\Omega_k(I_\omega(\chi_e))\}$:

$$\begin{aligned}
\Omega_1(I_\omega(\chi_e)) =& \{a \in \Delta_N \mid \text{存在一个控制}u \text{ 使得} \\
& \Pr\{z(t+1) \in I_\omega(\chi_e) \mid z(t) = a, u(t) = u\} = 1\} \\
& \cdots \\
\Omega_{k+1}(I_\omega(\chi_e)) =& \{a \in \Delta_N \mid \text{ 存在一个控制}u \text{ 使得} \\
& \Pr\{z(t+1) = b \mid z(t) = a, u(t) = u\} > 0, \text{仅当} \\
& b \in \Omega_k(I_\omega(\chi_e))\}, k \in \mathbb{N}_+.
\end{aligned}$$

$\{\Omega_k(I_\omega(\chi_e))\}$, $k \in \mathbb{N}_+$是k步概率为一的到达目标状态集合$I_\omega(\chi_e)$的初始状态集合.

对于集合$\{\Omega_k(I_\omega(\chi_e))\}$, $k \in \mathbb{N}_+$, 我们具有如下性质：a)如果对任意的$z^* \in I_\omega(\chi_e)$，$z^* \in \Omega_1(I_\omega(\chi_e))$那么$\Omega_k(I_\omega(\chi_e)) \subseteq \Omega_{k+1}(I_\omega(\chi_e))$, $\forall k \geq 1$; b)如果$\Omega_1(I_\omega(\chi_e)) = I_\omega(\chi_e)$, 那么$\Omega_k(I_\omega(\chi_e)) = I_\omega(\chi_e)$, $\forall k \geq 1$; c)如果$\Omega_j(I_\omega(\chi_e)) \subseteq \Omega_{j+1}(I_\omega(\chi_e))$对于一些$j \geq 1$, 那么$\Omega_k(I_\omega(\chi_e)) \subseteq \Omega_j(I_\omega(\chi_e))$, $\forall k \geq j$.

这个引理很容易得到, 因此不再做详细的证明. 基于增广系统(6)和上述性质, 我们可得如下定理.

定理3.1. 当以下条件成立: 1) χ_e的最大不变子集不是空集, 即$I_\omega(\chi_e) \neq \varnothing$; 2)存在一个正整数$T \leq N - |I_\omega(\chi_e)|$, 使得$\Omega_T(I_\omega(\chi_e)) = \Delta_N$. 那么换依赖状态反馈控制器$u(t) = K_{\sigma(t)}(x(t))$, 使得系统(3)达到$x_e$-镇定.

证明：我们把集合Δ_N划分成
$\Delta_N = \Omega_1(I_\omega(\chi_e)) \cup \Omega_2(I_\omega(\chi_e))\backslash\Omega_1(I_\omega(\chi_e)) \cup \cdots \cup \Omega_T(I_\omega(\chi_e))\backslash\Omega_{T-1}(I_\omega(\chi_e))$. 因此对每一个$\delta_N^i \in \Delta_N$, 存在唯一一个$\Omega_{h_i}(I_\omega(\chi_e)$
$\backslash\Omega_{h_i-1}(I_\omega(\chi_e))$, 其中$\Omega_0(I_\omega(\chi_e)) = \varnothing$, 使得$\delta_N^i \in \Omega_{h_i}(I_\omega(\chi_e)\backslash\Omega_{h_i-1}(I_\omega(\chi_e))$. 如果$h_i = 1$, 存在一个控制$v_i \in \Delta_{2^m}$, 使得$\Pr\{x(t+1) \in I_\omega(\chi_e) \mid x(t) = \delta_N^i, u(t) = v_i\} = 1$; 当$2 \le h_i \le T$, 存在一个控制$v_i \in \Delta_{2^m}$, 使得$\Pr\{x(t+1) \in \Omega_{h_i-1}(I_\omega(\chi_e)) \mid x(t) = \delta_N^i, u(t) = v_i\} = 1$. 让矩阵$K = [v_1\, v_2 \cdots v_N]$.

由条件2), 可知$\Omega_T(I_\omega(\chi_e)) = \Delta_N$, 对每一个$h \ge 1$, 当$a \in \Omega_h(I_\omega(\chi_e))$ 和$t \ge h$, 我们有
$\sum\limits_{a_1,\cdots,a_{t-1}\in\Delta_N} \Pr\{z(1) = a_1 \mid z(0) = a, u(0) = Ka\} \times \Pr\{z(2) = a_2 \mid z(1) = a_1, u(1) = Ka_1\} \times \cdots \times \Pr\{z(t) \in I_\omega(\chi_e) \mid z(t-1) = a_{t-1}, u(t-1) = Ka_{t-1}\} = 1$. 我们用数学归纳法证明了这一结论. 设$a = \delta_N^i \in \Omega_1(I_\omega(\chi_e))$. 那么, 我们有$\Pr\{z(1) \in I_\omega(\chi_e) \mid z(0) = a, u(0) = Ka\} = \Pr\{z(1) \in I_\omega(\chi_e) \mid z(0) = \delta_N^i, u(0) = v_i\} = 1$, 并且

$$\begin{aligned}
&\sum_{a_1\in\Delta_N} \Pr\{z(1) = a_1 \mid z(0) = a, u(0) = Ka\} \\
&\times \Pr\{z(2) = a_2 \mid z(1) = a_1, u(1) = Ka_1\} \\
&= \Pr\{z(2) = a_2 \mid z(1) \in I_\omega(\chi_e), u(1) = Kz(1)\}
\end{aligned} \tag{7}$$

对于每一个$a_2 \in \Delta_N$. 由条件1), 我们有$I_\omega(\chi_e) \subseteq \Omega_1(I_\omega(\chi_e))$. 那么, 可得到如下式子:

$$\begin{aligned}
&\sum_{a_1\in\Delta_N} \Pr\{z(m+1) = b_1 \mid z(m) \in I_\omega(\chi_e), u(m) = Kz(m)\} \\
&\times \Pr\{z(m+2) = b_2 \mid z(m+1) = b_1, u(m+1) = Kb_1\} \\
&= \Pr\{z(m+2) = b_2 \mid z(m+1) \in I_\omega(\chi_e), u(m) = Kz(m+1)\}, \\
&b_2 \in \Delta_N, m = 1, 2, 3, \cdots
\end{aligned} \tag{8}$$

固定正整数t. 结合公式(7)和(8), 那么我们可以得到如下式子:

$$\begin{aligned}
&\sum_{a_1,\cdots,a_{t-1}\in\Delta_N} \Pr\{z(1) = a_1 \mid z(0) = a, u(0) = Ka\} \\
&\times \Pr\{z(2) = a_2 \mid z(1) = a_1, u(1) = Ka_1\} \times \cdots \\
&\times \Pr\{z(t) \in I_\omega(\chi_e) \mid z(t-1) = a_{t-1}, u(t-1) = Ka_{t-1}\} \\
&= \sum_{a_2,\cdots,a_{t-1}\in\Delta_N} \Pr\{z(2) = a_2 \mid z(1) \in I_\omega(\chi_e), u(1) = Kz(1)\} \\
&\times \Pr\{z(3) = a_3 \mid z(2) = a_2, u(2) = Ka_2\} \times \cdots \\
&\times \Pr\{z(t) \in I_\omega(\chi_e) \mid z(t-1) = a_{t-1}, u(t-1) = Ka_{t-1}\} = \cdots \\
&= \Pr\{z(t) \in I_\omega(\chi_e) \mid z(t-1) \in I_\omega(\chi_e), u(t-1) = Kz(t-1)\} = 1.
\end{aligned}$$

假设结论对于$h-1$的情况也成立, 其中$h \ge 2$. 固定$t \ge h$. 如果$a \in \Omega_{h-1}(I_\omega(\chi_e))$, 那么结论是显然

DOI: 10.12677/aam.2023.126268

的. 因此, 我们只需要证明这种情况$a = \delta_N^i \in \Omega_h(I_\omega(\chi_e)) \backslash \Omega_{h-1}(I_\omega(\chi_e))$. 那么, 我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{a_1,\cdots,a_{t-1}\in\Delta_N} \Pr\{z(1)=a_1 \mid z(0)=a, u(0)=Ka\} \\ &\times \Pr\{z(2)=a_2 \mid z(1)=a_1, u(1)=Ka_1\} \times \cdots \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\times \Pr\{z(t)\in I_\omega(\chi_e) \mid z(t-1)=a_{t-1}, u(t-1)=Ka_{t-1}\} \\ &= \sum_{a_1\in\Omega_{h-1}(I_\omega(\chi_e))} \Pr\{z(1)=a_1 \mid z(0)=\delta_N^i, u(0)=v_i\}\times \\ &\Bigg\{ \sum_{a_2,\cdots,a_{t-1}\in\Delta_N} \Pr\{z(2)=a_2 \mid z(1)\in I_\omega(\chi_e), u(1)=Kz(1)\} \\ &\times \Pr\{z(3)=a_3 \mid z(2)=a_2, u(2)=Ka_2\} \times \cdots \\ &\times \Pr\{z(t)\in I_\omega(\chi_e) \mid z(t-1)=a_{t-1}, u(t-1)=Ka_{t-1}\} \Bigg\}, \end{aligned}$$

因为$a_1 \in \Omega_{h-1}(I_\omega(\chi_e))$, 那么, 我们有 $\sum\limits_{a_1\in\Omega_{h-1}(I_\omega(\chi_e))} \Pr\{z(1)=a_1 \mid z(0)=\delta_N^i, u(0)=v_i\} = 1$. 根据数学归纳法, 当$a_1 \in \Omega_{h-1}(I_\omega(\chi_e))$, 式子(9)右侧大括号中的和等于1. 因此, 我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{a_1,\cdots,a_{t-1}\in\Delta_N} \Pr\{z(1)=a_1 \mid z(0)=a, u(0)=Ka\} \\ &\times \Pr\{z(2)=a_2 \mid z(1)=a_1, u(1)=Ka_1\} \times \cdots \\ &\times \Pr\{z(t)\in I_\omega(\chi_e) \mid z(t-1)=a_{t-1}, u(t-1)=Ka_{t-1}\} \\ &= \sum_{a_1\in\Omega_{h-1}(I_\omega(\chi_e))} \Pr\{z(1)=a_1 \mid z(0)=\Delta_N^i, u(0)=v_i\} = 1. \end{aligned}$$

因此, 存在一个切换依赖状态反馈器$u(t) = Kz(t)$使得辅助变量序列$z(t), t \in \mathbb{N}$是有限时间$I_\omega(\chi_e)$-镇定, 那么换依赖状态反馈控制器$u(t) = K_{\sigma(t)}(x(t))$, 使得系统(3)达到$x_e$-镇定 □

3.1. 结论

我们首次提出马尔可夫切换概率布尔控制网络类型, 并研究其状态反馈镇定问题; 我们利用矩阵半张量积的方法构造一个增广系统(6), 并得到切换依赖状态反馈控制器使得增广系统(6)镇定的充要条件, 然后得到切换依赖状态反馈控制器使得原系统(2)镇定的充分条件.

参考文献

[1] Davidich, M. and Bornholdt, S. (2008) The Transition from Differential Equations to Boolean Networks: A Case Study in Simplifying a Regulatory Network Model. *Journal of Theoretical Biology*, **255**, 269-277. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2008.07.020

[2] Meng, M., Xiao, G., Zhai, C. and Li, C. (2019) Controllability of Markovian Jump Boolean Control Networks. *Automatica*, **106**, 70-76. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.04.028

[3] Kauffman, S. (1969) Metabolic Stability and Epigenesis in Randomly Constructed Genetic Nets. *Journal of Theoretical Biology*, **22**, 437-467. https://doi.org/10.1016/0022-5193(69)90015-0

[4] Cheng, D., Qi, H. and Li, Z. (2011) Analysis and Control of Boolean Networks—A Semi-Tensor Product Approach. Springer, London.

[5] R05 Li, F. and Sun, J. (2011) Controllability of Probabilistic Boolean Control Networks. *Automatica*, **47**, 2765-2771. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.09.016

[6] Cheng, D., Li, C. and He, F. (2018) Observability of Boolean Networks via Set Controllability Approach. *Systems Control Letters*, **115**, 22-25. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.03.004

[7] Cheng, D., Qi, H., Li, Z. and Liu, J. (2011) Stability and Stabilization of Boolean Networks. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **21**, 134-156. https://doi.org/10.1002/rnc.1581

[8] Alberti, W., Anderson, G., Bartolucci, A., Bell, D. and Toni, V. (1995) Chemotherapy in Non-Small Cell Lung Cancer: A Meta-Analysis Using Updated Data on Individual Patients from 52 Randomised Clinical Trials. *BMJ*, **311**, 899-909. https://doi.org/10.1136/bmj.311.7010.899

[9] Li, F. and Sun, J. (2012) Stability and Stabilization of Boolean Networks with Impulsive Effects. *Systems and Control Letters*, **61**, 1-5. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.09.019

[10] Liu, Y., Wang, L., Lu, J. and Cao, J. (2019) Sampled-Data Stabilization of Probabilistic Boolean Control Networks. *Systems and Control Letters*, **124**, 106-111. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.12.012