Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(6), 2958-2964
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126298

模糊赋范线性空间的1-最佳逼近

张入化，蒋 浩

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2023年5月26日；录用日期：2023年6月21日；发布日期：2023年6月29日

摘 要

T. Bag和S. K. Samanta于2003年建立了模糊赋范线性空间，并研究了模糊范数导出的α-范数$\left(\alpha \in (0,1)\right)$性质，以及点列按照$\alpha$-范数收敛与按照模糊范数收敛的关系。本文给出了由模糊范数导出的1-范数的概念，研究了点列按1-范数收敛与按模糊范数收敛的关系。同时，研究了按1-范数引入的逼近问题，得到了按1-范数定义的存在性集与模糊闭集之间的关系。

关键词

模糊赋范线性空间，1-范数，1-最佳逼近，1-存在性集

1-Best Approximation of Fuzzy Normed Linear Space

Ruhua Zhang, Hao Jiang

School of Sciences, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: May 26th, 2023; accepted: Jun. 21st, 2023; published: Jun. 29th, 2023

Abstract

T. Bag and S. K. Samanta established the fuzzy norm linear space in 2003, studied the properties of α-norm derived by fuzzy norm, and discussed the relationship between sequence convergence in sense of α-norm and convergence in sense of fuzzy norm. In this paper, we give the concept of 1-norm derived from fuzzy norm and study the relationship between convergence of sequence in sense of 1-norm and convergence in sense of fuzzy norm. Meanwhile, the approximation problem introduced by 1-norm is discussed, and the relationship between the 1-existence set and the fuzzy closed set defined by 1-norm is obtained.

文章引用: 张入化, 蒋浩. 模糊赋范线性空间的 1-最佳逼近[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 2958-2964.
DOI: 10.12677/aam.2023.126298

Keywords

Fuzzy Normed Linear Space, 1-Norm, 1-Best Approximation, 1-Existence Set

1. 引言

2003 年，T. Bag 和 S. K. Samanta [1]建立了一种新的模糊赋范线性空间(以下讨论的模糊赋范线性空间均为此空间)，讨论了模糊范数导出的 α-范数 $(\alpha\in(0,1))$ 性质，以及点列依 α-范数收敛与依模糊范数收敛的关系。随后，很多学者研究了模糊赋范线性空间的拓扑性质、算子的有界性和连续性等[2] [3] [4] [5] [6]。2023 年，徐艳艳[7]等研究了模糊赋范线性空间中的逼近问题，给出了模糊赋范线性空间中宽度的概念，得到了标准有限维模糊赋范线性空间的宽度与经典有限维赋范线性空间宽度的关系。基于以上研究，本文给出了模糊范赋范线性空间中 1-范数的概念，研究了按照 1-范数定义的闭集与模糊闭集之间的关系，讨论了按照 1-范数定义的存在性集与模糊闭集之间的关系。

2. 1-范数

在本文中，如果没有特殊说明，R 用表示实数集。

定义 1.1 [1] (模糊范数的定义)设 X 是线性空间，θ 为其零元，N 为 $X\times R$ 上的模糊子集。如果对 $\forall x,y\in X$，$c\in R$，有

(N1) $\forall t\le 0$，有 $N(x,t)=0$；

(N2) $\forall t\in R$ 且 $t>0$，有 $N(x,t)=1$ 当且仅当 $x=\theta$；

(N3) $\forall t\in R$ 且 $t>0$，如果 $c\neq 0$，有 $N(cx,t)=N\left(x,\frac{t}{|c|}\right)$；

(N4) $\forall s,t\in R$，有

$$N(x+y,s+t)\ge\min\{N(x,s),N(y,t)\};$$

(N5) $N(x,\cdot)$ 为 R 上的不减函数且 $\lim\limits_{t\to+\infty}N(x,t)=1$。

则称 N 为 X 上的模糊范数，(X,N) 为模糊赋范线性空间。

注[2]：$N(x,t)$ 表示 x 的范数是实数 t 的真值。

T. Bag 和 S.K. Samanta [5]给出了模糊赋范线性空间的例子。

例 1.2 [1]设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间，$\forall x\in X$，$\forall t\in R$，定义：

$$N(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t}{t+\|x\|}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases},$$

则 (X,N) 是模糊赋范线性空间。称它为标准的模糊赋线性空间。

例 1.3 [1]设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间，$\forall x\in X$，$\forall t\in R$，定义：

$$N(x,t)=\begin{cases}0, & t\le\|x\|\\ 1, & t>\|x\|\end{cases},$$

则(X,N)是模糊赋范线性空间。

定义 1.4 [1]设(X,N)为模糊赋范线性空间，$\{x_n\}$是X中的点列。如果$\exists x\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty}N(x_n-x,t)=1,\ \forall t>0,$$

则称$\{x_n\}$模糊收敛且模糊收敛到x，记为$x_n\xrightarrow{N}x$。x称为$\{x_n\}$的模糊极限。

定义 1.5 设(X,N)为模糊赋范线性空间，A为X的子集。

1) A中所有模糊收敛点列的模糊极限所组成的集合称为A的模糊导集，记为A'。

2) 若$A'\subseteq A$，则称A为模糊闭集。

3) 称$A\cup A'$为A的模糊闭包，记为$\bar{A}$。

设(X,N)为模糊赋范线性空间，$\forall x\in X$，令

$$\|x\|_\alpha=\wedge\{t>0:N(x,t)\geq\alpha\}. \tag{1.1}$$

由文献[7]的例 1 知，$\|\bullet\|_\alpha$不一定是X上的范数。T. Bag 与 S.K. Samanta [2]给出了$\|\bullet\|_\alpha$为X上范数的一个充分而非必要条件。$\alpha\in(0,1)$

引理 1.6 [1]设(X,N)为模糊赋范线性空间，若模糊范数N满足以下条件：

(N6) $\forall t>0$，有$N(x,t)>0$，则$x=\theta$。

则由(1.1)式定义的$\|\bullet\|_\alpha\ (\alpha\in(0,1))$为$X$上的范数，且$\{\|\bullet\|_\alpha:\alpha\in(0,1)\}$为$X$上的单增范数簇。称$\|\bullet\|_\alpha$为由模糊范数$N$导出的$\alpha$-范数。

设(X,N)为模糊赋范线性空间。对$\forall x\in X$，令

$$\|x\|_1=\wedge\{t>0:N(x,t)\geq 1\}, \tag{1.2}$$

根据下面的例子可知，即使模糊赋范线性空间满足(N6)条件，(1.2)式定义的$\|\bullet\|_1$也不一定是X上的范数。

例 1.7 设$(X,\|\bullet\|)$为赋范线性空间，对$x\in X$，令$N:X\times R\to[0,1]$，

当$x=\theta$时，

$$N(x,t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases},$$

当$x\neq\theta$时，

$$N(x,t)=\begin{cases}0 & t\leq 2\|x\|\\ 1-\dfrac{1}{n} & n\|x\|<t\leq(n+1)\|x\|,n\geq 2\end{cases},$$

则(X,N)为模糊赋范线性空间，N为X上的模糊范数且模糊范数满足(N6)条件。

证：(N1) 显然，$\forall x\in X,\forall t\leq 0$，有$N(x,t)=0$。

(N2) 显然，$\forall t>0$，$N(x,t)=1\Leftrightarrow x=\theta$。

(N3) $\forall t>0,c\neq 0$，$x\in X$，

当$x=\theta$时，$N(c\theta,t)=1=N\left(\theta,\dfrac{t}{|c|}\right)$。

当$x\in X(\neq\theta)$时，

$$N(cx,t)=0\Leftrightarrow t\leq 2\|cx\|\Leftrightarrow\frac{t}{|c|}\leq 2\|x\|\Leftrightarrow N\left(x,\frac{t}{|c|}\right)=0,$$

$$N(cx,t)=1-\frac{1}{n}\Leftrightarrow n\|cx\|<t\le(n+1)\|cx\|\Leftrightarrow n\|x\|<\frac{t}{|c|}\le(n+1)\|x\|\Leftrightarrow N\left(x,\frac{t}{|c|}\right)=1-\frac{1}{n}.$$

因此，$\forall t>0,c\neq 0$，$\forall x\in X$，有 $N(cx,t)=1=N\left(x,\frac{t}{|c|}\right)$。

(N4) $\forall t,s\in R$，$\forall x,u\in X$，

若 $N(x+u,s+t)=1$，显然有 $N(x+u,t+s)\ge\min\{N(x,t),N(u,s)\}$。

若 $N(x+u,s+t)=0$，则 $t+s\le 2\|x+u\|\le 2\|x\|+2\|u\|$。不妨令 $2\|u\|<s$，那么 $2\|x\|\ge t$，则 $N(x,t)=0$。因此，当 $N(x+u,s+t)=0$ 时，总有 $N(x,t)=0$ 或 $N(u,s)=0$。

故而，$N(x+u,t+s)\ge\min\{N(x,t),N(u,s)\}$。

若 $N(x+u,s+t)=1-\frac{1}{n}$，则 $n\|x+u\|<t+s\le(n+1)\|x+u\|\le(n+1)\|x\|+(n+1)\|u\|$，不妨令 $(n+1)\|u\|<s$，那么 $(n+1)\|x\|\ge t$，则 $N(x,t)\le 1-\frac{1}{n}$。因此，当 $N(x+u,s+t)=1-\frac{1}{n}$ 时，总有 $N(x,t)\le 1-\frac{1}{n}$ 或 $N(u,s)\le 1-\frac{1}{n}$。

故而，$N(x+u,t+s)\ge\min\{N(x,t),N(u,s)\}$。

(N5) 由定义知，$N(x,\cdot)$ 为 R 上的不减函数且 $\lim_{n\to\infty}N(x,t)=1$。

(N6) 显然满足。

例 1.7 中，当 $x\neq\theta$ 时，$\{t>0:N(x,t)\ge 1\}=\phi$，则 $\|x\|_1=\wedge\{t>0:N(x,t)\ge 1\}$ 不存在。因此，在模糊赋范线性空间中即便模糊范数满足(N6)条件，但由(1.2)式所定义的 $\|\bullet\|_1$ 也可能是不存在的。下面定理，给出 $\|\bullet\|_1$ 为范数的一个充分条件。

定理 1.8 设 (X,N) 为模糊赋范线性空间，且模糊范数 N 满足条件：

(N6-1) $\forall x\in X$，存在 $t_x>0$，使得 $N(x,t_x)=1$。

$\forall x\in X$，令

$$\|x\|_1=\wedge\{t>0:((x,t)\ge 1\},\tag{1.2}$$

则 $\|\bullet\|_1$ 为 X 上的范数。称 $\|\bullet\|_1$ 为由模糊范数 N 导出的 1-范数。

证明：$\forall x\in X$，$\{t>0:N(x,t)\ge 1\}\neq\phi$，从而 $\|x\|_1$ 有意义且 $\|x\|_1\ge 0$。下面验证 $\|\bullet\|_1$ 满足范数的三公理。

1) 正定性：

$\forall x\in X$，若 $\|x\|_1=0$，则由 $\|x\|_1$ 的定义知，

$N(x,t)=1,\ \forall t>0.$

从而由(N2)知，$x=\theta$。

若 $x=\theta$，则由(N2)知，

$N(x,t)=1,\ \forall t>0.$

故，$\|x\|_1=0$。

2) 齐次性：

$\forall x\in X$，$\forall c\in R$，

当 $c\neq 0$ 时，

$$\|cx\|_1=\wedge\{t>0:N(cx,t)=1\}=\wedge\left\{t>0:N\left(x,\frac{t}{|c|}\right)=1\right\}=\wedge\left\{t>0:N\left(x,\frac{t}{|c|}\right)=1\right\}$$
$$=\wedge\{|c|t>0:N(x,t)=1\}=|c|\wedge\{t>0:N(x,t)=1\}=|c|\|x\|_1.$$

当 $c=0$ 时，

$$\|0x\|_1=\|\theta\|_1=0=0\|x\|_1=0\|x\|_1.$$

3) 三角不等式：

$\forall x,y\in X$，

$$\begin{aligned}\|x\|_1+\|y\|_1&=\wedge\{t>0:N(x,t)=1\}+\wedge\{s>0:N(y,s)=1\}\\&=\wedge\{t+s>0:N(x,t)=1,N(y,s)=1\}\\&\overset{\text{由(N4)}}{\geq}\wedge\{t+s>0:N(x+y,t+s)=1\}\\&=\wedge\{t>0:N(x+y,t)=1\}=\|x+y\|_1.\end{aligned}$$

综上所述，1-范数是 X 上的范数。

定义 1.9 设 (X,N) 为模糊赋范线性空间且满足条件(N6-1)，$\{x_n\}$ 是 X 中的点列。如果 $\exists x\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_1=0.$$

则称 $\{x_n\}$ 依 1-范收敛且依 1-范收敛到 x，记为 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_1}x$，$x$ 称为 $\{x_n\}$ 的 1-极限。

定义 1.10 设 (X,N) 为模糊赋范线性空间，A 是 X 的子集。

1) A 中所有依 1-范收敛点列的 1-极限所构成的集合称为 A 的 1-导集，记为 A_1'。

2) 若 $A_1'\subseteq A$，则称 A 为 1-闭集。

3) 称 $A\cup A_1'$ 为 A 的 1-闭包，记为 $\overline{A_1}$

在模糊赋范线性空间 (X,N) 中，为了讨论 1-闭集与模糊闭集的联系，我们引入(N7)条件。

(N7)：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)$，$\forall x\in X$，$\alpha\in(1-\delta,1)$，有 $\left|\|x\|_\alpha-\|x\|_1\right|<\varepsilon$。

定理 1.11 设模糊赋范线性空间 (X,N) 满足条件(N6-1)和(N7)，$\{x_n\}$ 是 X 中的点列。则 $x_n\xrightarrow{N}x_0\Rightarrow x_n\xrightarrow{\|x\|_1}x_0$。

证：$\forall\varepsilon>0$，由(N7)知，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)$，对 $\forall x\in X$，$\alpha\in(1-\delta,1)$，有

$$\left|\|x\|_\alpha-\|x\|_1\right|<\varepsilon. \tag{1.3}$$

取 $\alpha_0\in(1-\delta,1)$，由 $x_n\xrightarrow{N}x_0$ 知，$\lim\limits_{n\to\infty}N(x_n-x_0,\varepsilon)=1$。

从而，$\exists n_0=n_0(\alpha_0,\varepsilon)$，$\forall n\geq n_0$，有

$$N(x_n-x_0,\varepsilon)>\alpha_0.$$

再由 $\|\bullet\|_\alpha$ 的定义知，$\forall n\geq n_0$，有

$$\|x_n-x_0\|_\alpha<\varepsilon.$$

由(1.3)知，$\forall n\geq n_0$，有

$$\|x_n-x_0\|_1<\varepsilon+\|x_n-x_0\|_\alpha<2\varepsilon.$$

即，$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_1}x_0$。

由 1-闭集、模糊闭集的定义及定理 1.11，易见下定理成立，这也是本文的主要结果之一。

定理 1.12 设模糊赋范线性空间 (X,N) 满足条件 N(6-1)和(N7)，则 1-闭集一定是模糊闭集。

证：设集合 A 是 (X,N) 的任意模糊 1-闭集，即 $\overline{A_1}=A$，则对 $\forall\{u_n\}\subset A$，若 $u_n\xrightarrow{\|\cdot\|_1}u$ 则 $u\in A$。

在模糊赋范线性空间中，若 $x\in A'$，则 $\exists\{x_n\}\subset A$。

$$x_n \xrightarrow{N} x$$

由定理 1.11 知

$$x_n \xrightarrow{N} x_0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{\|x\|_1} x_0$$

所以，

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$$

因此 $x \in A$。由 x 的任意性知 $A' \subset A$，所以 A 是模糊闭集。

3. 模糊赋范线性空间的 1-最佳逼近

本章，我们在模糊赋范线性空间 (X,N) 中，给出了 1-最佳逼近的概念并讨论其相关性质。

定义 2.1 设模糊赋范线性空间 (X,N) 满足条件(N6-1)，F 是 X 的非空子集。$x \in X$，令

$$e(x,F) = \underset{u \in F}{\wedge} \|x-u\|_1 \tag{2.1}$$

称 $e(x,F)$ 为集 F 对定元 x 的 1-最佳逼近。其中 $\|\bullet\|_1$ 的定义见(1.2)式。

定义 2.2 设模糊赋范线性空间 (X,N) 满足条件(N6-1)，F 是 X 的非空子集，$x \in X$。若 $\exists y_0 \in F$，使得 $e(x,F) = \|x-y_0\|_1$，则称 y_0 为 x 在 F 内的 1-最佳逼近元，同时称 x 在 F 内 1-最佳逼近元的全体所构成的集合为 1-最佳逼近元集，记作 $e_F(x)$。

定义 2.3 设模糊赋范线性空间 (X,N) 满足条件(N6-1)，F 是 X 的非空子集，$x \in X$。若对每一 $x \in X$ 都有 $e_F(x) \neq \phi$，则称 F 是 X 内的 1-存在性集。

定理 2.4 设模糊赋范线性空间 (X,N) 满足条件(N6-1)和(N7)，那么 1-存在性集是模糊闭集。

证：设集合 F 是 1-存在性集，

$\forall x_0 \in F'$，那么 $\exists \{x_n\} \in F, x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x_0$

所以，$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in N^+$，当 $n > n_0$ 时，$\|x_n - x_0\|_1 < \varepsilon$

$$\Rightarrow e(x_0,F) = \underset{y \in F}{\wedge} \|x_0 - y\|_1 < \|x_n - x_0\|_1 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow e(x_0,F) = \underset{y \in F}{\wedge} \|x_0 - y\|_1 = 0$$

那么，$\exists y_0 \in F$，使得 $\|x_0 - y_0\|_1 = 0$，

由定理 1.8 知，$y_0 = x_0 \in F$，因此 1-存在性集是 1-闭集，由定理 1.12 知 1-闭集是模糊闭集，所以 1-存在性集是模糊闭集。

定义 2.5 [1]设 (X,N) 是模糊赋范线性空间，A 是 X 的子集，如果 $\exists t > 0$，$0 < r < 1$，$\forall x \in A$ 都有 $N(x,t) > 1-r$，则称 A 为模糊有界集。

定义 2.6 在模糊赋范线性空间中 (X,N)，F 是 X 的子集。如果 F 的任意点列必有模糊收敛子列，称 F 是模糊列紧集。如果 F 中任意模糊有界点列必有模糊收敛子列，称 F 是模糊局部列紧集。

定理 2.7 设 (X,N) 是模糊赋范线性空间，模糊范数 N 满足条件(N6-1) (N7)，F 是 X 内模糊局部列紧的模糊闭集，则 F 是 X 内的 1-存在性集。

证：显然只需证明，如果 $\forall x \in X$ 且 $x \notin A$，有 $e_F(x) \neq \phi$。

由下确界的定义知，$\forall n \in N^*$，有 $u_n \in A$ 使得

$$e(x,F) \le \|x - u_n\|_1 < e(x,F) + n^{-1}.$$

易见 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - u_n\|_1 = e(x,A)$。

$\forall n \in N^*$，有

$$\|u_n\|_1 \le \|x-u_n\|_1 + \|x\|_1 \le \|x\|_1 + e(x,A) + 1.$$

故而，$\{u_n\}$ 依 $\|\bullet\|_1$ 有界。

令 $\|x\|_1 + e(x,A) + 1 = M - 1$，则 $\|u_n\|_1 < M$。下证 $\{u_n\}$ 模糊有界。

$\forall n \in N^*$，由 $\|u_n\|_1$ 的定义及 $\|u_n\|_1 < M$ 知，$N(u_n, M) \ge 1$。令 $r = \dfrac{1}{2}$，则

$$N(u_n, M) \ge 1 > 1 - r.$$

故 $\{u_n\}$ 模糊有界。由模糊局部列紧性知，$\{u_n\}$ 存在一模糊收敛子列 $\{u_{n_j}\}$，设 $u_{n_j} \xrightarrow{N} u_0$。由于 A 为模糊闭集，所以 $u_0 \in A$。再由定理 1.11 知，$u_{n_j} \xrightarrow{\|\bullet\|_1} u_0$。

因此，

$$e(x,F) \le \|x-u_0\|_1 = \lim_{j\to\infty} \left\|x-u_{n_j}\right\|_1 = e(x,F).$$

即，$e(X,A) = \|x-u_0\|_1$，即 $u_0 \in e_F(x)$ 即证。

4. 总结

本文基于 T. Bag 和 S.K. Samanta 于 2003 年建立的模糊赋范线性空间，给出了 1-最佳逼近的概念，研究了模糊赋范线性空间的逼近特征。得到了 1-存在性集是模糊闭集以及局部列紧的模糊闭集是 1-存在性集的结论，对本文主要研究内容做出回答。下一步，我们将讨论将模糊赋范线性空间 (X,N) 的逼近问题转化成经典赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 的逼近问题的可行性。

致　谢

在此，我们由衷地向编辑和评审表示感谢，你们的宝贵意见帮助我们更好地完成了这篇论文。

参考文献

[1] Bag, T. and Samanta, S.K. (2003) Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **11**, 687-705.

[2] Bag, T. and Samanta, S.K. (2005) Fuzzy Bounded Linear Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **151**, 513-547. https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.05.004

[3] Sadeqi, I. and Kia, F.S. (2009) Fuzzy Normed Linear Space and Its Topological Structure. *Chaos, Solitons & Fractals*, **40**, 2576-2589. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.10.051

[4] Sadeqi, I. and Kia, F.S. (2009) Some Fixed Point Theorems in Fuzzy Reflexive Banach Spaces. *Chaos, Solitons & Fractals*, **41**, 2606-2612. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.050

[5] Ji, P., Qi, W.Q. and Wei, R.H. (2014) Completeness of Fuzzy Normed Linear Space of All Weakly Fuzzy Bounded Linear Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **251**, 94-100. https://doi.org/10.1016/j.fss.2013.11.003

[6] Nădăban S. (2015) Fuzzy Continuous Mappings in Fuzzy Normed Linear Spaces. *Special Issue on Fuzzy Sets and Applications*, **10**, 834-842. https://doi.org/10.15837/ijccc.2015.6.2074

[7] Xu, Y.Y., Sun, L., Li, H. and Chen, G.G. (2023) The Fuzzy Width Theory in the Finite-Dimensional Space and Sobolev Space. *Mathematics*, **11**, Article 2331. https://doi.org/10.3390/math11102331