

基于多目标优化模型的无人机纯方位无源定位问题研究

郝 蕾*, 崔译丹

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年6月21日; 录用日期: 2023年7月16日; 发布日期: 2023年7月25日

摘 要

本文主要研究了无人机遂行编队飞行中的纯方位无源定位问题。根据多目标优化模型, 利用三角测位算法、贪婪算法、动态规划模型等, 对被动接收信号无人机的定位位置信息进行估计, 实现了对无人机遂行编队飞行位置的调整。针对问题一的(1)问, 考虑无人机对自身的高度的感知, 仅在二维空间考虑问题, 建立极坐标系。根据被动接收信号的无人机与发射信号无人机之间的角度关系分成四种情况进行分类讨论, 运用正弦定理、三角形的性质等几何知识找到无人机间的角度与距离的关系, 求解出不同无人机对应的距离与角度, 从而建立被动接收信号无人机的定位模型。针对问题一的(2)问, 考虑发射信号无人机编号未知, 无法直接用三角定位法求解, 所以假设还需要两架无人机发射信号, 将四架发射信号无人机根据双站交叉定位算法进行排列组合, 利用三角测量定位法及正弦定理、三角形的性质等几何知识联立方程组, 求解方程组得到唯一坐标解, 从而证明假设成立, 即除FY00和FY01之外, 还有两架无人机发射信号。针对问题一的(3)问, 考虑除FY00和FY01外其余无人机位置均略有偏差, 利用贪婪算法并建立多目标规划模型, 选择发射信号的无人机, 使得每一架被动接收信号无人机位置偏差最小, 进而总体圆形编队与规定圆周间的偏差达到最优解, 从而得到调整方案。针对问题二, 考虑到无人机不一定处于同一高度, 所以在三维空间中建立直角坐标系。为避免误差较大, 选取相邻三个无人机作为发射信号的无人机, 采用动态规划及多目标优化模型依次找到无人机的最佳方位, 从而得到调整方案。本文的特色在于将三角测量定位法、动态规划与多目标规划模型相结合, 运用贪婪算法通过局部最优解来推导全局最优解, 在保证求解精度的同时, 极大减少了运算的时间和复杂程度, 为日后无人机遂行编队飞行中的纯方位无源定位问题和定位调整问题提供了参考依据。

关键词

纯方位无源定位, 三角测位法, 贪婪算法, 动态规划模型, 多目标优化模型

*通讯作者。

Research on Bearing-Only Passive Location of Unmanned Aerial Vehicle Based on Multi-Objective Optimization Model

Lei Hao*, Yidan Cui

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jun. 21st, 2023; accepted: Jul. 16th, 2023; published: Jul. 25th, 2023

Abstract

In this paper, the problem of bearings-only passive location in formation flying of unmanned aerial vehicles is mainly studied. According to the multi-objective optimization model, the positioning position information of unmanned aerial vehicles (UAVs) receiving passive signals is estimated by using triangle positioning algorithm, greedy algorithm and dynamic programming model, and the flying position of UAV tunneling formation is adjusted. For the first question (1), the UAV's perception of its own height is considered, and the problem is only considered in two-dimensional space, and the polar coordinate system is established. According to the angle relationship between unmanned aerial vehicles receiving signals passively and unmanned aerial vehicles transmitting signals, it is classified and discussed in four situations. The relationship between angles and distances between unmanned aerial vehicles is found by using geometric knowledge such as sine theorem and triangle properties, and the corresponding distances and angles of different unmanned aerial vehicles are solved, thus establishing the positioning model of unmanned aerial vehicles receiving signals passively. In response to question (2) of the first question, considering that the number of unmanned aerial vehicles (UAVs) transmitting signals is unknown, it can't be directly solved by triangulation, so it is assumed that two UAVs are needed to transmit signals. Four UAVs transmitting signals are arranged and combined according to the bistatic cross positioning algorithm, and the equations are simultaneously solved by using triangulation positioning method, sine theorem, triangle properties and other geometric knowledge, and the unique coordinate solution is obtained, thus proving that the hypothesis is established, that is, besides FY00 and FY01, there are two UAVs transmitting signals. In order to solve the question (3) of the first question, considering that the positions of other UAVs are slightly deviated except FY00 and FY01, the greedy algorithm is used to establish a multi-objective programming model, and the UAVs that transmit signals are selected to minimize the position deviation of each UAV that passively receives signals, and then the deviation between the overall circular formation and the specified circumference reaches the optimal solution, so as to obtain the adjustment scheme. Aiming at the second problem, considering that drones are not necessarily at the same height, a rectangular coordinate system is established in three-dimensional space. In order to avoid large error, three adjacent UAVs are selected as the UAVs transmitting signals, and the optimal orientation of UAVs is found in turn by using dynamic programming and multi-objective optimization model, so as to get the adjustment scheme. The characteristic of this paper is to combine triangulation positioning method, dynamic programming and multi-objective programming model, and use greedy algorithm to derive the global optimal solution through local optimal solution, which greatly reduces the time and complexity of operation while ensuring the accuracy of solution, and provides a reference for bearings-only passive positioning and positioning adjustment in future UAV formation flying.

Keywords

Bearing-Only Passive Location, Triangular Positioning Method, Greedy Algorithm, Dynamic Programming Model, Multi-Objective Optimization Model

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题重述

1.1. 问题背景

随着信息化社会的迅速发展, 无人机已成为智能科技的研究焦点。因为无人机负责的任务需求越来越复杂, 单个无人机完成复杂任务时无法保证成功率和避险率, 而无人机编队具有极强的协作性和精确性, 使任务完成率大大提高。在无人机遂行编队飞行时, 无人机向外发射电磁波信号会受到外界干扰, 所以我们将研究方向转为以纯方位无源定位的方法来调整无人机的位置, 实现定位准确, 使其具有极强的抗干扰性和隐蔽性, 在实际军事作战过程中发挥着重大作用。所以无人机遂行编队飞行中的纯方位无源定位问题具有极高的研究价值, 对于军事和民事领域的发展会有杰出贡献。

1.2. 问题要求

现需背景知识和数据, 解决下面几个问题:

问题一第一部分: 现有一架编号已知的无人机位于圆心, 九架均匀分布圆周上的无人机编队, 当圆心的一架无人机和圆周上 2 架编号已知、位置无偏差的无人机作为发射信号源, 试建立圆周上其余接收信号无人机的定位模型;

问题一第二部分: 当位于圆心的无人机和已知编号的另一架无人机以及若干未知编号的无人机发射信号, 接收信号的无人机略有偏差, 让团队确定发射信号且编号未知的无人机的数量;

问题一第三部分: 无人机分布要求同(1), 此时圆周半径为 100 m。各无人机初始位置如图 1 所示, 若每次只允许圆心的无人机 FY00 和圆周上最多 3 架无人机发射信号, 那么根据接收的方位角信息, 给出无人机的位置调整方案。

问题二: 无人机集群为锥形编队且直线上相邻两架无人机间距相同时, 设计无人机纯方位无源定位的位置调整方案。

2. 问题分析

2.1. 问题一的分析

第(1)问: 已知圆心上的一架无人机和圆周上两架已知编号、均匀分布、位置无偏差的无人机发射信号, 由于 FY00 与 FY01 的相对位置保持不变, 故可由此建立极坐标系, 根据接收信号的无人机和另一架发射信号的无人机相对位置分情况讨论得到定位模型。建立以 FY00 为极点, FY01 为极坐标轴的极坐标, 假设 FY01 和 FY0k 也发射信号, FY0i 接收信号, 则通过它们之间的角度关系分成四种情况讨论: ① FY0i 在 FY01 与 FY0k 之间; ② FY0i 在 FY01 与 FY0k 之外且 FY0i 在上半圆周的左侧; ③ FY0i 在 FY01 与 FY0k 之外且 FY0i 在下半圆周的左侧; ④ FY0i 在 FY01 与 FY0k 之外且 FY0i 在下半圆周的右侧。然后

通过正弦定理和三角形的性质等几何知识联立方程组, 解出 $FY00FY0k$ 的长度及相关角度, 最终得以建立被动接收信号无人机的定位模型。

第(2)问: 采用假设法和双站交叉定位算法, 运用几何知识列出方程组求解方程组的解验证假设的合理性。由于(1)问发射信号的无人机编号已知而(2)问发射信号的无人机编号未知, 所以发射信号的无人机数量不一定为 3 架。又因为会有两架不同的无人机接收到相同的角度信息, 所以假设还有两架无人机发射信号, 记为 $FY0k_1$ 、 $FY0k_2$ 。由题中所给条件假设还有两架无人机发射信号, 将这四架发射信号的无人机根据双站交叉定位算法进行排列组合, 分别为: $FY00$ 、 $FY0k_1$ 、 $FY0k_2$; $FY00$ 、 $FY01$ 、 $FY0k_1$; $FY00$ 、 $FY01$ 、 $FY0k_2$; $FY01$ 、 $FY0k_1$ 、 $FY0k_2$ 。运用三角测量定位的性质及正弦定理、三角形的性质等几何知识列方程组, 求解方程组得出有唯一解, 从而证明假设成立, 即除 $FY00$ 和 $FY01$ 之外, 还有两架无人机发射信号。

第(3)问: 由于需要借助无人机接收到的有限的信息同时优化无人机的极径和极角, 该优化方法不易找到, 我们采取建立多目标优化模型, 运用贪婪算法通过局部最优解来推导全局最优解, 在保证求解精度的前提下, 极大减少了运算的时间和复杂程度。由题中表 1 可知, 除 $FY00$ 和 $FY01$ 外, 其余无人机位置均与规定位置略有偏差, 所以不管从剩下的无人机中选择哪两架发射信号, 被动接收信号无人机定位时一定会存在偏差。所以我们使用贪婪算法求解具体的调整方案。即利用贪婪算法选择发射信号的无人机, 使得每一架被动接收信号无人机定位时的偏差趋于 0, 进而总体圆形编队与规定圆周间的偏差达到最优解, 期间运用三角测位原理, 以 $FY00$ 、 $FY01$ 和 $FY0i$ 作为发射信号的无人机对其余七架无人机进行定位, 从而得到调整方案。

2.2. 问题二的分析

同问题一(3)问, 无人机的位置是在动态变化的, 下一个无人机位置是基于前三个求出的位置进行调整的, 因此想要找到最优方位我们需要建立动态规划模型。此问题中无人机不再对对自身高度感知的条件, 锥形编队中的无人机不一定维持在同一高度上, 故建立三维直角坐标系: 以 $FY13$ 为原点, 以 $FY13$ 为端点经过 $FY01$ 作射线为 x 轴, 以 $FY13$ 为端点经过 $FY11$ 作射线为 y 轴, 以 $FY13$ 为端点垂直纸面向外为 z 轴。因为无人机角度、距离、高度均有偏差, 所以我们尽量选取相邻的三个作为发射信号的无人机, 否则方位调整时的误差会增大。将建模过程分为四个阶段来得到调整方案。

3. 模型假设

- 1) 假设无人机的大小形状忽略不计, 可以将无人机看作质点。
- 2) 假设无人机接收方位角信息没有时间差。

假设无人机不受外界干扰。

4. 符号说明

符号	说明	单位
$FY0k$	发射信号且编号已知的无人机	/
$FY0i$	接收 $FY00$, $FY01$, $FY0k$ 信号的无人机	/
$FY0k_1$	发射信号且编号未知的无人机	/
$FY0k_2$	发射信号且编号未知的无人机	/
s	接收 $FY00$ 、 $FY01$, 和其余两个未知信号的无人机	/
R	九架无人机形成圆形编队的半径	m

5. 模型的建立与求解

5.1. 圆形编队无人机有编号时被动接收无人机定位模型的建立与求解

假设位于圆心的无人机(FY00)和编队中另 2 架无人机发射信号, 其余位置略有偏差的无人机被动接收信号, 发射信号的无人机位置无偏差且编号已知。由于三架发射信号的无人机位置无偏差且编号已知, 根据被动接收信号的无人机与发射信号无人机之间的角度关系分成四种情况进行分类讨论, 运用正弦定理、三角形定理等几何知识找到它们之间的角度关系, 联立方程组解出相关数据, 从而建立被动接收信号无人机的定位模型。

假设圆周的半径为 R , 以无人机 FY00 为极点, 以 FY00 为端点经过 FY01 作射线为极轴建立极坐标系。由于发射信号的无人机位置无偏差且圆具有对称性, 设发射信号的无人机为 FY00、FY01 和 FY0k (k 取正整数且 $1 < k \leq 5$), 其对应坐标为 $(0, 0)$, $(0, R)$ 和 $\left(R, \frac{2}{9}\pi(k-1)\right)$ 。

除发射信号的无人机外其余无人机位置均略有偏差, 那么想要确定无人机位置, 就要求出被动接收信号无人机的坐标, 这里设为 (d, θ) 。接着, 我们假设被动接收信号无人机与三架发射信号无人机的夹角。 α_1 为 FY00 与 FY01 之间的夹角, α_2 为 FY00 与 FY0k 之间的夹角, α_3 为 FY01 与 FY0k 之间的夹角。

下面进行分类讨论:

1) 当无人机 FY0i 在 FY01 和 FY0k 之间时, 过 FY01 作 FY00FY0i 线段的垂线, 垂足为 M, 如图 1 所示。

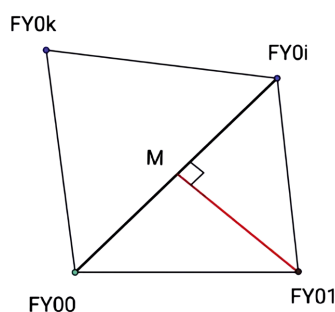


Figure 1. The receiving drone is between FY01 and FY0k
图 1. 接收信号无人机在 FY01 和 FY0k 之间

我们得到三架无人机与 M 点之间的距离为 $FY00M = R\cos\theta$, $FY01M = R\sin\theta$, $FY0iM = \frac{R\sin\theta}{\tan\alpha_1}$ 。

根据几何关系, 可以解得被动接收信号无人机坐标的第一分量

$$d = FY0iFY00 = \frac{R\sin\theta}{\tan\alpha_1} + R\sin\theta \quad (1)$$

由于发射信号无人机(FY00 和 FY0k)与被动接收信号无人机(FY0i)的夹角 $\angle FY0kFY00FY0i = \frac{2}{9}\pi(k-1) - \theta$ 。

所以由角度关系可得 $\angle FY00FY0kFY0i = \left(\frac{11}{9} - \frac{2}{9}k\right)\pi + \theta - \alpha_2$ 。

在三角形 FY00FY0kFY0i 中, 根据正弦定理, 有 $\frac{\sin\left(\left(\frac{11}{9} - \frac{2}{9}k\right)\pi + \theta - \alpha_2\right)}{\frac{R\sin\theta}{\tan\alpha_1} + R\sin\theta} = \frac{\sin\alpha_2}{R}$ 。

$$\text{解出 } \theta, \theta = \arctan \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \left[\alpha_2 - \frac{2}{9} \pi (k-1) \right]}{\sin \alpha_1 \cos \left[\alpha_2 - \frac{2}{9} \pi (k-1) \right] - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right)。$$

将 θ 带入(1)式化简得 $d = \frac{R \sin(\theta + \alpha_1)}{\sin \alpha_1}$, 进而得到被动接收信号无人机的坐标。

2) 当 $FY0i$ 不在 $FY01$ 和 $FY0k$ 之间, 且同时 $FY0i$ 在上半圆周时, 过 $FY0k$ 作 $FY00FY0i$ 线段的垂线, 垂足为 M , 如图 2 所示。

可以得到三架无人机与 M 点之间的距离为 $FY00M = R \cos \left(\theta - \frac{2}{9} \pi (k-1) \right)$, $FY0kM = R \sin \left(\theta - \frac{2}{9} \pi (k-1) \right)$, $FY0iM = \frac{R \sin \left(\theta - \frac{2}{9} \pi (k-1) \right)}{\tan \alpha_3}$ 。

可以解得被动接收信号无人机坐标的第一分量

$$d = FY0iFY00 = \frac{R \sin \left(\theta - \frac{2}{9} \pi (k-1) \right)}{\tan \alpha_3} + R \cos \left(\theta - \frac{2}{9} \pi (k-1) \right) \quad (2)$$

发射信号无人机($FY00$ 和 $FY0k$)与被动接收信号无人机($FY0i$)的夹角 $\angle FY0iFY0kFY00 = \pi - \alpha_3 + \frac{2}{9} \pi (k-1) - \theta = \left(\frac{7}{9} + \frac{2}{9} k \right) \pi - \theta - \alpha_3$ 。

在三角形 $FY00FY0kFY0i$ 中, 根据正弦定理, 有

$$\frac{\sin \left(\left(\frac{7}{9} + \frac{2}{9} k \right) \pi - \theta - \alpha_3 \right)}{\frac{R \sin \left(\theta - \frac{2}{9} \pi (k-1) \right)}{\tan \alpha_3} + R \cos \left(\theta - \frac{2}{9} \pi (k-1) \right)} = \frac{\sin \alpha_3}{R}$$

$$\text{解出 } \theta, \theta = \arctan \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \left[\alpha_2 - \frac{2}{9} \pi (k-1) \right]}{\sin \alpha_1 \cos \left[\alpha_2 - \frac{2}{9} \pi (k-1) \right] - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right)。$$

将 θ 带入(2)式化简得 $d = \frac{R \sin(\theta + \alpha_1)}{\sin \alpha_1}$, 进而得到被动接收信号无人机的坐标。

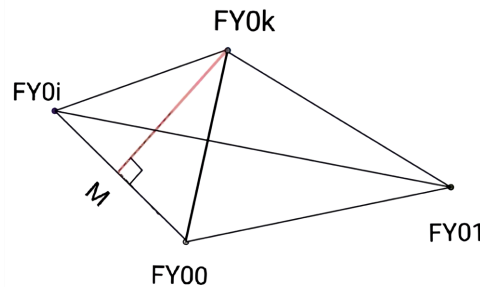


Figure 2. Pick up the drone on the top half of the circle
图 2. 接收信号无人机在上半圆周

3) 当接收信号的无人机 FY0i 在下半圆周时, 分两种情况讨论:

(i) FY0i 在下半圆周的左侧, 过 M 作 $OM \perp FY0i FY01$, 如图 3 所示。

发射信号无人机(FY00、FY01 和 FY0k)与被动接收信号无人机(FY0i)的夹角分别为:

$$FY00 FY0k = FY00 FY01 = R \quad \angle FY01 FY00 FY0k = \frac{2}{9}\pi(k-1)$$

$$\angle FY0k FY00 FY0i = \theta - \frac{2}{9}\pi(k-1) \quad \angle FY0k FY00 FY0i = 2\pi - \theta$$

$$\angle FY00 FY01 FY0i = \theta - \pi - \alpha_1 \quad \angle FY0i FY0k FY00 = \frac{2}{9}\pi\left(\frac{7}{2} + k\right) - \alpha_2 - \theta$$

由上述角度关系得

$$FY00 M = R \sin(\theta - \pi - \alpha_1) \quad FY00 FY0i = \frac{R \sin(\theta - \pi - \alpha_1)}{\sin \alpha_1} \tag{3}$$

在三角形 FY00 FY0k FY0i 中, 根据正弦定理, 有 $\frac{\sin \alpha_2}{R} = \frac{\sin\left(\frac{2}{9}\pi\left(\frac{7}{2} + k\right) - \alpha_2 - \theta\right)}{\frac{R \sin(\theta - \pi - \alpha_1)}{\sin \alpha_1}}$

$$\text{解出 } \theta, \quad \theta = \arctan \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \left[\alpha_2 - \frac{2}{9}\pi(k-1) \right]}{\sin \alpha_1 \cos \left[\alpha_2 - \frac{2}{9}\pi(k-1) \right] - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right)$$

将 θ 带入(3)式化简得 $d = \frac{R \sin(\theta + \alpha_1)}{\sin \alpha_1}$, 进而得到被动接收信号无人机的坐标。

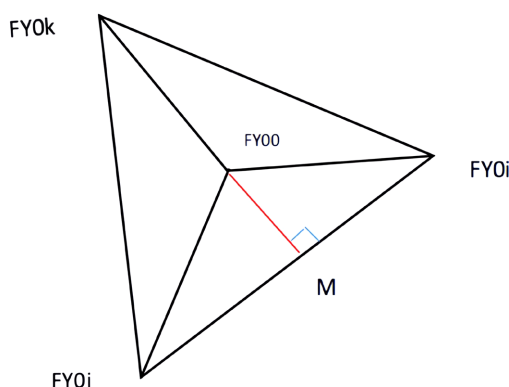


Figure 3. Receiving drone on the left side of the lower half circumference
图 3. 接收信号无人机在下半圆周的左侧

(ii) FY0i 在下半圆周的右侧, 过 FY00 做 $FY00 M \perp FY0k FY0i$, 如图 4 所示。

FY00 与 FY01、FY0k 之间的距离为 $FY00 FY0k = FY00 FY01 = R$, 发射信号无人机(FY00、FY01 和 FY0k)与被动接收信号无人机(FY0i)的夹角为 $\angle FY01 FY00 FY0i = 2\pi - \theta$, $\angle FY0i FY0k FY00 = \pi - \frac{2}{9}\pi(k-1) - (2\pi - \theta) - \alpha_2 = -\frac{2}{9}\pi\left(k - \frac{11}{2}\right) + \theta - \alpha_2$, $FY00 M = R \sin \angle FY0i FY0k FY00 =$

$R \sin\left(-\frac{2}{9}\pi\left(k - \frac{11}{2}\right) + \theta - \alpha_2\right)$ 可以解得

$$FY00FY0i = \frac{R \sin\left(-\frac{2}{9}\pi\left(k - \frac{11}{2}\right) + \theta - \alpha_2\right)}{\sin \alpha_2} \tag{4}$$

在 $\triangle FY00 FY0k FY0i$ 中, 根据正弦定理, 有 $\frac{\sin \alpha_2}{R} = \frac{R \sin\left(-\frac{2}{9}\pi\left(k - \frac{11}{2}\right) + \theta - \alpha_2\right)}{FY00FY0i}$ 。

解出 θ , $\theta = \arctan\left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin\left[\alpha_2 - \frac{2}{9}\pi(k-1)\right]}{\sin \alpha_1 \cos\left[\alpha_2 - \frac{2}{9}\pi(k-1)\right] - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}\right)$ 。

将 θ 带入(4)式化简得 $d = \frac{R \sin(\theta + \alpha_1)}{\sin \alpha_1}$, 进而得到被动接收信号无人机的坐标。

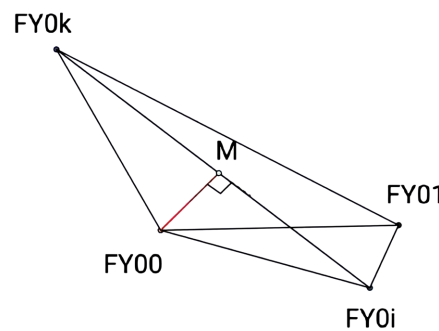


Figure 4. Receiving drone on the left side of the lower half circumference
图 4. 接收信号无人机在下半圆周的左侧

5.2. 圆形编队无编号时被动接收信号无人机定位模型的建立与求解

对于除 FY00 和 FY01 外只有一架无人机发射信号的情况, 无法实现其他无人机的有效定位, 现考虑两架无人机发射信号的情况:

除 FY00 和 FY01 外的两架在圆周上发射信号无人机的编号未知, 所以应用双站交叉定位算法, 设圆周上两架无人机编号为 FY0k₁ 和 FY0k₂, 把他们的极坐标转换为直角坐标, 即 FY0k₁ 坐标为 $\left(R \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right), R \sin\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right)\right)$, FY0k₂ 坐标为 $\left(R \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right), R \sin\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)\right)$, 且 $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \neq 0, 1$ 。我们还知道 FY00 和 FY01 的直角坐标为 (0,0), (R,0)。

分析下表 1 四种无人机分类情况下接收信号无人机 s 的坐标, 对四种情况分别使用三角测量定位法, 联立方程组求解。

Table 1. Four cases of finding the coordinates of UAV s receiving signals

表 1. 求接收信号的无人机 s 的坐标的四种情况

分类	无人机编号		
1	FY00	FY01	s
2	FY00	FY0k ₁	s
3	FY01	FY0k ₁	s
4	FY01	FY0k ₂	s

分类 1:

设 s 和 $FY00, FY01$ 之间的夹角为 α_1 , 三点可以唯一确定一个圆, 如图 5, 设圆心为 O_1 , 坐标为 (a_1, b_1) , 半径为 R_1 。

由两点间距离公式, 我们得到两个方程:

$$(a_1 - 0)^2 + (b_1 - 0)^2 = R_1^2$$

$$(a_1 - R)^2 + (b_1 - 0)^2 = R_1^2$$

又同弧所对的圆周角是圆心角的一半和三角形的余弦定理, 我们得到: $2R_1^2(1 - \cos 2\alpha_1) = R^2$ 。

联立上面三个方程, 就可以解出 (a_1, b_1) 和 R_1 , 即

$$\begin{cases} R_1^2 = \frac{R^2}{2(1 - \cos 2\alpha_1)} \\ a_1^2 = \frac{R^2}{4} \\ b_1^2 = \frac{R^2}{2(1 - \cos 2\alpha_1)} - \frac{R^2}{4} \end{cases}。$$

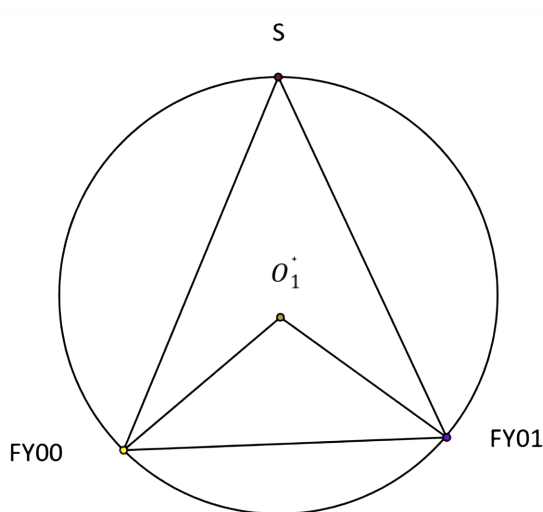


Figure 5. $FY00, FY01$ and s are on the same circle
图 5. $FY00, FY01, s$ 在同一个圆上

分类 2:

设 s 和 $FY00, FY0k_1$ 之间的夹角为 α_2 , 三点可以唯一确定一个圆, 如图 6, 设圆心为 O_2 , 坐标为 (a_2, b_2) , 半径为 R_2 。

由两点间距离公式, 我们得到两个方程:

$$(a_2 - 0)^2 + (b_2 - 0)^2 = R_2^2$$

$$\left(a_2 - R \cos \left(\frac{2}{9} \pi (k_1 - 1) \right) \right)^2 + \left(b_2 - R \sin \left(\frac{2}{9} \pi (k_1 - 1) \right) \right)^2 = R_2^2$$

又同弧所对的圆周角是圆心角的一半和三角形的余弦定理, 我们得到: $2R_2^2(1 - \cos 2\alpha_2) = R^2$ 。

联立上面三个方程, 就可以解出 (a_2, b_2) 和 R_2 。

$$\text{即} \begin{cases} R_2^2 = \frac{R^2}{2(1 - \cos 2\alpha_2)} \\ a_2 = \frac{R}{2 \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right)} + b_2 \tan\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right) \\ b_2 = \sqrt{R_2^2 + R^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right)^2}{4} \right]} - \frac{R}{2} \sin\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right) \end{cases}$$

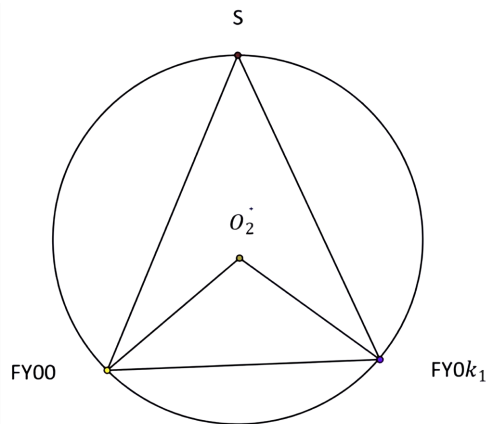


Figure 6. FY00, FY0k1 and s are on the same circle
图 6. FY00、FY0k1、s 在同一个圆上

分类 3:

设 s 和 FY01, FY0k1 之间的夹角为 α_3 , 三点可以唯一确定一个圆, 如图 7, 设圆心为 o_3 , 坐标为 (a_3, b_3) , 半径为 R_3 。

由两点间距离公式, 我们得到两个方程:

$$\begin{aligned} \left[a_3 - R \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_3 - 1)\right) \right]^2 + \left[b_3 - R \sin\left(\frac{2}{9}\pi(k_3 - 1)\right) \right]^2 &= R_3^2 \\ (a_3 - R)^2 + b_3^2 &= R_3^2 \end{aligned}$$

又同弧所对的圆周角是圆心角的一半和三角形的余弦定理, 我们得到:

$$\left[R - R \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right) \right]^2 + R^2 \left[\sin\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1) \right]^2 = 2R_3^2 (1 - \cos(2\alpha_3))$$

联立上面三个方程, 就可以解出 (a_3, b_3) 和 R_3

$$\text{即} \begin{cases} \left[a_3 - R \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right) \right]^2 + \left[b_3 - R \sin\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right) \right]^2 = R_3^2 \\ (a_3 - R)^2 + b_3^2 = R_3^2 \\ \left[R - R \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right) \right]^2 + R^2 \left[\sin\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1) \right]^2 = 2R_3^2 (1 - \cos(2\alpha_3)) \end{cases} .$$

可求得圆心 O_3 的坐标和 R_3 为:

$$a_3 = \frac{R}{1 + \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right)\right)^2}{\sin^2\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right)}} + \sqrt{\frac{R^2}{1 + \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right)\right)^2}{\sin^2\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right)}} - \frac{R_4^2}{1 + \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right)\right)^2}{\sin^2\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right)}}}$$

$$b_3 = \frac{1 - \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right)}{\sin\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right)} a_4$$

$$R_3^2 = \frac{R^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right) + R^2 \sin^2\left(\frac{2}{9}\pi(k_1 - 1)\right)\right)^2}{2(1 - 2\cos(2\alpha_3))}$$

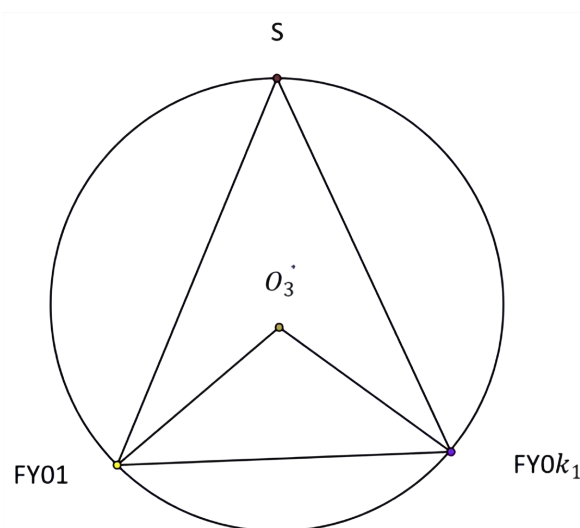


Figure 7. FY01, FY0k1 and s are on the same circle
图 7. FY01、FY0k1、s 在同一个圆上

分类 4:

FY01、FY0k₂ 两点和接收信号的无人机 s 接收到 FY01、FY0k₂ 的角度 α_4 可以唯一确定一个圆, 如图 8, 设圆的圆心 O_4 为 (a_4, b_4) , 半径为 R_4 , $\angle FY01 s FY0k_2 = \alpha_4$ 。

则根据圆心角的度数是圆周角的度数的二倍, 可知 $\angle FY01 O_4 FY0k_2 = 2\alpha_4$ 。

由于 $FY01 O_4 = R_4$, $FY0k_2 O_4 = R_4$ 根据 $\triangle FY01 O_4 FY0k_2$ 中的余弦定理, 可以列如下的方程组:

$$\begin{cases} \left(a_4 - R \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)\right)^2 + \left(b_4 - R \sin\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)\right)^2 = R_4^2 \\ \left(R - R \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)\right)^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right) = 2R_4^2(1 - \cos(2\alpha_4)) \end{cases}$$

可求得圆心 O_4 的坐标和 R_4 为:

$$a_4 = \frac{R}{1 + \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)\right)^2}{\sin^2\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)}} + \sqrt{\frac{R^2}{1 + \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)\right)^2}{\sin^2\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)}} - \frac{R_4^2}{1 + \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)\right)^2}{\sin^2\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)}}}$$

$$b_4 = \frac{1 - \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)}{\sin\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)} a_4$$

$$R_4^2 = \frac{R^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right) + R^2 \sin^2\left(\frac{2}{9}\pi(k_2 - 1)\right)\right)^2}{2(1 - 2\cos(2\alpha_4))}$$

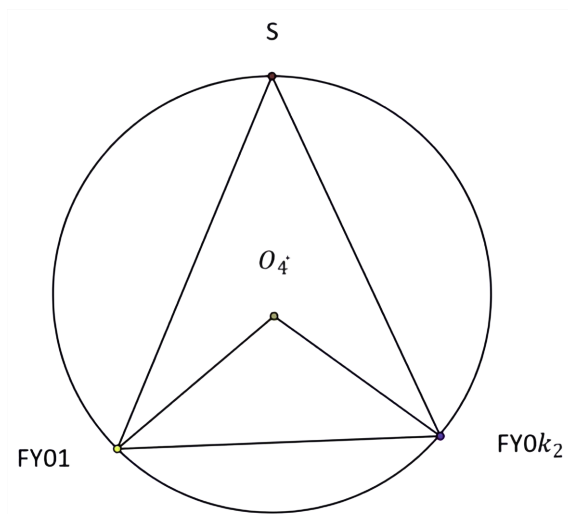


Figure 8. FY01, FY0k2 and s are on the same circle
图 8. FY01、FY0k2、s 在同一个圆上

显然可知, s 与 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 的距离为 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 , 设 s 在直角坐标系下的坐标为 (x, y) , 可建立方程组:

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = R_2^2 \\ (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 = R_3^2 \\ (x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 = R_4^2 \end{cases}$$

此时 k_1 、 k_2 作为中间量, 解出的 (x, y) 唯一且不含 k_1 、 k_2 。

即除了 FY00, 和 FY01, 至少还需要圆周上 2 架无人机, 可以实现无人机 s 的有效定位[1]。

5.3. 圆形编队中位置偏差无人机的调整模型的建立与求解

根据表中信息, 绘制出调整前无人机在极坐标下的位置, 如图 9。

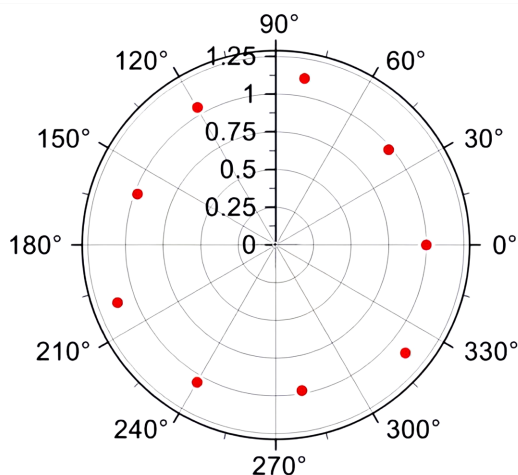


Figure 9. Position of UAV in polar coordinates before adjustment
图 9. 调整前无人机在极坐标下的位置

通过 Python 程序得到初始状态下各无人机的直角坐标表(保留两位小数)。

Table 2. Rectangular coordinate table of UAV before adjustment and under standard condition
表 2. 无人机调整前和标准情况下直角坐标表

编号	调整前对应直角坐标系坐标	无人机无偏差直角坐标
FY00	(0.00, 0.00)	(0.00, 0.00)
FY01	(100.00, 0.00)	(100.00, 0.00)
FY02	(74.96, 63.12)	(76.60, 64.27)
FY03	(19.04, 110.37)	(17.36, 98.48)
FY04	(-52.10, 91.16)	(-50.00, 86.60)
FY05	(-92.01, 33.74)	(-93.97, 34.20)
FY06	(-105.27, -38.23)	(-93.97, -34.20)
FY07	(-52.39, 91.00)	(-50.00, -86.60)
FY08	(17.30, -96.46)	(17.36, -98.48)
FY09	(86.15, -71.57)	(76.60, -64.28)

由表中表 2 可知, 除 FY00 和 FY01 外, 其余无人机位置均与规定位置略有偏差, 所以不管从剩下的无人机中选择哪两架发射信号, 被动接收信号无人机定位时一定会存在偏差。下面使用贪婪算法求解具体的调整方案:

利用贪婪算法选择发射信号的无人机, 使得每一架被动接收信号无人机定位时的偏差趋于 0, 进而总体圆形编队与规定圆周间的偏差达到最优解, 从而得到调整方案。

设初始半径为 $r_i (i=1,2,\dots,9)$, 初始角度为 $\theta_i (i=1,2,\dots,9)$, 其中 i 为无人机编号, r_i 和 θ_i 为表 1 中对应数据, 由题干可得规定半径为 100 m, 规定角度为 $\frac{2}{9}\pi(i-1)$ 。

设无人机的偏差为 $\Delta_i = |r_i - 100| + \left| \theta_i - \frac{2}{9}\pi(i-1) \right|$, 考虑每次选一个相对其他无人机位置偏差最小的无人机作为第三架发射信号的无人机, 下面通过迭代的方法处理数据:

如下图 10 所示, 把 (r_i, θ_i) (这里 $i=1, 2, \dots, 9$) 依次带入到 Δ_i 方程中, 作比较选出使 Δ_i 值最小的 (r_i, θ_i) , i 即为第三架无人机 FY0i 的编号。

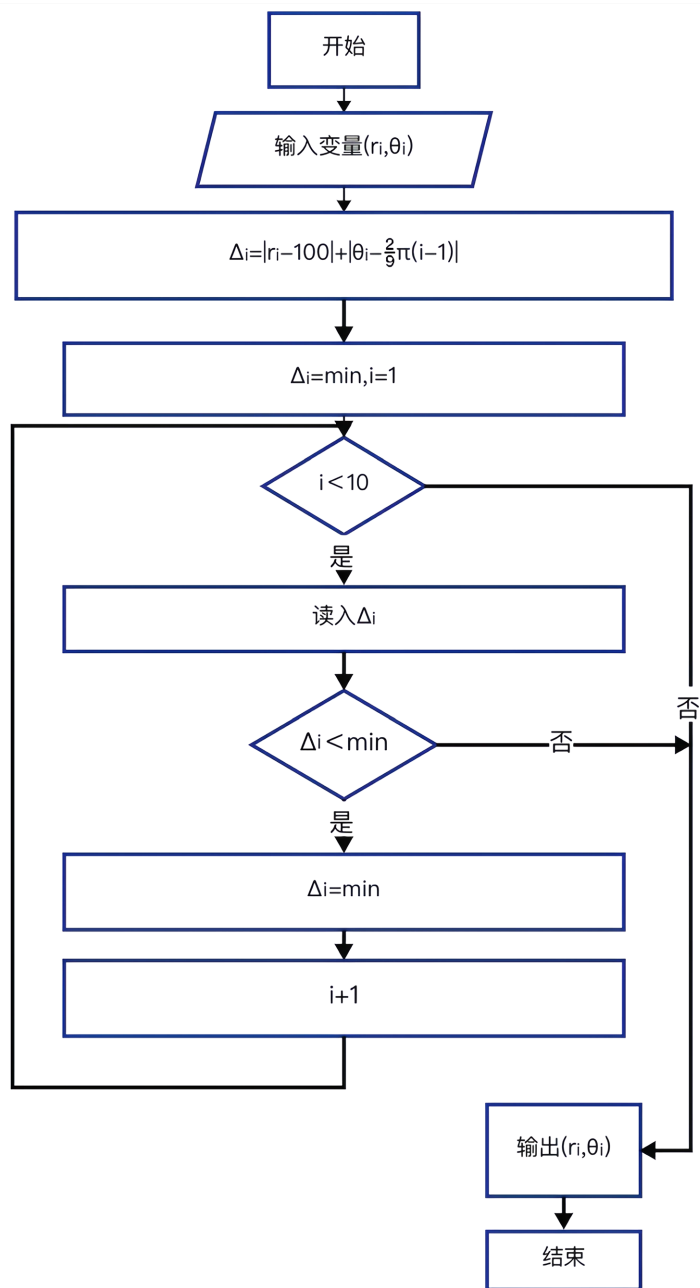


Figure 10. Position of UAV in polar coordinates before adjustment
 图 10. 调整前无人机在极坐标下的位置

用(1)类似的方法, 以 FY00、FY01 和 FY0i 作为发射信号的无人机对其余七架无人机进行定位。根据 2 中得到的位置信息更改无人机所在位置为 (r'_i, θ'_i) 。

上一轮所用 i 不能再次出现在后续循环, 否则会出现重复取值运算无法结束的情况, 重复步骤 1~4, 每次迭代选用不同的 FY0i 直到遍历 (r_i, θ_i) 即可得到调整后的最优位置, 此时圆形编队最接近规定圆周。

5.4. 锥形编队中无人机方位调整模型的建立与求解

问题二不再有对自身高度感知的条件, 因此锥形编队中的无人机不一定维持在同一高度上。建立三维直角坐标系, 以 FY13 为原点, 以 FY13 为端点经过 FY01 作射线为 x 轴, 以 FY13 为端点经过 FY11 作射线为 y 轴, 以 FY13 为端点垂直纸面向外为 z 轴。因为无人机角度、距离、高度均有偏差, 所以我们尽量选取相邻的三个作为发射信号的无人机, 否则方位调整时的误差会增大。

无人机的位置是在动态变化的, 下一个无人机位置是基于前三个求出的位置进行调整的, 因此想要找到最优方位我们需要建立动态规划模型[2]。

先从 FY11, FY12 和 FY07 相互接收信号开始调整, 然后以 FY11, FY12 和 FY07 为发射信号机确定 FY08 方位, 再以 FY12, FY08 和 FY07 为发射信号机确定 FY04 方位, 依次辐射状确定其余无人机位置。

为简化计算, 我们把 z 轴 n 等分, 就得到了每一架无人机的 z 坐标, 那么我们只需要规划每个平面上无人机的调整路线使得每一段加起来达到无人机的最佳方位即可。

设 Q_0 为被动接收信号的初始位置, $Q_1(x_1, y_1, z_1), Q_2(x_2, y_2, z_2), \dots, Q_i(x_i, y_i, z_i), \dots, Q_n(x_n, y_n, z_n)$ 为各平面上无人机需要到达的坐标, 优化变量定义为 $M = [x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n]$ 。

由于只需要在各二维平面上调整方位即可, 所以三维空间的优化问题就转变为 $2n$ 维优化问题。具体步骤如下:

划分阶段。我们使用栅格法, 把各个平面划分成一个个小方块, Q_0 和 $Q_1 \sim Q_n$ 均在网格顶点上, 顶点间的最小距离即为无人机到达最优位置的最短距离, 即最优方案。

选择状态。变量 Q_i , Q_i 表示在第 i 个平面上的目标位置, Q_{i-1} 到 Q_i 即为运动的过程状态。

由角度与距离的关系, 我们得到决策变量为 $\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$, 记为 ε 。

使 ε 达到最小的路线即为调整方案[3]。

6. 模型评价与推广

6.1. 模型的评价

6.1.1. 模型的优点

1) 模型一: 考虑到被动接收信号无人机与发射信号无人机的角度关系, 我们将建模内容分成四种情况分类讨论, 进而建立接收信号无人机的定位模型, 体现此建模的系统性、简明性和辩证性。在建模过程中, 运用到了三角测位原理, 严格运用数学化的表达方式求解问题, 使所得数据更加精确, 从而使位置定位达到较高的准确性。

2) 模型二: 通过对四架发射信号的无人机根据双站交叉定位算法进行排列组合, 具有计算快、作用距离远、结果精确和可信度高等优点。

3) 问题二: 无人机的位置是在动态变化的, 下一个无人机位置是基于前三个求出的位置进行调整的, 因此想要找到最优方位我们建立了动态规划模型。由于动态规划模型反映了动态过程演变得联系和特征, 在计算时可以通过实际经验提高求解效率。

4) 问题三: 在建模过程中运用了贪婪策略选取发射信号的无人机, 来解决无人机位置调整的优化问题, 使得建模结果易于实现且非常高效。

6.1.2. 模型的缺点

- 1) 只能满足某些约束条件的可行解的范围。
- 2) 不能保证用来求最大或最小解问题。

- 3) 尽管通过贪婪算法给出了接近最优的解决方案, 但未能确保结果为最优方案。
- 4) 没有统一的标准模型, 数值方法求解时可能存在维数灾。

6.2. 模型的推广

多目标优化模型不仅可以用于无人机定位调整, 还可以用于很多优化问题, 如医疗物资的动态配送等。我们建模时用到的方法也可以推广到其他问题, 例如求解(3)时用到的贪婪算法就可以用于解决背包问题, 本文中使角度差与距离差达到最小进而找到每个位置的最优解进而组合成大的位置最优的编队就与背包问题中向背包在使其不超过承重量的情况下加入物品是相通的; 在求解问题二的过程中采用的动态规划模型也可以应用到民航应急预案的动态生成、配电网动态电压控制等问题上。

7. 结论

本文主要研究了无人机遂行编队飞行中的纯方位无源定位问题。根据多目标优化模型, 利用三角测位算法、贪婪算法、动态规划模型等, 对被动接收信号无人机的定位位置信息进行估计, 在保证精度的同时, 极大减少了运算的时间和复杂程度, 实现了对无人机遂行编队飞行位置的调整。为日后无人机遂行编队飞行中的纯方位无源定位问题和定位调整问题提供了参考依据。

致 谢

借此机会, 想对帮助过我们的老师和同学致以最真挚的谢意。

参考文献

- [1] 朱少光. 多无人机协同定位与跟踪航迹规划方法研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西安电子科技大学, 2021. <https://doi.org/10.27389/d.cnki.gxadu.2021.002037>
- [2] 周同乐, 陈谋. 基于动态目标概率分布的核电站无人机航路强化学习规划[J/OL]. 中国科学: 信息科学, 1-14. https://kns.cnki.net/kcms2/article/abstract?v=3uoqIhG8C44YLTlOAIrKibYIV5Vjs7iJTKGjg9uTdeTsOI_ra5_XSVLzjEK69s0I8soWHdETZ6oCpp92K_WtffjBFnQbLd3&uniplatform=NZKPT&src=copy, 2022-09-18.
- [3] 陈国春, 毛新军, 杨硕, 等. 面向目标定位的多无人机自组织方法研究[J]. 软件导刊, 2021, 20(6): 39-44.