Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(9), 3826-3833
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.129376

Hans 汉斯

球壳区域主特征值最小化问题研究

江梦萍

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年8月4日；录用日期：2023年9月1日；发布日期：2023年9月6日

摘 要

本文主要考虑Neumann边界条件下Laplace算子的不定权主特征值问题。在权函数为变号且有界的限制下，我们研究了球壳区域内的主特征值最小化问题，证明了其存在性和权函数的bang-bang分布。这些结果在生物种群资源和优化问题中有重要应用。

关键词

主特征值，最优化，球壳区域

Research on the Minimization Problem of Principal Eigenvalue in Spherical Shell Domain

Mengping Jiang

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Aug. 4th, 2023; accepted: Sep. 1st, 2023; published: Sep. 6th, 2023

Abstract

In this paper, we mainly consider the principal eigenvalue problem of Laplace operator with indefinite weights under Neumann boundary condition. The existence and bang-bang distribution of the minimization of the principal eigenvalue in the spherical shell region are proved under the constraint that weight function is sign-changing and bounded. These results have important applications in biological population resources and optimization problems.

Keywords

Principal Eigenvalue, Optimization, Spherical Shell Domain

文章引用: 江梦萍. 球壳区域主特征值最小化问题研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(9): 3826-3833.
DOI: 10.12677/aam.2023.129376

1. 引言

本文我们考虑如下线性特征值问题：

$$\begin{cases} \Delta u+\lambda m(x)u=0, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中Ω是$R^N\ (N\ge 1)$中带有光滑边界的有界区域，$\partial/\partial n$表示$\partial\Omega$的单位外法向量。$m(x)$是一个有界的变号函数，满足$-1\le m\le\kappa$在Ω上几乎处处成立，其中$\kappa>0$。除此之外还满足：

$$\int_\Omega m<0 \text{ 和 } \left|\left\{x\in\Omega: m(x)>0\right\}\right|>0. \tag{1.2}$$

假设$m_0\in(0,1)$以及$\kappa>0$，我们定义集合

$$\mathcal{M}=\left\{m\in L^\infty(\Omega): -1\le m\le\kappa,\ \left|\left\{x\in\Omega: m(x)>0\right\}\right|>0,\ \int_\Omega m\le -m_0|\Omega|\right\}.$$

问题(1.1)可由如下反应扩散方程[1]得到：

$$\begin{cases} \phi_t=\Delta\phi+\lambda\phi\left[m(x)-\phi\right], & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty), \\ \phi(x,0)\ge 0,\phi(x,0)\not\equiv 0, & (x,t)\in\bar{\Omega}, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中$\phi(x,t)$表示在位置为x，时间为t时的种群密度，λ为大于0的参数，Ω表示为种群生长区域。

假设$u\in H^1$是(1.1)的特征值λ对应的正的特征函数，则称该特征值为主特征值。用符号$\lambda_1(m)$表示(1.1)对应的主特征值，根据文献[2]，对于该反应扩散方程有如下结论：

i) 当$\lambda>\lambda_1(m)$时，则$\phi(x,t)$在$t\to\infty$时，有唯一的正平衡点，是全局唯一非负解。也即说明物种能够生存。

ii) 当$\lambda_1(m)>0$且$0<\lambda<\lambda_1(m)$时，则$\phi(x,t)$在$t\to\infty$时，趋向于0。也即物种灭绝。

从生物种群角度来看，可以看出当主特征值$\lambda_1(m)$越小，越有利于物种的生存。因此我们这里研究主特征值的最小化。已有不少学者研究特征值问题，文献[3]研究不带权特征值优化问题，文献[4] [5]在权函数为定号时，研究特征值优化问题。在权函数不定号条件下，文献[6] [7] [8]在不同的情况下对一维区域的Neumann边界条件进行研究，分别得到对应的特征值最小化的存在性以及对应权函数的性质。进一步，在更一般的边界条件下，文献[9] [10]对圆柱状区域在一个小扰动下研究特征值优化结果，通过数值模拟结果和分析得到优化集为条状区域或区域的一个角落，得到了对应的最小化的存在性。还有文献[11]利用重排技术完整地证明了一维情况的结果，且证明了在高维情况下球并不总是最优化集。文献[12]研究平面上具有固定相同半径和变中心的m个球的特征值最小化问题，并证明最小化的存在性，文献[13] [14]对区域为球的特征值的渐近性质进行研究。受上述文献启发，我们仍然对优化问题感兴趣。通过文献[2]，首先给出下面必要的引理：

引理 1.1. 假设$\left|\left\{x\in\Omega, m(x)>0\right\}\right|>0$，且有$\int_\Omega m<0$，则问题(1.1)存在唯一正的主特征值，记为$\lambda_1(m)$，它可以表示为

$$\lambda_1(m)=\inf_{u\in S(m)}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2}{\int_\Omega mu^2} \tag{1.4}$$

其中 $S(m):=\left\{u\in H^1(\Omega):\int_\Omega mu^2>0\right\}$。除此之外，$\lambda_1(m)$ 是简单的，且它对应的主特征函数在 $\bar{\Omega}$ 内不变号。

下面介绍两个需要用到的命题，以下两个命题在文献[2]中已被证明：

命题 1.2. 存在 $m\in\mathcal{M}$，使得最小化问题 $\lambda_{\inf}=\inf_{m\in\mathcal{M}}\lambda_1(m)$ 有解。此外，若 $\lambda_1(m)=\lambda_{\inf}$，则存在可测集 $E\subset\Omega$，使得函数 m 可以表示成 $m(x)=\kappa\chi_E-\chi_{\Omega\setminus E}$ 在 Ω 上几乎处处成立。这里对 m 的体积限制满足 $\int_\Omega m=-m_0|\Omega|$。

命题 1.3. 当 $N=1$ 时，$\Omega=(0,1)$ 时，令 $\gamma=\frac{-m_0+1}{1+\kappa}$，存在 $m\in\mathcal{M}$ 使得最小化 $\lambda_{\inf}$ 成立，且存在最优化可测集 $E\subset\Omega$，使得函数 m 可以表示成 $m(x)=\kappa\chi_E-\chi_{\Omega\setminus E}$ 在 $(0,1)$ 上几乎处处成立，其中优化集 E 满足 $E=(0,\gamma)$ 或 $E=(1-\gamma,1)$。

高维区域下特征值优化问题的研究并不是简单的，我们尝试考虑球壳区域下的特征值优化问题，下文我们考虑当 $m\in\mathcal{M}$ 时，限制权函数是径向对称的前提下，研究最小化问题：$\inf_{m\in\mathcal{M}}\lambda_1(m)$。

根据已有的文献，我们自然提出如下问题：

问题： 对于球壳区域，最小化问题是否可解？若可解，优化集在哪里？对应的权函数会怎么样？最小化对应的结论是否和一维的结果一样？

2. 主要结果

本文主要证明如下定理：

定理 2.1. 当 $N\geq 2$ 时，令 $\Omega=A_{r_1,r_2}$ 是一个有界球壳区域，限制权函数是径向对称函数，则对应的最小化问题 $\lambda_{\inf}=\inf_{m\in\mathcal{M}}\lambda_1(m)$ 的解仍然存在，且存在可测集 $E\subset\Omega$，使得权函数是满足 bang-bang 分布的，但与一维结果不同的是球壳区域下两个最优化区域的测度并不相等。

3. 定理 2.1 的证明

在这一部分我们证明定理 2.1，证明定理前先进行一些准备工作，我们首先将[2]中一维 $\Omega=(0,1)$ 的结论通过一个伸缩变换，得到在一维的任意区间上的结论：

引理 3.1. 当 $N=1$，$\Omega=(a,b)$ 时，令 $\gamma=\frac{-m_0+1}{1+\kappa}(b-a)$，存在 $m\in\mathcal{M}$ 使得最小化 $\lambda_{\inf}$ 成立，且存在最优化可测集 $E\subset\Omega$，使得函数 m 可以表示成 $m=\kappa\chi_E-\chi_{\Omega\setminus E}$ 在 (a,b) 上几乎处处成立，其中优化集 E 满足 $E=(a,a+\gamma)$ 或 $E=(b-\gamma,b)$。

下面我们研究在球壳区域上的最小化问题，首先我们定义球壳区域为：

$$A_{r_1,r_2}:=B_{r_2}\setminus\bar{B}_{r_1}$$

其中 $B_r:=\left\{x\in R^N:|x|<r\right\}$ 表示开球，r_1,r_2 是非零正常数。因为 A_{r_1,r_2} 是旋转对称区域且是光滑的，因此我们可以得到对应的主特征函数 u 也是径向对称的。这里权函数也是径向对称的，当引入极坐标变换时，可以将问题(1.1)转化为如下代数方程：

$$\begin{cases}u''(r)+\dfrac{N-1}{r}u'(r)+\lambda m(r)u=0, \quad r\in(r_1,r_2),\\ \dfrac{\partial u(r_1)}{\partial n}=0,\dfrac{\partial u(r_2)}{\partial n}=0.\end{cases} \tag{3.1}$$

这里 $m(r)$ 仍然满足(1.2)。通过上面变换，N 维球壳区域问题转化为一维问题，为了方便得到对应的特征值变分表示，可以将上述方程(3.1)写成

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(r^{N-1}\nabla u\right)+\lambda m(r) r^{N-1} u=0, & r\in(r_1,r_2), \\ \dfrac{\partial u(r_1)}{\partial n}=0, \dfrac{\partial u(r_2)}{\partial n}=0. \end{cases} \tag{3.2}$$

因此我们可以得到方程(3.1)对应的主特征值变分表示为：

$$\lambda_1(m)=\inf_{u\in S_1(m)}\frac{\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}(u')^2\,\mathrm{d}r}{\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1} m u^2\,\mathrm{d}r}, \tag{3.3}$$

其中 $S_1(m)=\left\{u\in H^1(\Omega):\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1} m u^2\mathrm{d}r>0\right\}$。因为一维的结论已经较为完整，为引用一维的结论，我们对该特征值引入变换函数使得该表示有和式子(1.4)类似的形式，从而得到下面引理：

引理 3.2. 令 $r\in(r_1,r_2)$ 表示光滑有界球壳区域，对(3.3)引入变换函数 $k(t)$ 使得它有类似于(1.4)的形式。当 $N=1$ 时，$r=k(t)=t$；当 $N=2$ 时，$r=k(t)=\mathrm{e}^t$；当 $N>2$ 时，$r=k(t)=\left[(2-N)(t)\right]^{\frac{1}{2-N}}$。

证明： 将变换函数 $r=k(t)$ 引入到(3.3)中，使得满足式子

$$\frac{k^{N-1}(t)}{k'(t)}=1, \tag{3.4}$$

当 $N=1,2$ 时，两边积分可以很容易得到对应 $k(t)$ 的表达式，即分别为 $k(t)=t+C$ 和 $k(t)=\mathrm{e}^{Ct}$。当 $N>2$ 时，对(3.4)进行处理后，两边进行积分有

$$\int\frac{1}{k^{N-1}(t)}\mathrm{d}(k(t))=t, \tag{3.5}$$

通过该积分可以得到关于变换函数的表达式 $\frac{k^{2-N}(t)}{2-N}=t+C$，从而可以得到当 $N>2$ 时，对应的变换函数应为 $k(t)=\left[(2-N)(t+C)\right]^{\frac{1}{2-N}}$，值得注意的是，这里需要保证变换函数 $k(t)$ 是非负的。为方便计算，对上述三种情况取一般的常数 C，可以得到

- 当 $N=1$ 时，取 $C=0$，则有 $r=k(t)=t$。
- 当 $N=2$ 时，取 $C=1$，则有 $r=k(t)=\mathrm{e}^t$。
- 当 $N>2$ 时，取 $C=0$，则有 $r=k(t)=\left[(2-N)(t)\right]^{\frac{1}{2-N}}$。这里需要注意的是为保证球壳区域有意义，变量 t 要保证取正值。

因为球壳区域是有界的，根据上述三种情况，我们可以得到对应的三个变换函数 $k(t)$ 是单调递增且可逆的。因此，这说明可以将对应的变量 $r\in(r_1,r_2)$ 转化为 $t\in\left(k^{-1}(r_1),k^{-1}(r_2)\right)$，利用标准化技术，我们可以假设 $\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1} m u^2\mathrm{d}r=1$，则有

$$\begin{aligned}\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}(u')^2\,\mathrm{d}r &= \int_{k^{-1}(r_1)}^{k^{-1}(r_2)} k^{N-1}(t)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\right)^2\mathrm{d}k(t) \\ &= \int_{k^{-1}(r_1)}^{k^{-1}(r_2)} k^{N-1}(t)(u')^2\left(\frac{1}{k'(t)}\right)^2 k'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{k^{-1}(r_1)}^{k^{-1}(r_2)} \frac{k^{N-1}(t)}{k'(t)}(u')^2\,\mathrm{d}t=\int_{k^{-1}(r_1)}^{k^{-1}(r_2)}(u')^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.6}$$

比较(3.6)和(1.4)，可以发现(3.6)已经和式子(1.4)是类似的。从而完成引理 3.2 的证明。

方程(3.1)已经是单变量的方程，为此我们可以充分利用已有的一维的完整结论。利用引理 3.1 的结论，下面证明定理 2.1。

定理 2.1 的证明。对于任意有界光滑区域，命题 1.2 的结论是成立的。因此，对于方程(3.3)中球壳区域 $\Omega = A_{r_1,r_2}$，边界情况为 Neumann 边界，这个结果仍然是适用的。也即存在 $m \in \mathcal{M}$，使得主特征值最小化存在。且有两个最优化区间，但由于所考虑的区域不同，对应的区间也不同。下面考虑这个优化区间在哪里，以及对应的权函数 m 是否依旧具有 bang-bang 分布，即满足 $m = \kappa\chi_E - \chi_{\Omega\setminus E}$，这里 χ_E 是某一个可测集 E 的特征函数。

根据引理 3.2 的结果，我们可以分为如下两种情况，分别为 $N=2$ 和 $N>2$：

情况 1：

当 $N=2$ 时，对应变换为 $r = k(t) = \mathrm{e}^t$，因为 $r \in (r_1, r_2)$，引入变换之后，变量 t 也随之变化，通过计算，则有 $t \in (\ln r_1, \ln r_2)$，(3.3)的部分式子可以写成：

$$\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1} m u^2 \mathrm{d}r = \int_{\ln r_1}^{\ln r_2} \mathrm{e}^{2t} m(\mathrm{e}^t) u^2(\mathrm{e}^t) \mathrm{d}t . \tag{3.7}$$

下面对(3.7)进行研究，主特征值可以表示为

$$\lambda_1(m) = \frac{\int_{\ln r_1}^{\ln r_2} (u')^2 \mathrm{d}t}{\int_{\ln r_1}^{\ln r_2} \mathrm{e}^{2t} m(\mathrm{e}^t) u^2(\mathrm{e}^t) \mathrm{d}t} . \tag{3.8}$$

对于(3.8)，根据(1.4)，我们定义新的权函数

$$M_1(t) := \mathrm{e}^{2t} m(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{2t} m(t),$$

这说明(3.8)可以表示成

$$\lambda_1(m) = \frac{\int_{\ln r_1}^{\ln r_2} (u')^2 \mathrm{d}t}{\int_{\ln r_1}^{\ln r_2} M_1(t) u^2(\mathrm{e}^t) \mathrm{d}t} .$$

由于 $m \in \mathcal{M}$ 以及函数 e^{2t} 是单调递增的，通过放缩变换可以得到新定义函数 $M_1(t) \in \mathcal{M}$，通过命题 1.2 的结果，可以得到 $M_1(t)$ 可以表示为

$$M_1(t) = \kappa\chi_E - \chi_{\Omega'\setminus E},$$

其中 E 是区间 $\Omega' = (\ln r_1, \ln r_2)$ 的一个子集，从这里可以得到对应函数 $M_1(t)$ 是满足 bang-bang 分布的。

通过引理 3.1，假设在集合 E 上有 $\mathrm{e}^{2t} m(\mathrm{e}^t) = \kappa$，且满足测度

$$|E| := \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{2} - \alpha = \frac{1-m_0}{1+\kappa}|\Omega'|$$

这里 $\alpha > 0$。在 $(\ln r_1, \ln r_2) \setminus E$ 上有 $\mathrm{e}^{2t} m(\mathrm{e}^t) = -1$。根据引理 3.1 关于变量 t 的两个优化区间为

$$E_t = \left(\ln r_1, \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{2} + \ln r_1 - \alpha\right) = \left(\ln r_1, \frac{\ln r_2 + \ln r_1}{2} - \alpha\right)$$

或

$$E_t = \left(\frac{\ln r_2 + \ln r_1}{2} + \alpha, \ln r_2\right).$$

由于 $r = \mathrm{e}^t$，此时问题的结果仍然是一维的，下面将关于变量 t 的结果转化为关于变量 r 的结果，有

$$E_r=\left(r_1,\frac{\sqrt{r_1r_2}}{\mathrm{e}^{\alpha}}\right)$$

或

$$E_r=\left(\sqrt{r_1r_2}\mathrm{e}^{\alpha},r_2\right).$$

因此可以得到函数 m 关于 r 是满足 bang-bang 分布的，而函数 $M_1(t)$ 是关于 t 满足 bang-bang 分布。

对于情况 1，在二维球壳情况下，我们得到了对应关于变量极径 r 的区间结果，也即区域的宽度，将其转化到对应区域测度上。我们可以得到两个优化区间对应的宽度和区域测度是不一样的。第一个优化集下的二维优化区间宽度为 $|E|_{r^*}=\frac{\sqrt{r_1}\left(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1}\mathrm{e}^{\alpha}\right)}{\mathrm{e}^{\alpha}}$，二维优化区域测度为 $\pi\left(\frac{r_1r_2}{\mathrm{e}^{2\alpha}}-r_1^2\right)$。第二个优化集合下的二维优化区间宽度为 $|E|_{r_*}=\sqrt{r_2}\left(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1}\mathrm{e}^{\alpha}\right)$，二维优化区域测度为 $\pi\left(r_2-r_1r_2\mathrm{e}^{2\alpha}\right)$。可以发现由于区域是径向的，在二维圆环区域下关于优化集合的区域宽度和对应优化集区域测度的结论与一维的情况是不一样的。对应两个优化集的区域测度是不相等的。

情况 2：

当 $N>2$ 时，$r=k(t)=\left[(2-N)(t)\right]^{\frac{1}{2-N}}$，则新变量对应的区间为 $\left(\frac{r_1^{2-N}}{2-N},\frac{r_2^{2-N}}{2-N}\right)$，采用和情况 1 一样的方法，可以得到(3.3)主特征值的变分表示为：

$$\lambda_1(m)=\inf_{u\in S_1(m)}\frac{\int_{k^{-1}(r_1)}^{k^{-1}(r_2)}(u')^2\,\mathrm{d}t}{\int_{k^{-1}(r_1)}^{k^{-1}(r_2)}\left[(2-N)(t)\right]^{\frac{2N-2}{2-N}}mu^2\mathrm{d}t},$$

这里 $k^{-1}(r_1)=\frac{r_1^{2-N}}{2-N}$，$k^{-1}(r_2)=\frac{r_1^{2-N}}{2-N}$。此时类似于情况 1，根据(1.4)可以得到对应新的权函数为

$$M_2(t):=\left[(2-N)(t)\right]^{\frac{2N-2}{2-N}}m(t).$$

类似于 $N=2$，当 $N>2$ 时，维数是有限的，故有 $\frac{2N-2}{2-N}$ 是一个有界常数，由于 $m(t)\in\mathcal{M}$，可以得到 $M_2(t)\in\mathcal{M}$，通过命题 1.2，函数 $M_2(t)$ 可以表示成

$$M_2(t)=\kappa\chi_E-\chi_{\Omega'\setminus E},$$

其中 E 是 $\Omega'=\left(\frac{r_1^{2-N}}{2-N},\frac{r_2^{2-N}}{2-N}\right)$ 的一个子集。和情况 1 相同，函数 $M_2(t)$ 满足 bang-bang 分布。现在假设在集合 E 上有

$$\left[(2-N)(t)\right]^{\frac{2N-2}{2-N}}m\left(\left[(2-N)(t)\right]^{\frac{1}{2-N}}\right)=\kappa,$$

则它所对应的区间测度满足 $|E|:=\frac{r_2^{2-N}-r_1^{2-N}}{2-N}-\alpha=\frac{1-m_0}{1+\kappa}|\Omega'|$，其中 $\alpha>0$。同理，在另外一部分集合 $\left(\frac{r_1^{2-N}}{2-N},\frac{r_2^{2-N}}{2-N}\right)\setminus E$ 上有 $\left[(2-N)(t+C)\right]^{\frac{2N-2}{2-N}}m\left(\left[(2-N)(t+C)\right]^{\frac{1}{2-N}}\right)=-1$。通过引理 3.1 的结论，我们可以得到两个关于 t 的最小化集合为

$$E_t=\left(\frac{r_1^{2-N}}{2-N},\frac{r_2^{2-N}}{2-N}-\alpha\right)$$

或

$$E_t=\left(\frac{r_1^{2-N}}{2-N}+\alpha,\frac{r_2^{2-N}}{2-N}\right).$$

通过变换函数 $r=k(t)=\left[(2-N)(t)\right]^{\frac{1}{2-N}}$，将其转换为关于 r 的区间，也即为

$$E_r=\left(r_1,\left(r_2^{2-N}-(2-N)\alpha\right)^{\frac{1}{2-N}}\right)$$

或

$$E_r=\left(\left(r_1^{2-N}+(2-N)\alpha\right)^{\frac{1}{2-N}},r_2\right).$$

类似于情况 1，这里同样考虑对应的优化集合的对应的区间宽度以及区域长度。根据 N 维球体积公式，当半径为 R 时，有

$$\omega_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}R^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

其中 $\Gamma(x)$ 是伽马函数。由此可以计算出最小化集合为 $E_r=\left(r_1,\left(r_2^{2-N}-(2-N)\alpha\right)^{\frac{1}{2-N}}\right)$ 时，对应的区间宽度为

$$|E_r|=\left|\left(r_2^{2-N}-(2-N)\alpha\right)^{\frac{1}{2-N}}-r_1\right|,$$

对应球壳区域体积为

$$V_1=\frac{2\pi^{\frac{N}{2}}\left[\left(r_2^{2-N}-(2-N)\alpha\right)^{\frac{1}{2-N}}\right]^N}{N\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}-\frac{2\pi^{\frac{N}{2}}r_1^N}{N\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}.$$

最小化集合为 $E_r=\left(\left(r_1^{2-N}+(2-N)\alpha\right)^{\frac{1}{2-N}},r_2\right)$ 时，对应的区间宽度为

$$|E_r|=\left|r_2-\left(r_2^{2-N}+(2-N)\alpha\right)^{\frac{1}{2-N}}\right|,$$

对应球壳体积为

$$V_2=\frac{2\pi^{\frac{N}{2}}r_2^N}{N\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}-\frac{2\pi^{\frac{N}{2}}\left[\left(r_1^{2-N}+(2-N)\alpha\right)^{\frac{1}{2-N}}\right]^N}{N\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}.$$

通过简单的计算可得在 $N > 2$ 时，在球壳区域下对应的两个最优化集合的区间宽度和区域测度也是不相等的，和情况 1 的结论相同。为此，我们完成定理 2.1 的证明。

4. 总结与展望

关于不定权特征值优化问题已有较为丰富的结果，特别是一维区域下已经有较为完整的特征值优化结果，但关于高维区域的理论结果还比较少。为此，本文研究了高维球壳区域的优化问题，限制对应的特征函数和权函数是径向函数，得到其优化结果也是对称的，且得到了和一维情况下不同的结果。这是和其他优化结论的不同之处。但实际上我们研究的径向对称区域是较为特殊的情况，其本质还是一维的。而对于一般的区域，在没有对称假设下，问题的研究会困难得多，但其理论分析仍然是值得进一步探讨研究的问题。

参考文献

[1] Cantrell, R.-S. and Cosner, C. (1989) Diffusive Logistic Equations with Indefinite Weights: Population Models in Disrupted Environments. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*: *Mathematics*, **112**, 293-318. https://doi.org/10.1017/S030821050001876X

[2] Lou, Y. and Yanagida, E. (2006) Minimization of the Principal Eigenvalue for an Elliptic Boundary Value Problem with Indefinite Weight, and Applications to Population Dynamics. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **23**, Article No. 275. https://doi.org/10.1007/BF03167595

[3] Bocea, M. and Mihăilescu, M. (2018) Minimization Problems for Inhomogeneous Rayleigh Quotients. *Communications in Contemporary Mathematics*, **20**, 1750074. https://doi.org/10.1142/S0219199717500742

[4] Mazari, I., Nadin, G. and Privat, Y. (2022) Chapter 12—Some Challenging Optimization Problems for Logistic Diffusive Equations and Their Numerical Modeling. *Handbook of Numerical Analysis*, **23**, 401-426. https://doi.org/10.1016/bs.hna.2021.12.012

[5] Mazari, I., Nadin, G. and Privat, Y. (2022) Shape Optimization of a Weighted Two-Phase Dirichlet Eigenvalue. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **243**, 95-137. https://doi.org/10.1007/s00205-021-01726-4

[6] Anedda, C. and Cuccu, F. (2020) Optimal Location of Resources and Steiner Symmetry in a Population Dynamics Model in Heterogeneous Environments. *Annales Fennici Mathematici*, **47**, 305-324. https://doi.org/10.54330/afm.113547

[7] Derlet, A., Gossez, J.-P. and Takáč, P. (2010) Minimization of Eigenvalues for a Quasilinear Elliptic Neumann Problem with Indefinite Weight. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **371**, 69-79. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.03.068

[8] Jha, K. and Porru, G. (2011) Minimization of the Principal Eigenvalue under Neumann Boundary Conditions. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **32**, 1146-1165. https://doi.org/10.1080/01630563.2011.592244

[9] Hintermüller, M., Kao, C.-Y. and Laurain, A. (2012) Principal Eigenvalue Minimization for an Elliptic Problem with Indefinite Weight and Robin Boundary Conditions. *Applied Mathematics and Optimization*, **65**, 111-146. https://doi.org/10.1007/s00245-011-9153-x

[10] Kao, C.-Y., Lou, Y. and Yanagida, E. (2008) Principal Eigenvalue for an Elliptic Problem with Indefinite Weight on Cylindrical Domains. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **5**, 315-335. https://doi.org/10.3934/mbe.2008.5.315

[11] Lamboley, J., Laurain, A., Nadin, G. and Privat, Y. (2016) Properties of Optimizers of the Principal Eigenvalue with Indefinite Weight and Robin Conditions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **55**, Article No. 144. https://doi.org/10.1007/s00526-016-1084-6

[12] Birgin, E-G., Fernandez, L., Haeser, G. and Laurain, A. (2023) Optimization of the First Dirichlet Laplacian Eigenvalue with Respect to a Union of Balls. *Journal of Geometric Analysis*, **33**, Article No. 184. https://doi.org/10.1007/s12220-023-01241-w

[13] Ferreri, L. and Verzini, G. (2022) Asymptotic Properties of an Optimal Principal Eigenvalue with Spherical Weight and Dirichlet Boundary Conditions. *Nonlinear Analysis*, **224**, 113103. https://doi.org/10.1016/j.na.2022.113103

[14] Mazzoleni, D., Pellacci, B. and Verzini, G. (2020) Asymptotic Spherical Shapes in Some Spectral Optimization Problems. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **135**, 256-283. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2019.10.002