Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(9), 3981-3990
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.129389

Hans汉斯

一类非光滑多目标分式优化问题的二阶最优性条件

康格格，王海军*

太原师范学院数学与统计学院，山西 晋中

收稿日期：2023年8月12日；录用日期：2023年9月6日；发布日期：2023年9月13日

摘　要

本文研究一类带不等式约束和退化等式约束的多目标分式优化问题(FOP)存在局部弱Pareto最优解、二阶严格局部Pareto最优解的二阶必要条件，建立了(FOP)关于局部弱Pareto最优解的对偶Fritz-John型二阶必要条件，通过约束条件，将Fritz-John型必要条件变为Kuhn-Tucher型，并举例说明主要定理的适用性。本文主要工作旨在将多目标整式优化问题二阶最优性条件的研究推广到多目标分式优化问题。

关键词

多目标分式优化，局部弱Pareto最优解，二阶严格局部Pareto最优解，Kuhn-Tucher型必要条件

Second-Order Optimality Conditions for a Nonsmooth Multiobjective Fractional Optimization Problem

Gege Kang, Haijun Wang*

College of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: Aug. 12th, 2023; accepted: Sep. 6th, 2023; published: Sep. 13th, 2023

Abstract

In this paper, we consider a class of multiobjective fractional optimization problems (FOP) with inequality and degenerate equality constraints. Some second-order optimality conditions for a lo-

*通讯作者。

文章引用: 康格格, 王海军. 一类非光滑多目标分式优化问题的二阶最优性条件[J]. 应用数学进展, 2023, 12(9): 3981-3990. DOI: 10.12677/aam.2023.129389

cal weak Pareto minimum and a strict local Pareto minimum of order two are given. Then we establish Fritz-John type necessary conditions for local weak Pareto minimum to problem (FOP), meanwhile, by introducing constraint qualifications, we prove that the Fritz-John type necessary conditions become the Kuhn-Tucker type. The applicability of our conclusions is illustrated with some examples. The main purpose of this paper is to extend the study of second-order optimality conditions for multiobjective integer optimization problems to multiobjective fractional optimization problems.

Keywords

Multiobjective Fractional Optimization, Weak Local Pareto Minimum, Strict Local Pareto Minimum of Order Two, Kuhn-Tucker Type Necessary Conditions

1. 引言

多目标优化问题是最优化理论及其应用领域研究的一个重要方向，在经济分析、环境保护、工程技术等领域具有实际应用[1]。

当多目标优化问题中的目标函数由分式表示时，称该问题为多目标分式优化问题。目前，多目标分式优化问题的最优性条件和对偶性是优化理论领域的一个研究热点[2]-[11]。Dubey 等[2]建立了一类不可微多目标分式优化问题的最优性条件；Khanh 和 Tung [3]研究了非光滑半无限多目标分式问题的对偶 Karush-Kuhn-Tucker 条件；Singh 和 Laha [4]给出一类关于拟可微函数的多目标分式优化问题的最优性条件；Thu Thuy 和 Su [5]建立了一类不确定半无限非光滑多目标分式优化问题的 Karush-Kuhn-Tucker 型鲁棒最优性条件和对偶性；Su 和 Hang [6]依据具有稳定映射的切导数，给出了带约束的非光滑多目标分式优化问题的最优性条件和对偶定理；Gadhi 和 Rahou [7]研究了一类包含集值映射的多目标分式优化问题的充分最优性条件。

近年来，多目标优化问题的二阶最优性条件研究引起众多学者关注。Constantin 在文献[8]和[9]中研究了非光滑多目标优化问题，利用 Clarke 广义导数及 Pales-Zeidan 二阶上广义方向导数，提出了该类问题的一阶、二阶最优性条件；Luu [10]依据 Pales-Zeidan 二阶方向导数给出了带不等式、等式和集合约束的非光滑向量平衡优化问题的原始和对偶二阶 Frit-John 必要条件。Su 和 Hang [11]通过 Clarke 广义导数、Pales-Zeidan 二阶上广义方向导数以及 Ivanov 二阶广义方向导数建立了具有不等式约束的多目标分式优化问题的二阶必要最优性条件。受上述文献启发，本文研究一类带不等式约束和退化等式约束的多目标分式优化问题(FOP)，其中目标函数和不等式约束函数局部 Lipschitz 连续，利用 Clarke 广义导数以及 Pales-Zeidan 二阶上广义方向导数，给出问题(FOP)存在局部弱 Pareto 最优解、二阶严格局部 Pareto 最优解的二阶最优性条件的刻画，并在假设条件下，使该问题的局部弱 Pareto 最优解的对偶必要条件是 Kuhn-Tucher 型的。本文的主要定理推广了文献[8]和[9]中的相关结论。

本文结构如下：第二节给出本文用到的定义和结论；在第三节提出问题(FOP)关于局部弱 Pareto 最优解和二阶严格局部 Pareto 最优解的二阶必要最优性条件；第四节给出 Fritz-John 型二阶必要条件，在一定条件下，证明了 Fritz-John 型的二阶必要条件为 Kuhn-Tucker 型的。

2. 预备知识

设 X、Y 是 Banach 空间， $B(x,r)\subset X$ 表示中心为 x、半径为 $r>0$ 的开球，记 $\mathbb{R}_+^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i\geq 0, i=1,\cdots,n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的非负卦限锥。

设 $f:X\to\mathbb{R}$ 在 $\bar{x}\in X$ 处是局部 Lipschitz 的，f 在点 $\bar{x}$ 处的 Clarke 广义方向导数(见文献[12])，定义为

$$f^{\circ}(\bar{x};v):=\limsup_{(x,t)\to(\bar{x},0^+)}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t},\ v\in X,$$

在点处的 Pales-Zeidan 二阶上广义方向导数(见文献[13])，定义为

$$f^{\circ\circ}(\bar{x};v):=\limsup_{t\to 0^+}2\frac{f(\bar{x}+tv)-f(\bar{x})-tf^{\circ}(\bar{x};v)}{t^2},\ v\in X.$$

若极限

$$f'(\bar{x};v):=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(\bar{x}+tv)-f(\bar{x})}{t},\ v\in X,$$

存在，则称为 $f'(\bar{x};v)$ 函数 f 在点 $\bar{x}\in X$ 处关于方向 $v\in X$ 的方向导数。若 $f'(\bar{x};v)=f^{\circ}(\bar{x};v)$，则称函数 f 在点 $\bar{x}$ 处为正则函数。

设 $f:X\to Y$，若存在 $D_s f(\bar{x})\in\mathcal{L}(X,Y)$，使得对任意 $v\in X$，

$$\lim_{(x,t)\to(\bar{x},0^+)}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}=D_s f(\bar{x})(v),$$

则称 f 在 $\bar{x}$ 处严格可微，此时 $f^{\circ}(\bar{x};v)=D_s f(\bar{x})(v)$，其中，$\mathcal{L}(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 的连续线性算子空间。

引理 2.1 [11] 设 f，g 在 X 上局部 Lipschitz 连续， $\bar{x}\in X$， $v\in X$，若 $g(x)\neq 0$，且 g 在 $\bar{x}$ 处严格可微，则下列结论成立：

1) $\dfrac{f}{g}$ 在 X 上局部 Lipschitz 连续；

2) $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{\circ}(\bar{x};v)=\left[f^{\circ}(\bar{x};v)-\dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}g^{\circ}(\bar{x};v)\right]\dfrac{1}{g(\bar{x})}$；

3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{\circ\circ}(\bar{x};v)=\left[f^{\circ\circ}(\bar{x};v)-\dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}g^{\circ\circ}(\bar{x};v)\right]\dfrac{1}{g(\bar{x})}$。

设函数 $l:X\to Y$。若对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\|u\|<\delta$ 时，$\|l(\bar{x}+u)-l(\bar{x})-l'(\bar{x})u\|\leq\epsilon\|u\|$ 成立，则称 l 在 $\bar{x}$ 处 Frechet 可微(见文献[14])，其中 $l'(\bar{x})\in\mathcal{L}(X,Y)$ 是 l 在 $\bar{x}$ 处的 Frechet 导数。若对任意的 $u\in B(\bar{x},\epsilon)$， $l'(u)$ 存在，且 $l''(\bar{x}):=(l')'(\bar{x})\in\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y))$，则称函数 l 在 $\bar{x}$ 处二次 Frechet 可微。由归纳法可定义函数 l 在 $\bar{x}$ 处三次 Frechet 可微。此外，记

$$l''(\bar{x})(v)^2:=l''(\bar{x})(v)(v),$$

$$l^{(3)}(\bar{x})(v)^3:=l^{(3)}(\bar{x})(v)(v)(v).$$

若对任意满足 $l''(\bar{x})(v)(v)=0$ 的非零向量 $v\in X$，有 $l''(\bar{x})(v)X=Y$，则称 l 在 $\bar{x}$ 处 2-正则(见文献[15])。

3. 二阶必要条件

本节讨论多目标分式优化问题(FOP)关于局部弱Pareto最优解和二阶严格局部Pareto最优解的二阶最优性条件。

考虑以下多目标分式优化问题(FOP)：

$$\begin{aligned} &\min \left(\frac{f}{g}\right)(x) \\ &\text{s.t.} \quad h_j(x) \le 0, \quad j = \{1,\cdots,m\} \\ &\qquad\ l(x) = 0 \end{aligned}$$

其中，$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\left(\frac{f_1}{g_1}\right)(x), \left(\frac{f_2}{g_2}\right)(x), \cdots, \left(\frac{f_p}{g_p}\right)(x)\right)$，$I = \{1,2,\cdots,p\}$。

函数 $f_i : X \to \mathbb{R}$，$g_i : X \to \mathbb{R}$，$g_i(x) > 0$，$\forall i \in I$，函数 $h_j : X \to \mathbb{R}$，$\forall j \in J := \{1,\cdots,m\}$，集合 $H := \{x \in X : h_j(x) \le 0, j \in J\}$，$D := \{x \in X : l(x) = 0\}$，其中 $l = (l_1,\cdots,l_r) : X \to \mathbb{R}^r$，$S = H \cap D$ 表示问题(FOP)的可行集。对任意 $\bar{x} \in S$，$J(\bar{x}) := \{j \in J : h_j(\bar{x}) = 0\}$ 表示问题(FOP)的积极约束指标集。

本文假设函数 f_i，$g_i(\forall i \in I)$，$h_j(\forall j \in J(\bar{x}))$ 局部 Lipschitz 连续，$g_i(\forall i \in I)$ 在点 $\bar{x}$ 处严格可微，$h_j(\forall j \notin J(\bar{x}))$ 在 $\bar{x}$ 处连续，l 在 $\bar{x}$ 处连续，在 $\bar{x}$ 处三次 Frechet 可微，$l'(\bar{x}) = 0$，且 l 在 $\bar{x}$ 处 2-正则。

设 $\bar{x} \in X$，$v \in X$，定义如下集合：

$$I(\bar{x}; v) = \left\{ i \in I : \left(\frac{f_i}{g_i}\right)^{\circ}(\bar{x}; v) = 0 \right\},$$

$$J(\bar{x}; v) = \left\{ j \in J(\bar{x}) : h_j^{\circ}(\bar{x}; v) = 0 \right\}。$$

定义 3.1 [8] 设 $\bar{x} \in H$，称 v 是点 $\bar{x}$ 处的临界方向，若

$$\begin{cases} \left(\frac{f_i}{g_i}\right)^{\circ}(\bar{x}; v) \le 0, & \forall i \in I, \\ h_j^{\circ}(\bar{x}; v) \le 0, & \forall j \in J(\bar{x}), \end{cases}$$

定义 3.2 [11] 设 $\bar{x} \in S$，$\mathcal{V}(\bar{x})$ 表示 $\bar{x}$ 的邻域 V 所组成的集族，

1) 若存在 $V \in \mathcal{V}(\bar{x})$，使得

$$\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x})\right) \cap -int\mathbb{R}_+^p = \varnothing \quad (\forall x \in S \cap V, x \ne \bar{x}),$$

则称 $\bar{x}$ 是(FOP)的局部弱 Pareto 最优解。其中 $int\mathbb{R}_+^p = \{x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1,\cdots,n\}$。

2) 若存在常数 $\alpha > 0$ 和 $V \in \mathcal{V}(\bar{x})$，使得

$$\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x) + \mathbb{R}_+^p\right) \cap B\left(\left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}), \alpha\|x - \bar{x}\|^2\right) = \varnothing \quad (\forall x \in S \cap V, x \ne \bar{x}),$$

则称 $\bar{x}$ 是(FOP)的二阶严格局部 Pareto 最优解。

显然，当 $\bar{x}$ 是(FOP)的二阶严格局部 Pareto 最优解时，$\bar{x}$ 也是(FOP)的局部弱 Pareto 最优解。

定理 3.1 设 $\bar{x} \in S$ 是问题(FOP)的局部弱 Pareto 最优解，$l'(\bar{x}) = 0$，则对每一个满足 $l''(\bar{x})(v)(v) = 0$ 的非零临界方向 v，关于 $\omega \in X$ 的系统(3.1)无解。

$$\begin{cases} f_i^{\circ}(\bar{x};\omega)+f_i^{\circ\circ}(\bar{x};v)-s_i\left[g_i^{\circ\circ}(\bar{x};\omega)+g_i^{\circ\circ}(\bar{x};v)\right]<0, & \forall i\in I(\bar{x};v),\\ h_j^{\circ}(\bar{x};\omega)+h_j^{\circ\circ}(\bar{x};v)<0, & \forall j\in J(\bar{x};v),\\ l^{(3)}(\bar{x})(v)(v)(v)+3l''(\bar{x})(v)(\omega)=0. \end{cases} \tag{3.1}$$

证 由引理 2.1 知，$\dfrac{f_i}{g_i}$ 在 X 上局部 Lipschitz 连续，且

$$\left(\frac{f_i}{g_i}\right)^{\circ}(\bar{x};v)=\left[f_i^{\circ}(\bar{x};v)-\frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})}g_i^{\circ}(\bar{x};v)\right]\frac{1}{g_i(\bar{x})}。$$

令 $s_i=\dfrac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})}$，若 $\left(\dfrac{f_i}{g_i}\right)^{\circ}(\bar{x};v)=0$，则根据 $g_i(\bar{x})>0$ 可得

$$f_i^{\circ}(\bar{x};v)-s_ig_i^{\circ}(\bar{x};v)=0，$$

因此

$$\begin{aligned} I(\bar{x};v)&=\left\{i\in I:\left(\frac{f_i}{g_i}\right)^{\circ}(\bar{x};v)=0\right\}\\ &=\left\{i\in I: f_i^{\circ}(\bar{x};v)-s_ig_i^{\circ}(\bar{x};v)=0\right\}. \end{aligned}$$

因为对每一个非零临界方向 v，

$$\begin{cases} \left(\dfrac{f_i}{g_i}\right)^{\circ}(\bar{x};v)\le 0, & \forall i\in I,\\ h_j^{\circ}(\bar{x};v)\le 0, & \forall j\in J(\bar{x}), \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} f_i^{\circ}(\bar{x};v)\le s_ig_i^{\circ}(\bar{x};v), & \forall i\in I,\\ h_j^{\circ}(\bar{x};v)\le 0, & \forall j\in J(\bar{x}), \end{cases}$$

根据[8]定理 4 可得，对每一个满足 $l''(\bar{x})(v)(v)=0$ 的非零临界方向 v，关于 $\omega\in X$ 的系统(3.2)无解，

$$\begin{cases} \left(\dfrac{f_i}{g_i}\right)^{\circ}(\bar{x};\omega)+\left(\dfrac{f_i}{g_i}\right)^{\circ\circ}(\bar{x};v)<0, & \forall i\in I(\bar{x};v),\\ h_j^{\circ}(\bar{x};\omega)+h_j^{\circ\circ}(\bar{x};v)<0, & \forall j\in J(\bar{x};v),\\ l^{(3)}(\bar{x})(v)(v)(v)+3l''(\bar{x})(v)(\omega)=0. \end{cases} \tag{3.2}$$

则由引理 2.1 可得，系统(3.2)等价于系统(3.3)：

$$\begin{cases} f_i^{\circ}(\bar{x};\omega)-s_ig_i^{\circ}(\bar{x};\omega)+f_i^{\circ\circ}(\bar{x};v)-s_ig_i^{\circ\circ}(\bar{x};v)<0, & \forall i\in I(\bar{x};v)\\ h_j^{\circ}(\bar{x};\omega)+h_j^{\circ\circ}(\bar{x};v)<0, & \forall j\in J(\bar{x};v),\\ l^{(3)}(\bar{x})(v)(v)(v)+3l''(\bar{x})(v)(\omega)=0. \end{cases} \tag{3.3}$$

因此，对每一个满足 $l''(\bar{x})(v)(v)=0$ 的非零临界方向 v，关于 $\omega\in X$ 的系统(3.1)无解，证毕。

定理 3.2 设 $\bar{x}\in S$ 是问题(FOP)的二阶严格局部 Pareto 最优解，$l'(\bar{x})=0$，则对每一个满足 $l''(\bar{x})(v)(v)=0$ 的非零临界方向 v，关于 $\omega\in X$ 的系统(3.4)无解。

$$\begin{cases} f_i^{\circ}\left(\bar{x};\omega\right)+f_i^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)-s_i\left[g_i^{\circ}\left(\bar{x};\omega\right)+g_i^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)\right]\le 0, & \forall i\in I\left(\bar{x};v\right), \\ h_j^{\circ}\left(\bar{x};\omega\right)+h_j^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)<0, & \forall j\in J\left(\bar{x};v\right), \\ l^{(3)}\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(v\right)\left(v\right)+3l''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(\omega\right)=0. \end{cases} \tag{3.4}$$

证 因为 $\bar{x}\in S$ 是问题(FOP)的二阶严格局部 Pareto 最优解，则根据[9]定理 11 可得，对每一个满足 $l''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(v\right)=0$ 的非零临界方向 v，关于 $\omega\in X$ 的系统(3.5)无解，

$$\begin{cases} \left(\dfrac{f_i}{g_i}\right)^{\circ}\left(\bar{x};\omega\right)+\left(\dfrac{f_i}{g_i}\right)^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)\le 0, & \forall i\in I\left(\bar{x};v\right), \\ h_j^{\circ}\left(\bar{x};\omega\right)+h_j^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)<0, & \forall j\in J\left(\bar{x};v\right) \\ l^{(3)}\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(v\right)\left(v\right)+3l''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(\omega\right)=0. \end{cases} \tag{3.5}$$

则根据引理 2.1 可得，系统(3.5)等价于系统(3.6)：

$$\begin{cases} f_i^{\circ}\left(\bar{x};\omega\right)-s_ig_i^{\circ}\left(\bar{x};\omega\right)+f_i^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)-s_ig_i^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)\le 0, & \forall i\in I\left(\bar{x};v\right), \\ h_j^{\circ}\left(\bar{x};\omega\right)+h_j^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)<0, & \forall j\in J\left(\bar{x};v\right), \\ l^{(3)}\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(v\right)\left(v\right)+3l''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(\omega\right)=0. \end{cases} \tag{3.6}$$

因此，对每一个满足 $l''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(v\right)=0$ 的非零临界方向 v，关于 $\omega\in X$ 的系统(3.4)无解，证毕。

注 对任意 $i\in I$，$g_i\left(x\right)\equiv 1$ 时，定理 3.1 即为文献[8]的定理 4，定理 3.2 即为文献[9]的定理 11。

下面给出例子说明定理 3.1 和定理 3.2 中主要结果的应用。

例 对于问题(FOP)，设 $X=\mathbb{R}^2$，$p=m=2$，$r=1$，对任意 $x=\left(x_1,x_2\right)$，

$f_1\left(x\right)=x_1-3x_1x_2^2+x_2-2x_2^2+2$，

$$f_2\left(x\right)=2\left(x_1+x_2\right)^2-\left|x_1-x_2\right|+3,$$

$$g_1\left(x\right)=1+x_1^2-x_2^2,$$

$$g_2\left(x\right)=1+\left(x_1+x_2\right)^2,$$

$$h_1\left(x\right)=\left|x_2\right|+x_1-x_2^2$$

$$h_2\left(x\right)=x_1^2+x_2^2-2,$$

$$l\left(x\right)=x_1^2+x_2^3-x_1x_2=0。$$

集合 $I=J=\{1,2\}$，$H=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in\mathbb{R}^2:h_j\left(x\right)\le 0,\ j\in J\right\}$，$D=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in\mathbb{R}^2:l\left(x\right)=0\right\}$，点 $\bar{x}=\left(0,0\right)\in S=H\cap D$。积极约束指标集 $J\left(\bar{x}\right)=\{1\}$。对于非零临界方向 v，有 $I\left(\bar{x};v\right)=\{2\}$，$J\left(\bar{x};v\right)=\{1\}$，参数 $s=\left(s_1,s_2\right)=\left(2,3\right)$。函数 f_1, f_2, g_1, g_2, h_1 局部 Lipschitz 连续，g_1, g_2 在 $\bar{x}$ 处严格可微，h_2 在 $\bar{x}$ 处连续。函数 l 在 $\bar{x}$ 处连续，在 $\bar{x}$ 处三次 Frechet 可微，$l\left(\bar{x}\right)=0$，$l'\left(\bar{x}\right)=0$，且 l 在 $\bar{x}$ 处 2-正则。

临界方向 v 在 $\bar{x}$ 处满足条件

$$\begin{cases} \left(\dfrac{f_1}{g_1}\right)^{\circ}\left(\bar{x};v\right)\le 0, \\ \left(\dfrac{f_2}{g_2}\right)^{\circ}\left(\bar{x};v\right)\le 0, \\ h_1^{\circ}\left(\bar{x};v\right)\le 0, \end{cases}$$

因此，$v_1+v_2\le 0$，$-|v_1-v_2|\le 0$，$|v_2|+v_1\le 0$。

下面验证定理 3.1 和定理 3.2 的必要条件。

对于非零临界方向 v，满足 $l''(\bar{x})(v)(v)=2v_1^2-2v_1v_2=0$，即 $v_1(v_1-v_2)=0$，且 $v_1+v_2\le 0$，$-|v_1-v_2|\le 0$，$|v_2|+v_1\le 0$，因此 $v_1-v_2=0$。

设 $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in T_{\bar{x}}^2 D$，$v\in T_{\bar{x}}D$，满足

$$l''(\bar{x})(v)(v)=0,$$

$$l^{(3)}(\bar{x})(v)(v)(v)+3l''(\bar{x})(v)(\omega)=6v_2^3+6v_1\omega_1-3v_2\omega_1-3v_1\omega_2=0,$$

即当 $v_1=v_2<0$ 时，$2v_1^2+\omega_1-\omega_2=0$。

对于非零临界方向 v，定理 3.1 (定理 3.2)的系统

$$\begin{cases} f_2^{\circ}(\bar{x};\omega)+f_2^{\circ\circ}(\bar{x};v)-s_2\left[g_2^{\circ}(\bar{x};\omega)+g_2^{\circ\circ}(\bar{x};v)\right]=-|\omega_1-\omega_2|-16v_1^2<0(\le 0), \\ h_1^{\circ}(\bar{x};\omega)+h_1^{\circ\circ}(\bar{x};v)=|\omega_2|+\omega_1-2v_1^2<0, \\ 2v_1^2+\omega_1-\omega_2=0, \end{cases}$$

有解，即 $\omega\in X$ 满足 $\omega_1<0$，$\omega_1<\omega_2$，$2v_1^2+\omega_1-\omega_2=0$ 是一个解。因此定理 3.1 和定理 3.2 的必要条件不满足，点 $\bar{x}=(0,0)$ 不是问题(FOP)的局部弱 Pareto 最优解和二阶严格局部 Pareto 最优解。

4. Kuhn-Tucker 型条件

本节讨论问题(FOP)的局部弱 Pareto 最优解的 Fritz-John 型二阶必要条件，在一定条件下，Fritz-John 型的二阶必要条件为 Kuhn-Tucker 型的。

定理 4.1 设 $\bar{x}\in S$ 是问题(FOP)的弱局部 Pareto 最优解，函数 f_i，$g_i>0(\forall i\in I)$，$h_j(\forall j\in J(\bar{x}))$ 在 $\bar{x}$ 处严格可微，$h_j(j\notin J(\bar{x}))$ 在 $\bar{x}$ 处连续。函数 $l:X\to\mathbb{R}^r$ 在 $\bar{x}$ 处连续，在 $\bar{x}$ 处三次 Frechet 可微，$l'(\bar{x})=0$，且 l 在 $\bar{x}$ 处 2-正则。则对满足

$$\begin{cases} \left(\dfrac{f_i}{g_i}\right)^{\circ\circ}(\bar{x};v)<\infty, \quad \forall i\in I(\bar{x};v), \\ h_j^{\circ\circ}(\bar{x};v)<\infty, \quad \forall j\in J(\bar{x};v), \\ l'(\bar{x})(v)(v)=0, \end{cases}$$

的非零临界方向 v，存在实数 $e\ge 0$，v_k，$k\in K$，$\lambda_i\ge 0$，$i\in I$，μ_j，$j\in J$，其中

$$\{\lambda_i,\mu_j: i\in I,\ j\in J(\bar{x})\}$$

不全为零，使得

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\left(D_s f_i(\bar{x})-s_iD_sg_i(\bar{x})\right)+\sum_{j\in J(\bar{x})}\mu_jD_sh_j(\bar{x})+\sum_{k\in K}3v_kl_k''(\bar{x})(v)=0, \tag{4.1}$$

$$\lambda_i\left(D_sf_i(\bar{x})(v)-s_iD_sg_i(\bar{x})(v)\right)=0, \tag{4.2}$$

$$\mu_jD_sh_j(\bar{x})(v)=0,\quad \forall j\in J(\bar{x}), \tag{4.3}$$

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\left(f_i^{\circ\circ}(\bar{x};v)-s_ig_i^{\circ\circ}(\bar{x};v)\right)+\sum_{j\in J(\bar{x})}\mu_jh_j^{\circ\circ}(\bar{x};v)+\sum_{k\in K}v_kl_k^{(3)}(\bar{x})(v)(v)(v)=e\ge 0, \tag{4.4}$$

$$\mu_jh_j(\bar{x})=0,\quad \forall j\in J. \tag{4.5}$$

证 由函数 f_i， $g_i\left(\forall i\in I\right)$， $h_j\left(\forall j\in J\left(\bar{x}\right)\right)$ 在 $\bar{x}$ 处严格可微知，

$$f_i^{\circ}\left(\bar{x};v\right)=D_s f_i\left(\bar{x}\right)\left(v\right),$$

$$g_i^{\circ}\left(\bar{x};v\right)=D_s g_i\left(\bar{x}\right)\left(v\right),$$

$$h_j^{\circ}\left(\bar{x};v\right)=D_s h_j\left(\bar{x}\right)\left(v\right),$$

又由引理 2.1 知

$$\left(\frac{f_i}{g_i}\right)^{\circ}\left(\bar{x};v\right)=\left[f_i^{\circ}\left(\bar{x};v\right)-\frac{f_i\left(\bar{x}\right)}{g_i\left(\bar{x}\right)}g_i^{\circ}\left(\bar{x};v\right)\right]\frac{1}{g_i\left(\bar{x}\right)},$$

令 $s_i=\dfrac{f_i\left(\bar{x}\right)}{g_i\left(\bar{x}\right)}$，则

$$\left(\frac{f_i}{g_i}\right)^{\circ}\left(x;v\right)=\left[D_s f_i\left(\bar{x}\right)\left(v\right)-s_i D_s g_i\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\right]\frac{1}{g_i\left(\bar{x}\right)},$$

因此，根据 $g_i\left(\bar{x}\right)>0$ 得，对非零临界方向 v，

$$\begin{cases}D_s f_i\left(\bar{x}\right)\left(v\right)-s_i D_s g_i\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\le 0, & \forall i\in I,\\ D_s h_j\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\le 0, & \forall j\in J\left(\bar{x}\right).\end{cases}$$

因 $\bar{x}$ 是问题(FOP)的弱局部 Pareto 最优解，则由[8]推论 1 得， $I\left(\bar{x};v\right)\cup J\left(\bar{x};v\right)\ne\varnothing$。由定理 3.1 知，系统(4.6)无解 $\omega\in X$：

$$\begin{cases}D_s f_i\left(\bar{x}\right)\left(\omega\right)-s_i D_s g_i\left(\bar{x}\right)\left(\omega\right)+\left(f_i^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)-s_i g_i^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)\right)<0, & \forall i\in I\left(\bar{x};v\right),\\ D_s h_j\left(\bar{x}\right)\left(\omega\right)+h_j^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)<0, & \forall j\in J\left(\bar{x};v\right),\\ 3l_k''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(\omega\right)+l_k^{(3)}\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(v\right)\left(v\right)=0, & \forall k\in K.\end{cases} \tag{4.6}$$

设 $K_2=I\left(\bar{x};v\right)\cup J\left(\bar{x};v\right)$， $K_3=K$。根据[8]引理 1 得，存在 $e\ge 0$， $\lambda_i\ge 0, i\in I\left(\bar{x};v\right)$， $\mu_j, j\in J\left(\bar{x};v\right)$， $v_k\in R, k\in K$ 满足 $\left\{e,\lambda_i,\mu_j: i\in I\left(\bar{x};v\right), j\in J\left(\bar{x};v\right)\right\}$ 不都为 0，使得

$$\sum_{i\in I\left(\bar{x};v\right)}\lambda_i\left(D_s f_i\left(\bar{x}\right)-s_i D_s g_i\left(\bar{x}\right)\right)+\sum_{j\in J\left(\bar{x};v\right)}\mu_j D_s h_j\left(\bar{x}\right)+\sum_{k\in K}3v_k l_k''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)=0, \tag{4.7}$$

$$-\sum_{i\in I\left(\bar{x};v\right)}\lambda_i\left(f_i^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)-s_i g_i^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)\right)-\sum_{j\in J\left(\bar{x};v\right)}\mu_j h_j^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)-\sum_{k\in K}3v_k l_k^{(3)}\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(v\right)\left(v\right)=-e\le 0. \tag{4.8}$$

下证 $\left\{\lambda_i,\mu_j: i\in I\left(\bar{x};v\right), j\in J\left(\bar{x};v\right)\right\}$ 不全为 0。反之，假设 $\left\{\lambda_i,\mu_j: i\in I\left(\bar{x};v\right), j\in J\left(\bar{x};v\right)\right\}$ 等于 0，则由(4.7)可得

$$\sum_{k\in K}3v_k l_k''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)=0.$$

对任意满足 $l''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(v\right)=0$ 的非零临界方向 v，l 在 $\bar{x}$ 处 2-正则，则 $l_k''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)$ 满射。根据[8]引理 2 可得，向量 $l_1''\left(\bar{x}\right)\left(v\right),\cdots,l_r''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)$ 线性无关，故 $v_k=0\left(k\in K\right)$。因此，根据(4.8)可得， $e=0$，该结果与 $\left\{e,\lambda_i,\mu_j: i\in I\left(\bar{x};v\right), j\in J\left(\bar{x};v\right)\right\}$ 不全为 0 相矛盾，假设不成立。另外，当 $i\in I\setminus I\left(\bar{x};v\right)$ 时，令 $\lambda_i=0$，当 $j\in J\left(\bar{x}\right)\setminus J\left(\bar{x};v\right)$ 且 $j\in J\setminus J\left(\bar{x}\right)$ 时，令 $\mu_j=0$。故(4.1)和(4.4)成立。

当 $i\in I\setminus I\left(\bar{x};v\right)$ 时， $\lambda_i=0$；当 $i\in I\left(\bar{x};v\right)$ 时，

$$D_s f_i\left(\bar{x}\right)\left(v\right)-s_i D_s g_i\left(\bar{x}\right)\left(v\right)=0,$$

故对任意 $i\in I$ ， $\lambda_i\left(D_s f_i\left(\bar{x}\right)\left(v\right)-s_i D_s g_i\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\right)=0$ ，即(4.2)成立。

当 $j\in J\left(\bar{x}\right)\setminus J\left(\bar{x};v\right)$ 时， $\mu_j=0$ ；当 $j\in J\left(\bar{x};v\right)$ 时，

$$D_s h_j\left(\bar{x}\right)\left(v\right)=0,$$

故对任意 $j\in J\left(\bar{x}\right)$ ， $\mu_j D_s h_j\left(\bar{x}\right)\left(v\right)=0$ ，即(4.3)成立。

当 $j\in J\left(\bar{x}\right)$ 时， $h_j\left(\bar{x}\right)=0$ ，故对任意 $j\in J$ ， $\mu_j h_j\left(\bar{x}\right)=0$ ，即(4.5)成立。

综上可得， $e,\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\mu_1,\cdots,\mu_m,\nu_1,\cdots,\nu_r$ 满足定理条件，证毕。

定理 4.2 假设定理 4.1 的所有条件成立，且在点 $\bar{x}$ 处，在方向 v 上，存在向量 $\omega\in X$ ，使得(4.9)成立，

$$\begin{cases} h_j^{\circ}\left(\bar{x};\omega\right)+h_j^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)<0, & \forall j\in J\left(\bar{x};v\right), \\ l_k^{(3)}\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(v\right)\left(v\right)+3l_k''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(\omega\right)=0, & \forall k\in K, \end{cases} \tag{4.9}$$

则 $\lambda_i\left(i\in I\right)$ 不全为零。

证 假设对任意 $i\in I$ ， $\lambda_i=0$ ，由定理 4.1 知， $\left\{\lambda_i,\mu_j:i\in I,j\in J\left(\bar{x}\right)\right\}$ 不全为零，则至少存在一个 $\mu_j>0\left(j\in J\left(\bar{x}\right)\right)$ 。

又由定理 4.1 证明知，当 $j\in J\left(\bar{x}\right)\setminus J\left(\bar{x};v\right)$ 时， $\mu_j=0$ ，且根据假设，在点 $\bar{x}$ 处，在方向 v 上，存在向量 $\omega\in X$ ，使得(4.9)成立，则由(4.1)和(4.4)有

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in I}\lambda_i\left[\left(D_s f_i\left(\bar{x}\right)\left(\omega\right)+f_i^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)\right)-s_i\left(D_s g_i\left(\bar{x}\right)\left(\omega\right)+g_i^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)\right)\right] \\ &+\sum_{j\in J\left(\bar{x}\right)}\mu_j\left(D_s h_j\left(\bar{x}\right)\left(\omega\right)+h_j^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)\right)+\sum_{k\in K}\nu_k 3l_k''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(\omega\right)+l_k^{(3)}\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(v\right)\left(v\right)\geq 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

若对任意 $i\in I$ ，假设 $\lambda_i=0$ ，则

$$\sum_{j\in J\left(\bar{x}\right)}\mu_j\left(D_s h_j\left(\bar{x}\right)\left(\omega\right)+h_j^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)\right)+\sum_{k\in K}\nu_k 3l_k''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(\omega\right)+l_k^{(3)}\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(v\right)\left(v\right)\geq 0, \tag{4.11}$$

另外，由(4.9)有

$$\sum_{j\in J\left(\bar{x}\right)}\mu_j\left(D_s h_j\left(\bar{x}\right)\left(\omega\right)+h_j^{\circ\circ}\left(\bar{x};v\right)\right)+\sum_{k\in K}\nu_k 3l_k''\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(\omega\right)+l_k^{(3)}\left(\bar{x}\right)\left(v\right)\left(v\right)\left(v\right)<0, \tag{4.12}$$

则(4.12)与(4.11)相矛盾，故假设不成立，证毕。

在一定条件下，定理 4.2 得出目标函数所对应的乘子不等于零，即定理 4.1 的 Fritz-John 型二阶必要条件为 Kuhn-Tucker 型的。

注 对任意 $i\in I$ ， $g_i\left(x\right)\equiv 1$ 时，定理 4.1 即为文献[8]中的定理 5，定理 4.2 即为文献[9]中的定理 7。

5. 总结与展望

本文建立了带不等式约束和退化等式约束的局部 Lipschitz 多目标分式优化问题(FOP)，利用 Clarke 广义导数以及 Pales-Zeidan 二阶上广义方向导数，给出问题(FOP)存在局部弱 Pareto 最优解、二阶严格局部 Pareto 最优解的二阶最优性条件，并在给定的假设条件下，使该问题的局部弱 Pareto 最优解的 Fritz-John 型必要条件变为 Kuhn-Tucher 型的。本文主要定理推广了文献[8]和[9]中的相关结论。进一步可考虑非 Lipschitz 条件下多目标分式优化问题的二阶最优性条件。

致　谢

作者对审稿人表示衷心的感谢！

基金项目

山西省科技创新人才团队专项资助(202204051002018)；山西省基础研究计划项目(自由探索类)(20210302124529)；太原师范学院研究生教育创新项目。

参考文献

[1] Leung, Y.W. and Wang, Y. (2000) Multiobjective Programming Using Uniform Design and Genetic Algorithm. *IEEE Transactions on Systems*, *Man*, *and Cybernetics*, *Part C* (*Applications and Reviews*), **30**, 293-304. https://doi.org/10.1109/5326.885111

[2] Dubey, R., Gupta, S.K. and Khan, M.A. (2015) Optimality and Duality Results for a Nondifferentiable Multiobjective Fractional Programming Problem. *Journal of Inequalities and Applications*, **2015**, Article No. 354. https://doi.org/10.1186/s13660-015-0876-0

[3] Khanh, P.Q. and Tung, N.M. (2020) On the Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification and Karush-Kuhn-Tucker Conditions in Nonsmooth Semi-Infinite Multiobjective Programming. *Optimization Letters*, **14**, 2055-2072. https://doi.org/10.1007/s11590-019-01529-3

[4] Singh, H.N. and Laha, V. (2022) On Quasidifferentiable Multiobjective Fractional Programming. *Iranian Journal of Science and Technology*, *Transactions A*: *Science*, **46**, 917-925. https://doi.org/10.1007/s40995-022-01309-2

[5] Thu Thuy, N.T. and Su, T.V. (2023) Robust Optimality Conditions and Duality for Nonsmooth Multiobjective Fractional Semi-Infinite Programming Problems with Uncertain Data. *Optimization*, **72**, 1745-1775. https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2038154

[6] Su, T.V. and Hang, D.D. (2022) Optimality and Duality in Nonsmooth Multiobjective Fractional Programming Problem with Constraints. 4*OR*, **20**, 105-137. https://doi.org/10.1007/s10288-020-00470-x

[7] Gadhi, N.A. and Rahou, F.Z. (2023) Sufficient Optimality Conditions and Mond-Weir Duality Results for a Fractional Multiobjective Optimization Problem. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **19**, 1001-1014. https://doi.org/10.3934/jimo.2021216

[8] Constantin, E. (2019) Necessary Conditions for Weak Efficiency for Nonsmooth Degenerate Multiobjective Optimization Problems. *Journal of Global Optimization*, **75**, 111-129. https://doi.org/10.1007/s10898-019-00807-9

[9] Constantin, E. (2021) Necessary Conditions for Weak Minima and for Strict Minima of Order Two in Nonsmooth Constrained Multiobjective Optimization. *Journal of Global Optimization*, **80**, 177-193. https://doi.org/10.1007/s10898-021-01016-z

[10] Luu, D.V. (2018) Second-Order Necessary Efficiency Conditions for Nonsmooth Vector Equilibrium Problems. *Journal of Global Optimization*, **70**, 437-453. https://doi.org/10.1007/s10898-017-0556-3

[11] Su, T.V. and Hang, D.D. (2023) Second-Order Optimality Conditions in Locally Lipschitz Multiobjective Fractional Programming Problem with Inequality Constraints. *Optimization*, **72**, 1171-1198. https://doi.org/10.1080/02331934.2021.2002328

[12] Clarke, F.H. (1983) Nonsmooth Analysis and Optimization. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, **5**, 847-853.

[13] Pales, Z. and Zeidan, V.M. (1994) Nonsmooth Optimum Problems with Constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **32**, 1476-1502. https://doi.org/10.1137/S0363012992229653

[14] Alekseev, V.M., Tikhomirov, V.M. and Fomin, S.V. (1987) Optimal Control. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7551-1

[15] Tret'Yakov, A.A. (1984) Necessary and Sufficient Conditions for Optimality of *p*-th Order. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **24**, 123-127. https://doi.org/10.1016/0041-5553(84)90132-0