Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(9), 3933-3944**
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.129385

Hans汉斯

多项式性质及其应用

纪宏佳[*]，郑　蕊，王一婷

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2023年8月9日；录用日期：2023年9月3日；发布日期：2023年9月11日

摘　要

整系数多项式与纽结多项式有着十分密切的关系，本文研究了多项式在纽结理论中的应用。通过讨论多项式导数在某些点的性质，分别给出六次整系数多项式以及宽度为十的十四次整系数多项式是纽结多项式的判别方法。这对研究纽结理论的核心问题之一纽结的分类具有重要意义。

关键词

整系数多项式，纽结多项式，琼斯多项式

Properties of Polynomial and Its Applications

Hongjia Ji[*], Rui Zheng, Yiting Wang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Aug. 9th, 2023; accepted: Sep. 3rd, 2023; published: Sep. 11th, 2023

Abstract

There is a very close relationship between integer coefficient polynomials and knot polynomials. In this paper, the application of polynomials in Knot theory is studied. By discussing the properties of the derivatives of polynomials at some points, the methods for judging that a sixth order integer coefficient polynomial and a fourteenth order integer coefficient polynomial with a width of ten are Knot polynomial are given respectively. This is of great significance for the classification of knots, which is one of the core issues in the study of knot theory.

Keywords

Integral Coefficient Polynomial, Knot Polynomial, Jones Polynomial

[*]第一作者。

文章引用: 纪宏佳, 郑蕊, 王一婷. 多项式性质及其应用[J]. 应用数学进展, 2023, 12(9): 3933-3944.
DOI: 10.12677/aam.2023.129385

1. 引言

一元多项式是代数学的重要研究对象，求多项式根一直是热点研究课题，它们的思想和方法都得到了很多应用，不仅促进了代数学的发展，对推动数学的发展都起到非常重要的作用。一元多项式的整除性及因式分解问题是该领域的核心内容，其中带余除法是一元多项式因式分解一个重要手段。在关于一元多项式的加法、乘法运算规律以及它们加法满足交换律和结合律继承了数的运算法则，从而构成了多项式环。多项式函数是基础、重要且形式简单的函数，它的应用非常广泛，如参考文献[1] [2]中给出了多项式函数在判断生物种群数目、数值近似上的应用。包括多项式零点分布[3]等性质都得到了非常重要的应用。随着对多项式的深入研究，它们的方法将在很多学科和领域得到应用(详细见参考文献[1] [4] [5])。

纽结理论起源于 20 世纪，自纽结理论发展以来，纽结的分类一直作为核心问题，纽结多项式的判定对研究纽结的分类具有重要意义。第一个纽结多项式由 J. Alexander 发现，具有很强的拓扑意义，在之后很长一段时间里，人们通过研究 Alexander 多项式来探究纽结的分类。1984 年，V. F. R. Jones 在研究算子代数的过程中发现了 Jones 多项式，其作为一个新的纽结不变量，加之其计算十分简单，可以作为研究纽结不变量的一个基础，促进了纽结理论的发展并引来了极大的关注，纽结理论也被广泛地应用到图论、分子生物学、物理学、信息安全等领域。整系数多项式与纽结多项式之间有着密切的联系，整系数多项式为 Alexander 多项式的充要条件已经给出，继 Jones 多项式的提出之后，整系数多项式为纽结 Jones 多项式的判定方法成了近些年的热门研究内容。

本文有三部分内容，第一部分是预备知识，给出了一元多项式、纽结以及 Jones 多项式的定义和 Jones 多项式的一个判别方法。第二部分讨论了多项式在某些点处的性质给出了六次整系数多项式纽结多项式的必要条件，并研究了宽度为十的整系数多项式为纽结多项式的必要条件。第三部分对本文的内容进行了总结。

2. 预备知识

定义 1.1 [6]设 n 是一非负整数，形式表达式：

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 全属于数域 P，称为系数在数域 P 中的一个一元多项式，或者简称数域 P 上的一元多项式。特别的，若系数均取整数，则一元多项式称为整系数多项式。

定义 1.2 [7]三维空间中的简单闭曲线称为纽结。

定义 1.3 [7]设 L 为有向链环，则 L 的 Jones 多项式 $V(L)$ 定义为：

$$V(L)(t) = f(L)\left(t^{-\frac{1}{4}}\right)$$

是关于变元 t 的整系数多项式，其中 $f(L)$ 是有向链环的同痕不变量。

引理 1.1 [8]设 $V_K(t)$ 为纽结 K 的 Jones 多项式，则有：

1) $V_K(1) = 1$；

2) $V_k'(1)=0$；

3) $V_K\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)=1$；

4) $V_K(i)=\pm 1$；

5) $V_K\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)=\pm\left(i\sqrt{3}\right)^{DimH_1(D_L,Z_3)}$ 是 $\pm\left(\sqrt{3}\right)^{DimH_1(D_L,Z_3)}$ 或是 $\pm\left(\sqrt{3}\right)^{DimH_1(D_L,Z_3)}i$；

6) $V_k^{(n)}(1)\in 6nZ\,(n\geq 3)$ （$V_k^{(n)}(1)$ 表示 n 阶导数的值）。

3. 纽结理论中的多项式

定理 2.1 若

$$f(t)=a_6t^6+a_5t^5+a_4t^4+a_3t^3+a_2t^2+a_1t^1+a_0\left(a_6\neq 0,a_i\in Z,i=1,2,\cdots,6\right)$$

为某一纽结的琼斯多项式，则系数满足关系式

$$\begin{cases}a_6=a_0-1\\a_5=-a_0+1\\a_4=a_0-1\\a_3=-2a_0+2\\a_2=a_0-1\\a_1=-a_0+1\end{cases}\left(a_0\neq 1\right)$$

或者

$$\begin{cases}a_6=a_0\\a_5=-a_0\\a_4=a_0-1\\a_3=-2a_0+1\\a_2=a_0\\a_1=-a_0+1\end{cases}\left(a_0\neq 0\right)$$

证明：若 $f(t)$ 是某一纽结的琼斯多项式，需满足引理 1.1 条件：

$$f(1)=1$$

$$f'(1)=0$$

$$f\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)=1$$

$$f(i)=\pm 1$$

即

$$f(1)=a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1$$

$$f'(1)=6a_6+5a_5+4a_4+3a_3+2a_2+a_1=0$$

$$
\begin{aligned}
f\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) &= a_6\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^6 + a_5\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^5 + a_4\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^4 + a_3\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^3 + a_2\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^2 + a_1 e^{\frac{2\pi i}{3}} + a_0 \\
&= a_6 + a_5\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + a_4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + a_3 + a_2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + a_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + a_0 \\
&= \left(a_6 - \frac{1}{2}a_5 - \frac{1}{2}a_4 + a_3 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + a_0\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a_5 - a_4 + a_2 - a_1\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(i) &= a_6 i^6 + a_5 i^5 + a_4 i^4 + a_3 i^3 + a_2 i^2 + a_1 i + a_0 \\
&= -a_6 + a_5 i + a_4 - a_3 i - a_2 + a_1 i + a_0 \\
&= \left(-a_6 + a_4 - a_2 + a_0\right) + i\left(a_5 - a_3 + a_1\right) \\
&= \pm 1
\end{aligned}
$$

1) 当 $f(i)=1$时，可以得到如下的实系数线性方程组：

$$
\begin{cases}
a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 \\
6a_6 + 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\
a_6 - \frac{1}{2}a_5 - \frac{1}{2}a_4 + a_3 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + a_0 = 1 \\
a_5 - a_4 + a_2 - a_1 = 0 \\
-a_6 + a_4 - a_2 + a_0 = 1 \\
a_5 - a_3 + a_1 = 0
\end{cases}
$$

其增广矩阵为：

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

经过初等行变换，得到：

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
$$

解出

$$
\begin{cases}
a_6 = a_0 - 1 \\
a_5 = -a_0 + 1 \\
a_4 = a_0 - 1 \\
a_3 = -2a_0 + 2 \\
a_2 = a_0 - 1 \\
a_1 = -a_0 + 1
\end{cases}
$$

由于 $f(t)$ 为六次整系数多项式需满足 $a_6 \neq 0$，即此时 $a_0 \neq 1$。

2) 当 $f(i) = -1$ 时，可以得到如下的实系数线性方程组：

$$\begin{cases} a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 \\ 6a_6 + 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ a_6 - \frac{1}{2}a_5 - \frac{1}{2}a_4 + a_3 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + a_0 = 1 \\ a_5 - a_4 + a_2 - a_1 = 0 \\ -a_6 + a_4 - a_2 + a_0 = -1 \\ a_5 - a_3 + a_1 = 0 \end{cases}$$

其增广矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

经过初等变换得：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

解出：

$$\begin{cases} a_6 = a_0 \\ a_5 = -a_0 \\ a_4 = a_0 - 1 \\ a_3 = -2a_0 + 1 \\ a_2 = a_0 \\ a_1 = -a_0 + 1 \end{cases}$$

由于 $f(t)$ 是六次整系数多项式需满足 $a_6 \neq 0$，即此时 $a_0 \neq 0$。

综上，即证定理成立。

推论 2.1 常数项为 0 的六次整系数多项式为 Jones 多项式系数需满足：

$$a_6 = -1,\ a_5 = 1,\ a_4 = -1,\ a_3 = 2,\ a_2 = -1,\ a_1 = 1$$

推论 2.2 若

$$f(t) = a_{-6}t^{-6} + a_{-5}t^{-5} + a_{-4}t^{-4} + a_{-3}t^{-3} + a_{-2}t^{-2} + a_{-1}t^{-1} + a_0 \left(a_i \in Z, a_6 \neq 0\right)$$

是某一纽结的琼斯多项式，则其系数满足关系式：

DOI: 10.12677/aam.2023.129385

$$\begin{cases} a_{-6} = a_0 - 1 \\ a_{-5} = -a_0 + 1 \\ a_{-4} = a_0 - 1 \\ a_{-3} = -2a_0 + 2 \\ a_{-2} = a_0 - 1 \\ a_{-1} = -a_0 + 1 \end{cases} (a_0 \neq 1)$$

或者

$$\begin{cases} a_{-6} = a_0 \\ a_{-5} = -a_0 \\ a_{-4} = a_0 - 1 \\ a_{-3} = -2a_0 + 1 \\ a_{-2} = a_0 \\ a_{-1} = -a_0 + 1 \end{cases} (a_0 \neq 0)$$

定理 2.2 若

$$f(t) = a_{14}t^{14} + a_{13}t^{13} + a_{12}t^{12} + a_{11}t^{11} + a_{10}t^{10} + a_9t^9 + a_8t^8 + a_7t^7 + a_6t^6 \\ + a_5t^5 + a_4t^4 \left(a_{14} \neq 0, a_i \in Z, i = 1, 2, \cdots, 6\right)$$

为某一组结的琼斯多项式，则系数满足关系式：

$$\begin{cases} a_{14} = \frac{4}{3}a_7 + 3a_6 + 3a_5 + a_4 - 3 \\ a_{13} = -\frac{2}{3}a_7 - 2a_6 - 3a_5 + 1 \\ a_{12} = \frac{4}{3}a_7 + 3a_6 + 4a_5 - 2 \\ a_{11} = -3a_7 - 6a_6 - 6a_5 + 4 \\ a_{10} = \frac{2}{3}a_7 + 2a_6 + 3a_5 - a_4 - 1 \\ a_9 = -\frac{4}{3}a_7 - 4a_6 - 4a_5 + 3 \end{cases} \left(\frac{4}{3}a_7 + 3a_6 + 3a_5 + a_4 \neq 3\right)$$

或者

$$\begin{cases} a_{14} = -a_7 - a_6 + a_5 + a_4 \\ a_{13} = \frac{5}{3}a_7 + 2a_6 - a_5 - 2 \\ a_{12} = -a_7 - a_6 + 2a_5 + 1 \\ a_{11} = \frac{5}{3}a_7 + 2a_6 - 2a_5 - 2 \\ a_{10} = -\frac{5}{3}a_7 - 2a_6 + a_5 - a_4 + 2 \\ a_9 = a_7 - 2a_5 \end{cases} \left(-a_7 - a_6 + a_5 + a_4 \neq 0\right)$$

或者

$$\begin{cases} a_{14}=\frac{3}{2}a_7+3a_6+3a_5+a_4-4 \\ a_{13}=-\frac{5}{6}a_7-2a_6-3a_5+2 \\ a_{12}=\frac{3}{2}a_7+3a_6+4a_5-4 \\ a_{11}=-\frac{10}{3}a_7-6a_6-6a_5+7 \\ a_{10}=\frac{5}{6}a_7+2a_6+3a_5-a_4-2 \\ a_9=-\frac{3}{2}a_7-4a_6-4a_5+5 \end{cases} \quad \left(\frac{3}{2}a_7+3a_6+3a_5+a_4\neq 4\right)$$

或者

$$\begin{cases} a_{14}=-a_7-a_6+a_5+a_4+1 \\ a_{13}=\frac{5}{3}a_7+2a_6-a_5-3 \\ a_{12}=-a_7-a_6+2a_5+1 \\ a_{11}=\frac{5}{3}a_7+2a_6-2a_5-3 \\ a_{10}=-\frac{5}{3}a_7-2a_6+a_5-a_4+3 \\ a_9=a_7-2a_5 \end{cases} \quad \left(a_7+a_6-a_5-a_4\neq 1\right)$$

证明：若 $f(t)$ 是某一纽结的琼斯多项式，需满足引理 1.1 条件：

$$f(1)=1$$

$$f'(1)=0$$

$$f\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)=1$$

$$f(i)=\pm 1$$

即

$$f(1)=a_{14}+a_{13}+a_{12}+a_{11}+a_{10}+a_9+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4=1$$

$$f'(1)=14a_{14}+13a_{13}+12a_{12}+11a_{11}+10a_{10}+9a_9+8a_8+7a_7+6a_6+5a_5+4a_4=0$$

$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)=&a_{14}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{14}+a_{13}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{13}+a_{12}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{12}+a_{11}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{11}+a_{10}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{10}+a_9\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{9} \\ &+a_8\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{8}+a_7\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{7}+a_6\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{6}+a_5\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{5}+a_4\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{4} \\ =&a_{14}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+a_{13}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+a_{12}+a_{11}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+a_{10}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+a_9 \\ &+a_8\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+a_7\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+a_6+a_5\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+a_4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}a_{14} + \frac{\sqrt{3}}{2}a_{13} - \frac{\sqrt{3}}{2}a_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2}a_{10} - \frac{\sqrt{3}}{2}a_{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}a_{7} - \frac{\sqrt{3}}{2}a_{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}a_{4}i \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}a_{14} - \frac{1}{2}a_{13} + a_{12} - \frac{1}{2}a_{11} - \frac{1}{2}a_{10} + a_{9} - \frac{1}{2}a_{8} - \frac{1}{2}a_{7} + a_{6} - \frac{1}{2}a_{5} - \frac{1}{2}a_{4}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
f(i) = a_{14}i^{14} + a_{13}i^{13} + a_{12}i^{12} + a_{11}i^{11} + a_{10}i^{10} + a_{9}i^{9} + a_{8}i^{8} + a_{7}i^{7} + a_{6}i^{6} + a_{5}i^{5} + a_{4}i^{4} = \pm 1
$$

1) 当 $f(i)=1$ 时，可以得到如下的实系数线性方程组：

$$
\begin{cases}
a_{14} + a_{13} + a_{12} + a_{11} + a_{10} + a_{9} + a_{8} + a_{7} + a_{6} + a_{5} + a_{4} = 1 \\
14a_{14} + 13a_{13} + 12a_{12} + 11a_{11} + 10a_{10} + 9a_{9} + 8a_{8} + 7a_{7} + 6a_{6} + 5a_{5} + 4a_{4} = 0 \\
-\frac{\sqrt{3}}{2}a_{14} + \frac{\sqrt{3}}{2}a_{13} - \frac{\sqrt{3}}{2}a_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2}a_{10} - \frac{\sqrt{3}}{2}a_{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}a_{7} - \frac{\sqrt{3}}{2}a_{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}a_{4} = 0 \\
-\frac{1}{2}a_{14} - \frac{1}{2}a_{13} + a_{12} - \frac{1}{2}a_{11} - \frac{1}{2}a_{10} + a_{9} - \frac{1}{2}a_{8} - \frac{1}{2}a_{7} + a_{6} - \frac{1}{2}a_{5} - \frac{1}{2}a_{4} = 1 \\
-a_{14} + a_{12} - a_{10} + a_{8} - a_{6} + a_{4} = 1 \\
a_{13} - a_{11} + a_{9} - a_{7} + a_{5} = 0
\end{cases}
$$

其增广矩阵为：

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 0 \\
-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\
-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

经过初等变换得：

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & 0 & -1 & -2 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & 0 & -2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{3} & 0 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & 2 & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

解出系数之间的关系：

$$\begin{cases} a_{14} = a_8 + \frac{2}{3}a_7 + a_5 + 2a_4 - 2 \\ a_{13} = -a_8 + a_6 - a_5 - a_4 \\ a_{12} = a_8 + \frac{2}{3}a_7 + 2a_5 + a_4 - 1 \\ a_{11} = -2a_8 - \frac{5}{3}a_7 - 2a_5 - 2a_4 + 2 \\ a_{10} = a_8 - a_6 + a_5 \\ a_9 = -a_8 - \frac{2}{3}a_7 - a_6 - 2a_5 - a_4 + 2 \end{cases}$$

再次由引理知：

$$\begin{aligned} f\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right) &= a_{14}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{14} + a_{13}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{13} + a_{12}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{12} + a_{11}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{11} + a_{10}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{10} + a_9\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{9} \\ &\quad + a_8\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{8} + a_7\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{7} + a_6\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{6} + a_5\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{5} + a_4\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{4} \\ &= \left(-\frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_5 + a_6 + \frac{1}{2}a_7 - \frac{1}{2}a_8 - a_9 - \frac{1}{2}a_{10} + \frac{1}{2}a_{11} + a_{12} + \frac{1}{2}a_{13} - \frac{1}{2}a_{14}\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-a_4 - a_5 + a_7 + a_8 - a_{10} - a_{11} + a_{13} + a_{14}\right) \\ &= \left(-a_4 + 2a_5 + 3a_6 + \frac{2}{3}a_7 - a_8 - 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(2a_4 + 2a_6 + \frac{10}{3}a_7 + 2a_8 - 4\right) \end{aligned}$$

则 $-a_4 + 2a_5 + 3a_6 + \frac{2}{3}a_7 - a_8 - 1 = 0$ 或者 $2a_4 + 2a_6 + \frac{10}{3}a_7 + 2a_8 - 4 = 0$。

a) 当 $-a_4 + 2a_5 + 3a_6 + \frac{2}{3}a_7 - a_8 - 1 = 0$ 时，有 $a_8 = -a_4 + 2a_5 + 3a_6 + \frac{2}{3}a_7 - 1$，则

$$\begin{cases} a_{14} = \frac{4}{3}a_7 + 3a_6 + 3a_5 + a_4 - 3 \\ a_{13} = -\frac{2}{3}a_7 - 2a_6 - 3a_5 + 1 \\ a_{12} = \frac{4}{3}a_7 + 3a_6 + 4a_5 - 2 \\ a_{11} = -3a_7 - 6a_6 - 6a_5 + 4 \\ a_{10} = \frac{2}{3}a_7 + 2a_6 + 3a_5 - a_4 - 1 \\ a_9 = -\frac{4}{3}a_7 - 4a_6 - 4a_5 + 3 \end{cases}$$

由于 $f(t)$ 为十四次整系数多项式需满足 $a_{14} \neq 0$，即此时 $\frac{4}{3}a_7 + 3a_6 + 3a_5 + a_4 \neq 3$。

b) 当 $2a_4 + 2a_6 + \frac{10}{3}a_7 + 2a_8 - 4 = 0$ 时，有 $a_8 = -\frac{5}{3}a_7 - a_6 - a_4 + 2$，则

$$\begin{cases} a_{14}=-a_7-a_6+a_5+a_4 \\ a_{13}=\frac{5}{3}a_7+2a_6-a_5-2 \\ a_{12}=-a_7-a_6+2a_5+1 \\ a_{11}=\frac{5}{3}a_7+2a_6-2a_5-2 \\ a_{10}=-\frac{5}{3}a_7-2a_6+a_5-a_4+2 \\ a_9=a_7-2a_5 \end{cases}$$

由于 $f(t)$ 为十四次整系数多项式需满足 $a_{14}\neq 0$，即此时 $-a_7-a_6+a_5+a_4\neq 0$ 。

2) 当 $f(i)=-1$ 时，可以得到如下的实系数线性方程组：

$$\begin{cases} a_{14}+a_{13}+a_{12}+a_{11}+a_{10}+a_9+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4=1 \\ 14a_{14}+13a_{13}+12a_{12}+11a_{11}+10a_{10}+9a_9+8a_8+7a_7+6a_6+5a_5+4a_4=0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a_{14}+\frac{\sqrt{3}}{2}a_{13}-\frac{\sqrt{3}}{2}a_{11}+\frac{\sqrt{3}}{2}a_{10}-\frac{\sqrt{3}}{2}a_8+\frac{\sqrt{3}}{2}a_7-\frac{\sqrt{3}}{2}a_5+\frac{\sqrt{3}}{2}a_4=0 \\ -\frac{1}{2}a_{14}-\frac{1}{2}a_{13}+a_{12}-\frac{1}{2}a_{11}-\frac{1}{2}a_{10}+a_9-\frac{1}{2}a_8-\frac{1}{2}a_7+a_6-\frac{1}{2}a_5-\frac{1}{2}a_4=1 \\ -a_{14}+a_{12}-a_{10}+a_8-a_6+a_4=-1 \\ a_{13}-a_{11}+a_9-a_7+a_5=0 \end{cases}$$

其增广矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

经过初等变换得：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{3} & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解出系数关系如下：

$$\begin{cases} a_{14} = a_8 + \dfrac{2}{3}a_7 + a_5 + 2a_4 - 1 \\ a_{13} = -a_8 + a_6 - a_5 - a_4 - 1 \\ a_{12} = a_8 + \dfrac{2}{3}a_7 + 2a_5 + a_4 - 1 \\ a_{11} = -2a_8 - \dfrac{5}{3}a_7 - 2a_5 - 2a_4 + 1 \\ a_{10} = a_8 - a_6 + a_5 + 1 \\ a_9 = -a_8 - \dfrac{2}{3}a_7 - a_6 - 2a_5 - a_4 + 2 \end{cases}$$

再次由引理知：

$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right) &= a_{14}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{14} + a_{13}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{13} + a_{12}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{12} + a_{11}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{11} + a_{10}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{10} \\ &\quad + a_9\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{9} + a_8\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{8} + a_7\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{7} + a_6\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{6} + a_5\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{5} + a_4\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{4} \\ &= \left(-\frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_5 + a_6 + \frac{1}{2}a_7 - \frac{1}{2}a_8 - a_9 - \frac{1}{2}a_{10} + \frac{1}{2}a_{11} + a_{12} + \frac{1}{2}a_{13} - \frac{1}{2}a_{14}\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-a_4 - a_5 + a_7 + a_8 - a_{10} - a_{11} + a_{13} + a_{14}\right) \\ &= \left(-a_8 + \frac{5}{6}a_7 + 3a_6 + 2a_5 - a_4 - 3\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(2a_8 + \frac{10}{3}a_7 + 2a_6 + 2a_4 - 4\right) \end{aligned}$$

则 $-a_8 + \frac{5}{6}a_7 + 3a_6 + 2a_5 - a_4 - 3 = 0$ 或者 $2a_8 + \frac{10}{3}a_7 + 2a_6 + 2a_4 - 4 = 0$。

c) 当 $-a_8 + \frac{5}{6}a_7 + 3a_6 + 2a_5 - a_4 - 3 = 0$ 时，有 $a_8 = \frac{5}{6}a_7 + 3a_6 + 2a_5 - a_4 - 3$，则

$$\begin{cases} a_{14} = \dfrac{3}{2}a_7 + 3a_6 + 3a_5 + a_4 - 4 \\ a_{13} = -\dfrac{5}{6}a_7 - 2a_6 - 3a_5 + 2 \\ a_{12} = \dfrac{3}{2}a_7 + 3a_6 + 4a_5 - 4 \\ a_{11} = -\dfrac{10}{3}a_7 - 6a_6 - 6a_5 + 7 \\ a_{10} = \dfrac{5}{6}a_7 + 2a_6 + 3a_5 - a_4 - 2 \\ a_9 = -\dfrac{3}{2}a_7 - 4a_6 - 4a_5 + 5 \end{cases}$$

由于 $f(t)$ 为十四次整系数多项式需满足 $a_{14} \neq 0$，即此时 $\frac{3}{2}a_7 + 3a_6 + 3a_5 + a_4 \neq 4$。

d) 当 $2a_8 + \frac{10}{3}a_7 + 2a_6 + 2a_4 - 4 = 0$ 时，有 $a_8 = -\frac{5}{3}a_7 - a_6 - a_4 + 2$，则

$$\begin{cases} a_{14}=-a_7-a_6+a_5+a_4+1 \\ a_{13}=\dfrac{5}{3}a_7+2a_6-a_5-3 \\ a_{12}=-a_7-a_6+2a_5+1 \\ a_{11}=\dfrac{5}{3}a_7+2a_6-2a_5-3 \\ a_{10}=-\dfrac{5}{3}a_7-2a_6+a_5-a_4+3 \\ a_9=a_7-2a_5 \end{cases}$$

由于 $f(t)$ 为十四次整系数多项式需满足 $a_{14}\neq 0$，即此时 $a_7+a_6-a_5-a_4\neq 1$。

综上 a)、b)、c)、d)情况，即证定理成立。

4. 结语

本文从组结多项式的维度探究了多项式的应用。在组结理论中，给出了六次整系数多项式以及宽度为十的十四次整系数多项式是组结多项式的必要条件，即多项式系数需满足本文给出的定理 2.1 以及定理 2.2 中的条件。本文的研究方法可以延伸其他宽度及次数整系数多项式为组结多项式的必要条件的研究。但同时，多项式在众多领域中起着不可或缺的作用，并且多项式的性质及其应用依然有待于进一步的探究补充。

参考文献

[1] 董世魁，汤琳，张相锋，刘世梁，刘全儒，苏旭坤，张勇，武晓宇，赵珍珍，李钰，沙威. 高寒草地植物物种多样性与功能多样性的关系[J]. 生态学报, 2017, 37(5): 1472-1483.

[2] 王兆清，李淑萍，唐炳涛. 任意连续函数的多项式插值逼近[J]. 山东建筑大学学报, 2007(2): 158-162.

[3] 冯志新. 一类多项式函数零点分布问题[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2006(4): 29-30. https://doi.org/10.16862/j.cnki.issn1674-3873.2006.04.012

[4] 穆雪峰，姚卫星，余雄庆，刘克龙，薛飞. 多学科设计优化中常用代理模型的研究[J]. 计算力学学报，2005(5): 608-612.

[5] 林琼桂. 盖根鲍尔多项式的一些物理应用[J]. 大学物理, 2019, 38(1): 13-16+24. https://doi.org/10.16854/j.cnki.1000-0712.180325

[6] 北京大学数学系前代数小组，编. 王萼芳，石生明，修订. 高等代数[M]. 第 5 版. 北京：高等教育出版社，2019: 18-19.

[7] 姜伯驹. 绳圈的数学[M]. 长沙：湖南教育出版社, 1991: 391-429.

[8] 韩友发，姚尧，沙欣，马晓莎. 组结多项式和整系数多项式[J]. 浙江大学学报(理学版), 2015, 42(5): 532-536.