Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(9), 3804-3813**
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.129374

带Hardy项和一般非线性项分数阶椭圆方程的移动平面法

张晓亚

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年7月30日；录用日期：2023年8月23日；发布日期：2023年8月31日

摘 要

本文应用直接移动平面法，研究带Hardy项的分数阶拉普拉斯方程的正解的对称性和单调性。首先，关于某一点作Kelvin变换，然后建立了狭窄区域上的极值原理和无穷远处衰减原理，利用这一原理和移动平面法得到正解关于某一点对称并且关于这一点先增后减的结果。

关键词

Hardy项，分数阶拉普拉斯方程，移动平面法

The Method of Moving Planes for Fractional Order Elliptic Equations with Hardy and General Nonlinear Terms

Xiaoya Zhang

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Jul. 30th, 2023; accepted: Aug. 23rd, 2023; published: Aug. 31st, 2023

Abstract

In this paper, we study the symmetry and monotonicity of positive solutions for fractional Laplace equations involving the Hardy potential. Firstly, the Kelvin transform is performed on a certain point, and then we establish a narrow region principle and decay at infinity principle. By using this principle and the moving plane method, the result that the positive solution is symmetric about a certain point and first increases and then decreases is obtained.

文章引用: 张晓亚. 带 Hardy 项和一般非线性项分数阶椭圆方程的移动平面法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(9): 3804-3813.
DOI: 10.12677/aam.2023.129374

Keywords

Hardy Potential, Fractional Laplace Equation, The Method of Moving Planes

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

近几年来，分数阶拉普拉斯方程的各种应用引起了人们极大的关注，但它的非局部特征使研究变得困难，我们了解到对称性和单调性在分数阶拉普拉斯方程的研究中起重要作用，在本文中我们致力于研究方程的单调性，许多学者已经在这一问题上取得了很好的成果，移动平面法是解决这一问题的强大工具，具体可参考文献[1] [2] [3]。

除此之外，为了克服这一困难，Caffarelli 和 Silvestre 在[4]中通过延拓的方法解决非局部问题，这个方法把非局部问题转化为更高维的局部问题，然后通过移动平面法得到解的性质，更多结果可以参考[5]。另一个方法是我们考虑相应的积分方程并且建立和微分方程等价的积分方程，通过移动平面法的积分形式得到解的性质，可参见[6] [7] [8]。

对于分数阶方程

$$(-\Delta)^{s} u(x)-\gamma|x|^{-2s} u(x)=u^{p}(x),\ x\in B\subset R^{n} \tag{1}$$

其中 $N>2s$， $s\in(0,1)$， $p>1$， $\gamma\geq 0$。Mouhamed Moustapha Fall 在[9]中应用比较原则和极值原理得到了半线性方程非负分布解存在性和非存在性。

在文献[10]中 Dai 和 Qin 研究了更一般的非线性项在外部区域中的方程

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x)=f(x,u),\quad x\in\Omega_{r}:=\left\{x\in R^{n}\mid |x|>r\right\} \tag{2}$$

其中 $n\geq 2$， $0<\alpha\leq 2$，给定任意 $r>0$，他们建立了与方程相应的积分方程，然后利用缩放球体法建立了 Liouville 定理，和移动球面法不同的是，缩放球体法可以很好地利用解满足的积分方程，可以应用于各种问题。

总而言之，不管是延拓法还是积分方程，都需要额外的条件，所以有没有直接运用于非局部问题的方法？Jarous 和 Weth 在[11]中以反对称函数的极值原理为基础，证明了非负函数的对称性。2017 年，Chen，Li 等人在[12]中介绍了解决分数阶拉普拉斯方程的移动平面法，他们证明了极值原理和移动平面法的关键要素，比如狭窄区域原理和无穷远处衰减原理。在[13]中，Chen 和 Li 等人应用此方法解决有界区域和全空间上的非线性分数阶方程，还有半空间上解的非存在性。此外，许多学者把移动平面法应用到带 Hardy 项的分数阶拉普拉斯方程，更多结果可参见[14] [15] [16]。

在上面的研究基础上，Wang，Ren 等人在文献[17]中研究了 Hardy-Schrödinger 方程

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} v(x)+\zeta v(x)=\frac{\gamma}{|x|^{s}} v(x)+|v(x)|^{p-1} v(x) \tag{3}$$

其中 $s\in(0,2)$， $0<\gamma<\gamma^{*}$，作者讨论了非线性薛定谔方程驻波径向解的对称性的结论。首先证明了在无穷远处衰减条件下解的径向对称性，在此基础上，证明了在不衰减的条件下，利用 Kelvin 变换，得到了

解的不存在性和对称性结果。

相似地，叶方琪在[18]中研究了分数阶 Hartree 方程的负解的对称性

$$(-\Delta)^s u(x)=\left(\frac{1}{|x|^q}*|u(x)|^p\right)u^\sigma(x) \tag{4}$$

其中 $u<0$，$0\le q\le 4s$，$p=\dfrac{2n-q}{n-2s}$，$\sigma=\dfrac{n+2s-q}{n-2s}$，作者通过建立狭窄区域极值原理和无穷远处衰减原理，应用某点处 Kelvin 变换，证明了负解关于某点的对称性。

2. 主要结果及证明

受到以上作者的启发，本文主要考虑上述方程更一般的非线性项形式和 Hardy 项，然后通过 Kelvin 变换，应用直接移动平面法，通过狭窄区域极值原理和无穷远处衰减原理得到正解的单调性和对称性。

本文主要研究一般非线性项的分数阶方程：

$$\begin{cases}\left((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\gamma}{|x|^\alpha}\right)u(x)=f(x,u), & x\in R^n.\\ u(x)>0, & x\in R^n.\end{cases} \tag{5}$$

其中 $n\ge 2$，$u>0$，$\alpha,\beta\in(0,2)$ 是任意实数。γ 是一个 Hardy 常数，我们取 γ^* 使得 $\gamma\le\gamma^*$，其中 $\gamma^*=2^\alpha\dfrac{\Gamma^2\left(\dfrac{N+\alpha}{4}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{N-\alpha}{4}\right)}$。

我们定义任何非负函数 f 有次临界增长如果对于下列关于 μ 的函数

$$\mu^{\frac{n+\alpha}{n-\alpha}}f\left(\mu^{\frac{2}{n-\alpha}}x,\mu^{-1}u\right)\text{是非减的} \tag{6}$$

对于所有 (x,u) 关于 $\mu\ge 1$。

令

$$L_\alpha=\left\{u\,|\int_{R^n}\frac{|u(x)|}{1+|x|^{n+\alpha}}\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

其中 $u\in C_{loc}^{1,1}\cap L_\alpha$，分数阶拉普拉斯算子定义为

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)=C_{n,\alpha}PV\int_{R^n}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y$$

其中常数 $C_{n,\alpha}=\left(\displaystyle\int_{R^n}\frac{1-\cos(2\pi\xi_1)}{|\xi|^{n+\alpha}}\mathrm{d}\xi\right)^{-1}$，$PV$ 代表 Cauchy 主值。

给定任意点 $\vartheta\in R^n$，记

$$v(x)=\frac{1}{|x-\vartheta|^{n-\alpha}}u\left(\frac{x-\vartheta}{|x-\vartheta|^2}+\vartheta\right)$$

是 u 以 ϑ 为中心的 Kelvin 变换。然后推断出

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} v(x) = \frac{1}{|x-\vartheta|^{n+\alpha}} \left((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \right) \left(\frac{x-\vartheta}{|x-\vartheta|^2} \right)$$
$$= \frac{1}{|x-\vartheta|^{n+\alpha}} \left(\frac{\gamma}{\left| \frac{x-\vartheta}{|x-\vartheta|^2} \right|^{\alpha}} u\left(\frac{x-\vartheta}{|x-\vartheta|^2} \right) + f\left(\frac{x-\vartheta}{|x-\vartheta|^2}, u \right) \right) \tag{7}$$
$$= \frac{\gamma}{|x-\vartheta|^{\alpha}} v(x) + \frac{1}{|x-\vartheta|^{n+\alpha}} f\left(\frac{x-\vartheta}{|x-\vartheta|^2}, |x-\vartheta|^{n-\alpha} v(x) \right)$$

设 T_τ 为 R^n 中超平面，选择任意方向为 x_1 方向。对于 $\tau \le \vartheta_1$，令

$$T_\tau = \{x \in R^n \mid x_1 = \tau\}, x^\nu = (2\tau - x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$v_\tau(x) = v(x^\tau),\ \Phi_\tau(x) = v_\tau(x) - v(x)$$
$$\textstyle\sum_\tau = \{x \in R^n \mid x_1 < \tau\}, \tilde{\sum}_\tau = \{x^\tau \mid x \in \sum_\tau\}.$$

通过 $\Phi(x)$ 的定义，我们知道

$$\lim_{|x|\to\infty} \Phi_\tau(x) = 0.$$

因此，如果 $\Phi_\tau(x)$ 在 $\sum_\tau$ 中存在负值，那么 $\Phi_\tau(x)$ 的最小负值一定也在 $\sum_\tau$ 内部。

对于任意 $x \in \sum_\tau$，令 $p = \frac{n+\alpha}{n-\alpha}$，$\tilde{x} = \frac{x-\vartheta}{|x-\vartheta|^2}$，可以得到

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \Phi_\tau(x) &= \frac{\gamma}{|x^\tau-\vartheta|^{\alpha}} v_\tau(x) + \frac{1}{|x^\tau-\vartheta|^{n+\alpha}} f\left(\tilde{x}^\tau, |x^\tau-\vartheta|^{n-\alpha} v_\tau(x)\right) \\
&\quad - \frac{\gamma}{|x-\vartheta|^{\alpha}} v(x) + \frac{1}{|x-\vartheta|^{n+\alpha}} f\left(\tilde{x}, |x-\vartheta|^{n-\alpha} v(x)\right) \\
&\ge \frac{\gamma}{|x^\tau-\vartheta|^{\alpha}} \left(v_\tau(x) - v(x)\right) + \frac{v_\tau^p(x)}{\left[|x^\tau-\vartheta|^{n-\alpha} v_\tau(x)\right]^p} f\left(\tilde{x}^\tau, |x^\tau-\vartheta|^{n-\alpha} v_\tau(x)\right) \\
&\quad - \frac{v_\tau^p(x)}{\left[|x-\vartheta|^{n-\alpha} v_\tau(x)\right]^p} f\left(\tilde{x}, |x-\vartheta|^{n-\alpha} v(x)\right) \\
&\quad + \frac{1}{|x-\vartheta|^{n+\alpha}} f\left(\tilde{x}, |x-\vartheta|^{n-\alpha} v_\tau(x)\right) - \frac{1}{|x-\vartheta|^{n+\alpha}} f\left(\tilde{x}, |x-\vartheta|^{n-\alpha} v(x)\right)
\end{aligned} \tag{8}$$

引理 1 (狭窄区域极值定理)：设$\mathcal{D}$是 $\sum_\tau$ 中的狭窄区域，并且 $H \in \{x \mid \tau - l < x_1 < \tau\}$，其中 l 足够小。假定 $\Phi_\tau(x) \in C_{loc}^{1,1} \cap L_\alpha$，并且在 $\bar{H}$ 中下半连续且满足

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \Phi_\tau(x) + c_1(x)\Phi_\tau(x) \ge 0, & x \in H, \\ \Phi_\tau(x) \ge 0, & x \in \sum_\tau \setminus H. \end{cases} \tag{9}$$

那么对于 l 足够小，有

$$\Phi_\tau(x) \ge 0, \quad x \in H. \tag{10}$$

证明：如果不成立，由 u 在 $\bar{H}$ 中的下半连续性可知，存在 $\hat{x}\in\bar{H}$ 使得

$$\Phi_\tau(\hat{x})=\min_{\bar{H}}\Phi_\tau(x)<0.$$

由条件 $\Phi_\tau(x)\geq 0$ 在 $\Sigma_\tau\backslash H$ 中，推断出 $\hat{x}$ 一定在 H 的内部。

一方面有

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\Phi_\tau(\hat{x})&=C_{n,\alpha}PV\int_{R^n}\frac{\Phi_\tau(\hat{x})-\Phi_\tau(y)}{|\hat{x}-y|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y\\&=C_{n,\alpha}PV\int_{\Sigma_\tau}\frac{\Phi_\tau(\hat{x})-\Phi_\tau(y)}{|\hat{x}-y|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y+C_{n,\alpha}\int_{\Sigma_\tau^C}\frac{\Phi_\tau(\hat{x})-\Phi_\tau(y)}{|\hat{x}-y|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y\\&=C_{n,\alpha}PV\int_{\Sigma_\tau}\frac{\Phi_\tau(\hat{x})-\Phi_\tau(y)}{|\hat{x}-y|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y+C_{n,\alpha}\int_{\Sigma_\tau}\frac{\Phi_\tau(\hat{x})+\Phi_\tau(y)}{|\hat{x}-y|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y\\&\leq C_{n,\alpha}\left(\int_{\Sigma_\tau}\frac{\Phi_\tau(\hat{x})-\Phi_\tau(y)}{|\hat{x}-\tilde{y}|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y+\int_{\Sigma_\tau}\frac{\Phi_\tau(\hat{x})+\Phi_\tau(y)}{|\hat{x}-\tilde{y}|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y\right)\\&=C_{n,\alpha}\int_{\Sigma_\tau}\frac{2\Phi_\tau(\hat{x})}{|\hat{x}-\tilde{y}|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y=C_{n,\alpha}\int_{\Sigma_\tau^C}\frac{2\Phi_\tau(\hat{x})}{|\hat{x}-y|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{11}$$

令 $a=\hat{x}_1-y_1$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\Sigma}_\tau}\frac{1}{|\hat{x}-y|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y&=\int_{-\infty}^{0}\int_{R^{n-1}}\frac{1}{\left(a^2+|y'|^2\right)^{\frac{n+\alpha}{2}}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}y_1\\&=\int_{-\infty}^{0}\int_{R^{n-1}}\frac{a^{n-1}\mathrm{d}z'}{a^{n+\alpha}\left(1+|z'|^2\right)^{\frac{n+\alpha}{2}}}\mathrm{d}y_1\\&=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{a^{1+\alpha}}\mathrm{d}y_1\int_{R^{n-1}}\frac{\mathrm{d}z'}{\left(1+|z'|^2\right)^{\frac{n+\alpha}{2}}}\\&=C_1\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(\hat{x}_1-y_1)^{1+\alpha}}\mathrm{d}y_1\geq\frac{C'}{d^\alpha(\hat{x},T_\tau)}\end{aligned}$$

也就是说，

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\Phi_\tau(\hat{x})\leq\frac{C'}{d^\alpha(\hat{x},T_\tau)}\Phi_\tau(\hat{x})\tag{12}$$

另一方面有

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\Phi_\tau(x)=&\frac{\gamma}{|x^\tau-\vartheta|^\alpha}v_\tau(x)+\frac{1}{|x^\tau-\vartheta|^{n+\alpha}}f\left(\tilde{x}^\tau,|x^\tau-\vartheta|^{n-\alpha}v_\tau(x)\right)\\&-\frac{\gamma}{|x-\vartheta|^\alpha}v(x)+\frac{1}{|x-\vartheta|^{n+\alpha}}f\left(\tilde{x},|x-\vartheta|^{n-\alpha}v(x)\right)\\\geq&\frac{\gamma}{|x^\tau-\vartheta|^\alpha}\left(v_\tau(x)-v(x)\right)+\frac{v_\tau^p(x)}{\left[|x^\tau-\vartheta|^{n-\alpha}v_\tau(x)\right]^p}f\left(\tilde{x}^\tau,|x^\tau-\vartheta|^{n-\alpha}v_\tau(x)\right)\\&-\frac{v_\tau^p(x)}{\left[|x-\vartheta|^{n-\alpha}v_\tau(x)\right]^p}f\left(\tilde{x},|x-\vartheta|^{n-\alpha}v(x)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\ge \frac{\gamma}{\left|x^{\tau}-\vartheta\right|^{\alpha}}\Phi_{\tau}\left(\hat{x}\right)+\frac{p\xi^{p-1}\Phi_{\tau}\left(\hat{x}\right)}{\left[\left|\hat{x}-\vartheta\right|^{n-\alpha}v\left(\hat{x}\right)\right]^{p}}f\left(\tilde{x},\left|\hat{x}-\vartheta\right|^{n-\alpha}v\left(\hat{x}\right)\right)\\
&\ge \frac{\gamma}{\left|x^{\tau}-\vartheta\right|^{\alpha}}\Phi_{\tau}\left(\hat{x}\right)+\frac{pv^{p-1}\left(\hat{x}\right)\Phi_{\tau}\left(\hat{x}\right)}{\left[\left|\hat{x}-\vartheta\right|^{n-\alpha}v\left(\hat{x}\right)\right]^{p}}f\left(\tilde{x},\left|\hat{x}-\vartheta\right|^{n-\alpha}v\left(\hat{x}\right)\right) \qquad (13)\\
&=\left\{\frac{\gamma}{\left|x^{\tau}-\vartheta\right|^{\alpha}}+\frac{p}{\left|\hat{x}-\vartheta\right|^{n-\alpha}v\left(\hat{x}\right)}f\left(\tilde{x},\left|\hat{x}-\vartheta\right|^{n-\alpha}v\left(\hat{x}\right)\right)\right\}\Phi_{\tau}\left(\hat{x}\right)
\end{aligned}
$$

记

$$
c_1\left(x\right)=\frac{\gamma}{\left|x^{\tau}-\vartheta\right|^{\alpha}}+\frac{p}{\left|\hat{x}-\vartheta\right|^{n-\alpha}v\left(\hat{x}\right)}f\left(\tilde{x},\left|\hat{x}-\vartheta\right|^{n-\alpha}v\left(\hat{x}\right)\right)
$$

我们对 $c_1\left(x\right)$ 有以下估计

$$
\frac{\gamma}{\left|x^{\tau}-\vartheta\right|^{\alpha}}+\frac{p}{\left|\hat{x}-\vartheta\right|^{n-\alpha}v\left(\hat{x}\right)}f\left(\tilde{x},\left|\hat{x}-\vartheta\right|^{n-\alpha}v\left(\hat{x}\right)\right)>0.
$$

当 l 充分小时，我们有

$$
\begin{aligned}
0&\le\left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\Phi_{\tau}\left(\hat{x}\right)+c_1\left(\hat{x}\right)\Phi_{\tau}\left(\hat{x}\right)\\
&\le\left(\frac{C'}{d^{\alpha}\left(\hat{x},T_{\tau}\right)}+c_1\left(x\right)\right)\Phi_{\tau}\left(\hat{x}\right)\\
&<0
\end{aligned}
$$

等式两边矛盾。因此我们完成引理 1 的证明。

引理 2 (无穷远处衰减定理)：设 $\Phi_{\tau}\left(x\right)\in L_{\alpha}\cap C_{loc}^{1,1}$，并且 $\Phi_{\tau}\left(x\right)$ 的最小值在 $\sum_{\tau}$ 内部取到，则存在常 $R_0>0$ (与 τ 无关)，使得如果有 $\bar{x}\in\sum_{\tau}$ 满足 $\Phi_{\tau}\left(\bar{x}\right)=\min\limits_{\sum_{\tau}}\Phi_{\tau}\left(x\right)<0$，那么

$$
\left|\bar{x}-\vartheta\right|\le R_0. \qquad (14)
$$

证明： 由于 $\Phi_{\tau}\left(x\right)\in L_{\alpha}\left(R^n\right)\cap C_{loc}^{1,1}\left(\sum_{\tau}\right)$ 且 $\Phi_{\tau}\left(\bar{x}\right)=\min\limits_{\sum_{\tau}}\Phi_{\tau}\left(x\right)<0$，我们有

$$
\begin{aligned}
\left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\Phi_{\tau}\left(\bar{x}\right)&=C_{n,\alpha}PV\int_{R^n}\frac{\Phi_{\tau}\left(\bar{x}\right)-\Phi_{\tau}\left(y\right)}{\left|\bar{x}-y\right|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y\\
&=C_{n,\alpha}PV\int_{\sum_{\tau}}\frac{\Phi_{\tau}\left(\bar{x}\right)-\Phi_{\tau}\left(y\right)}{\left|\bar{x}-y\right|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y+C_{n,\alpha}\int_{\sum_{\tau}^{c}}\frac{\Phi_{\tau}\left(\bar{x}\right)-\Phi_{\tau}\left(y\right)}{\left|\bar{x}-y\right|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y\\
&\le C_{n,\alpha}\left(\int_{\sum_{\tau}}\frac{\Phi_{\tau}\left(\bar{x}\right)-\Phi_{\tau}\left(y\right)}{\left|\bar{x}-\tilde{y}\right|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y+\int_{\sum_{\tau}}\frac{\Phi_{\tau}\left(\bar{x}\right)+\Phi_{\tau}\left(y\right)}{\left|\bar{x}-\tilde{y}\right|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y\right) \qquad (15)\\
&=C_{n,\alpha}\int_{\sum_{\tau}}\frac{2\Phi_{\tau}\left(\bar{x}\right)}{\left|\bar{x}-\tilde{y}\right|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

对于 $\bar{x}\ge\tau$，令 $\phi=\left(\bar{x}_1+3\left|\bar{x}-\vartheta\right|,\bar{x}'\right)$，则 $B_{\left|\bar{x}\right|}\left(\phi\right)\subset\tilde{\sum}_{\tau}=\left\{x\in R^n\mid x_1>\tau\right\}$，我们有

$$\int_{\Sigma_\tau}\frac{1}{|\bar{x}-\tilde{y}|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y \ge \int_{B_{|\bar{x}|}(\phi)}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y$$
$$\ge \int_{B_{|\bar{x}|}(\phi)}\frac{1}{4^{n+\alpha}|\bar{x}-\vartheta|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y \tag{16}$$
$$=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{n+\alpha}n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)|\bar{x}-\vartheta|^{\alpha}}.$$

因此

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\Phi_\tau(\bar{x}) \le \frac{4C_{n,\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{n+\alpha}n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)|\bar{x}-\vartheta|^{\alpha}}\Phi_\tau(\bar{x}). \tag{17}$$

通过(13)，我们有

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\Phi_\tau(\bar{x}) \ge \left\{\frac{\gamma}{|\bar{x}-\vartheta|^{\alpha}}+\frac{p}{|\bar{x}-\vartheta|^{n-\alpha}v(\bar{x})}f\left(\tilde{x},|\bar{x}-\vartheta|^{n-\alpha}v(\bar{x})\right)\right\}\Phi_\tau(\bar{x})$$
$$=c_2(\bar{x})\Phi_\tau(\bar{x})$$

当$|\bar{x}-\vartheta|$足够大时，有

$$0<c_2(x)\le\frac{C}{|\bar{x}-\vartheta|^{n+\alpha}}+\frac{C}{|\bar{x}-\vartheta|^{\alpha}},$$

由(15)，(16)，(17)，我们知道存在充分大的R_0，当$|\bar{x}-\vartheta|>R_0$时，有

$$\left(\frac{C}{|\bar{x}-\vartheta|^{n+\alpha}}+\frac{C}{|\bar{x}-\vartheta|^{\alpha}}\right)\Phi_\tau(\bar{x}) \le (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\Phi_\tau(\bar{x}) \le \frac{4C_{n,\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{n+\alpha}n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Phi_\tau(\bar{x}).$$

化简可得

$$\frac{C}{|\bar{x}-\vartheta|^{n}}+C\ge\frac{4C_{n,\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{n+\alpha}n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

不等式两边矛盾，因此$|\bar{x}-\vartheta|\le R_0$，因此完成了引理 2 的证明。

定理 1： 设$u\in C_{loc}^{1,1}\cap L_\alpha$，$u>0$且满足

$$\begin{cases}\left((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}-\frac{\gamma}{|x|^{\alpha}}\right)u(x)=f(x,u), & x\in R^n\\ u(x)>0, & x\in R^n\end{cases} \tag{18}$$

假设函数$f(x,u)$关于u是局部 Lipschitz 连续的，并且f是次临界的。那么对于任意的$\vartheta\in R^n$，存在$\omega\ne\vartheta$使得要么$u(x)=u(|x-\vartheta|)$，并且u关于x_1方向先增后减；要么u满足

$$v(x)=v(|x-\omega|).$$

证明：我们从 $x_1=-\infty$ 沿着 x_1 正方向移动平面，直到极限位置，并且对于任何 $x\in\Sigma_\tau$，$\Phi_\tau(x)\geq 0$ 都成立。它可以分为以下两步。

第一步：我们证明当 τ 足够接近 $-\infty$ 时，

$$\Phi_\tau(x)\geq 0,\quad x\in\Sigma_\tau. \tag{19}$$

由(11)，很容易发现，当 $|x|$ 充分大时，

$$c(x,\tau)\sim\frac{1}{|x|^{2\alpha}}.$$

根据引理 2 (无穷远处衰减定理)，得到存在一个常数 $R_0>0$ (与 τ 无关)使得如果 $\bar{x}$ 是 $\Phi_\tau(x)$ 在 Σ_τ 中的最小值，那么有

$$|\bar{x}-\vartheta|\leq R_0. \tag{20}$$

因此我们已经证明出对于 τ 充分负时，

$$\Phi_\tau(x)\geq 0,\quad x\in\Sigma_\tau$$

第二步：我们将平面 T_τ 向右移直到它的极限位置，令

$$\tau_0=\sup\left\{\tau\leq\vartheta_1\mid\Phi_\mu(x)\geq 0,\forall x\in\Sigma_\mu,\mu\leq\tau\right\}$$

以下我们分两种情况讨论

情况一：当 $\tau_0<\vartheta_1$ 时，我们断定

$$\Phi_{\tau_0}(x)\equiv 0,\ \forall x\in\Sigma_{\tau_0}. \tag{21}$$

我们说明 T_τ 可以往右移动，也就是说，存在 $\varepsilon>0$，使得对于任何 $\tau\in(\tau_0,\tau_0+\varepsilon)$，我们有

$$\Phi_\tau(x)\geq 0,\ x\in\Sigma_\tau.$$

这和 τ_0 的定义矛盾。

通过(20)，$\Phi_\tau(x)$ 的最小负值一定在 $B_{R_0}(0)$ 内部取到，事实上，我们只需证明当 τ 充分靠近 τ_0 时，

$$\Phi_\tau(x)\geq 0,\ \ x\in\Sigma_\tau\cap B_{R_0}(0). \tag{22}$$

当 $\tau_0<\vartheta_1$ 时，有

$$\Phi_{\tau_0}(x)>0,\quad x\in\Sigma_{\tau_0}$$

否则的话，存在一点 $x^0\in\Sigma_{\tau_0}$ 使得

$$\Phi_{\tau_0}(x^0)=\min_{\Sigma_{\tau_0}}\Phi_{\tau_0}(x)=0.$$

我们有

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\Phi_\tau(\bar{x})&=C_{n,\alpha}PV\int_{R^n}\frac{\Phi_\tau(\bar{x})-\Phi_\tau(y)}{|\bar{x}-y|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y\\&\leq C_{n,\alpha}\int_{\Sigma_\tau}\frac{2\Phi_\tau(\bar{x})}{|\bar{x}-\tilde{y}|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y<0.\end{aligned}$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\Phi_\tau(x) \geq & \frac{\gamma}{|x^\tau-\vartheta|^\alpha}(v_\tau(x)-v(x))+\frac{v_\tau^p(x)}{\left[|x^\tau-\vartheta|^{n-\alpha}v_\tau(x)\right]^p}f\left(\tilde{x}^\tau,|x^\tau-\vartheta|^{n-\alpha}v_\tau(x)\right)\\
&-\frac{v_\tau^p(x)}{\left[|x-\vartheta|^{n-\alpha}v_\tau(x)\right]^p}f\left(\tilde{x},|x-\vartheta|^{n-\alpha}v(x)\right)\\
&+\frac{1}{|x-\vartheta|^{n+\alpha}}f\left(\tilde{x},|x-\vartheta|^{n-\alpha}v_\tau(x)\right)-\frac{1}{|x-\vartheta|^{n+\alpha}}f\left(\tilde{x},|x-\vartheta|^{n-\alpha}v(x)\right)\\
>& 0
\end{aligned}
$$

矛盾。因此由 $\Phi_\tau(x)>0$，我们知道存在一个常数 $h_0>0$，给定 $0<\delta<l$ 充分小，使得

$$\Phi_{\tau_0}(x)\geq h_0,\quad x\in\overline{\Sigma_{\tau_0-\delta}\cap B_{R_0}(0)}.$$

由于 $\Phi_\tau(x)$ 关于 τ 的连续性，一定存在 $\varepsilon>0$ 并且 $\varepsilon<\delta$，使得对于所有 $\tau\in(\tau_0,\tau_0+\varepsilon)$，有

$$\Phi_\tau(x)\geq 0,\quad x\in\overline{\Sigma_{\tau_0-\delta}\cap B_{R_0}(0)}. \tag{23}$$

设

$$\Omega=\Sigma_v, D=\left(\Sigma_\tau\setminus\Sigma_{\tau_0-\delta}\right)\cap B_{R_0}(0).$$

由引理 1 (狭窄区域极值定理)，有

$$\Phi_\tau(x)\geq 0,\quad \forall x\in\left(\Sigma_\tau\setminus\Sigma_{\tau_0-\delta}\right)\cap B_{R_0}(0). \tag{24}$$

结合(20)，(23)，(24)，可以推断出对于所有 $\tau\in(\tau_0,\tau_0+\varepsilon)$，

$$\Phi_\tau(x)\geq 0,\quad \forall x\in\Sigma_\tau.$$

这和 τ_0 的定义矛盾，因此当 $\tau_0<\vartheta_1$ 时，有

$$\Phi_{\tau_0}(x)\equiv 0,\quad x\in\Sigma_{\tau_0}.$$

因此，存在 $c<\vartheta_1$，

$$v(x_1,x')=v(2c-x_1,x'),\quad x\in R^n.$$

情况二：当 $\tau_0=\vartheta_1$ 时，从 $+\infty$ 向左移动平面 T_τ 直到极限位置，如果两平面重合，那么 u 关于点 ϑ 对称满足 $u(x_1,x')=u(2\vartheta-x_1,x')$，并且关于 x_1 方向先增后减；如果两平面不重合，那么存在 $\omega>\vartheta$，有

$$v(x_1,x')=v(2\omega-x_1,x'),\quad x\in R^n$$

至此，定理 1 被证明。

3. 结论

本文主要研究带 Hardy 项的分数阶拉普拉斯方程正解的对称性和单调性，其中 Hardy 项是文章的创新点，就此模型我们还可以对带 Hardy 项的方程组，n 个方程以及抛物区域上解的对称性和单调性或者利用移动球面法进行深入探讨、研究。

参考文献

[1] Berestycki, H. and Nirenberg, L. (1991) On the Method of Moving Planes and the Sliding Method. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, **22**, 1-37. https://doi.org/10.1007/BF01244896

[2] Chen, W., Li, C. and Li, G. (2017) Maximum Principles for a Fully Nonlinear Fractional Order Equation and Symmetry of Solutions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **56**, Article No. 29. https://doi.org/10.1007/s00526-017-1110-3

[3] Gidas, B., Ni, W. and Nirenberg, L. (1981) Symmetry of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations in R^n, Mathematical Analysis and Applications. Vol. 7a, Advances in Mathematics, Supplementary Studies. Academic Press, New York.

[4] Caffarelli, L. and Silvestre, L. (2007) An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian. *Communications in Partial Differential Equations*, **32**, 1245-1260. https://doi.org/10.1080/03605300600987306

[5] Chen, W. and Zhu, J. (2016) Indefinite Fractional Elliptic Problem and Liouville Theorems. *Journal of Differential Equations*, **260**, 4758-4785. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.11.029

[6] Chen, W., Li, C. and Ou, B. (2005) Classification of Solutions for a System of Integral Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **30**, 59-65. https://doi.org/10.1081/PDE-200044445

[7] Ma, L. and Chen, D. (2008) Radial Symmetry and Monotonicity Results for an Integral Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **342**, 943-949. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.12.064

[8] Chen, W., Li, C. and Ou, B. (2005) Qualitative Properties of Solutions for an Integral Equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **12**, 347-354. https://doi.org/10.3934/dcds.2005.12.347

[9] Fall, M.M. (2020) Semilinear Elliptic Equations for the Fractional Laplacian with Hardy Potential. *Nonlinear Analysis*, **193**, Article ID: 111311. https://doi.org/10.1016/j.na.2018.07.008

[10] Dai, W. and Qin, G. (2020) Liouville Type Theorems for Elliptic Equations with Dirichlet Conditions in Exterior Domains. *Journal of Differential Equations*, **269**, 7231-7252. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.05.026

[11] Jarohs, S. and Weth, T. (2016) Symmetry via Antisymmetric Maximum Principles in Nonlocal Problems of Variable Order. *Annali di Matematica*, **195**, 273-291. https://doi.org/10.1007/s10231-014-0462-y

[12] Chen, W., Li, C. and Li, Y. (2017) A Direct Method of Moving Planes for Fractional Laplacian. *Advances in Mathematics*, **308**, 404-437. https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.11.038

[13] Chen, W., Fang, Y. and Yang, R. (2015) Liouville Theorems Involving the Fractional Laplacian on a Half Space. *Advances in Mathematics*, **274**, 167-198. https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.12.013

[14] Bogdan, K., Grzywny, T., Jakubowski, T. and Pilarczyk, D. (2019) Fractional Laplacian with Hardy Potential. *Communications in Partial Differential Equations*, **44**, 20-50. https://doi.org/10.1080/03605302.2018.1539102

[15] Brandle, C., Colorado, E., de Pablo, A. and Sanchez, U. (2013) A Concave-Convex Elliptic Problem Involving the Fractional Laplacian. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, **143**, 39-71. https://doi.org/10.1017/S0308210511000175

[16] Cai, M. and Ma, L. (2018) Moving Planes for Nonlinear Fractional Laplacian Equation with Negative Powers. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **38**, 4603-4615. https://doi.org/10.3934/dcds.2018201

[17] Wang, G., Ren, X., Bai, Z. and Hou, W. (2019) Radial Symmetry of Standing Waves for Nonlinear Fractional Hardy-Schrödinger Equation. *Applied Mathematics Letters*, **96**, 131-137. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.04.024

[18] 叶方琪. 分数阶 Hartree 方程负解的对称性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 980-990. https://doi.org/10.12677/AAM.2022.113105