Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(9), 3814-3825**
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.129375

Hans汉斯

基于退化抛物方程的期权漂移率反问题

宋苗苗，李　湘，程正祥

兰州交通大学数理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年8月4日；录用日期：2023年9月1日；发布日期：2023年9月6日

摘　要

在股票价格演化过程中，漂移率是一个重要的参数，对相应的期权定价具有显著影响。本文研究了一个反问题，即通过期权的当前市场价格来恢复漂移函数，由于我们的数学模型在无穷大时不趋于零，这与传统的波动率反问题不同，可能会给理论分析和数值计算带来显著困难。为了克服这一困难，我们应用线性化方法并引入变量替换，将原始问题转化为退化抛物型方程在有界区域上的逆问题。通过解决这个逆问题，我们能够恢复未知的漂移率并解决人工截断带来的误差。基于最优控制框架，我们将原始问题转化为一个优化问题，并证明了极小值的存在性。在推导出必要条件之后，我们还证明了极小值的唯一性和稳定性。

关键词

漂移率，反问题，最优控制，存在性，唯一性

Inverse Problem of Option Drift Rate Based on Degenerate Parabolic Equations

Miaomiao Song, Xiang Li, Zhengxiang Cheng

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu

Received: Aug. 4th, 2023; accepted: Sep. 1st, 2023; published: Sep. 6th, 2023

Abstract

In the process of stock price evolution, the drift rate is an important parameter that significantly influences the pricing of corresponding options. In this paper, we investigate a reverse problem, which involves recovering the drift function from the current market prices of options. Due to the fact that our mathematical model does not tend to zero as it approaches infinity, unlike the traditional volatility inverse problem, this poses considerable challenges for theoretical analysis and numerical computations. To overcome this difficulty, we employ a linearization method and in-

文章引用：宋苗苗，李湘，程正祥．基于退化抛物方程的期权漂移率反问题[J]．应用数学进展, 2023, 12(9): 3814-3825.
DOI: 10.12677/aam.2023.129375

troduce variable substitutions to transform the original problem into an inverse problem of degenerate parabolic equations on a bounded domain. By solving this inverse problem, we are able to recover the unknown drift rate and address the limitations caused by artificial truncation. Based on an optimal control framework, we formulate the original problem as an optimization problem and demonstrate the existence of a minimum. After deriving the necessary conditions, we establish the uniqueness and stability of the minimum.

Keywords

Rrift Rate, Inverse Problem, Optimal Control, Existence, Uniqueness

1. 引言

由于金融建模和市场预测的需求，反问题在金融数学中备受关注。在过去 20 年，学者们广泛研究了期权定价领域的参数反演问题，这些研究的基础是著名的 Black-Scholes [1]模型。该模型中的关键参数漂移率与期权的标的资产相关，这对期权的市场价值具有重要影响。因此，在金融领域，许多学者和从业者在期权定价方面特别关注标的资产的漂移率。然而，在实际市场中，我们无法直接观察到基础资产价格的变化情况，因为这种变化是不可预测的。显然，看涨期权的价值是与诸多合同参数相关的函数，包括执行价格 K 和到期剩余时间 $T-t$，其中 $T-t$ 表示从当前时间到到期日的时间间隔。对于我们的反问题，我们只使用 $u(s,t;K,T)$ 作为期权价值。

问题 P1：众所周知，欧式看涨期权 $u(s,t;K,T)$，满足以下 Black-Sholes 方程[2]：

$$\begin{cases} u_t+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 u_{ss}+u(s)su_s-ru=0, & (s,t)\in R^+\times(0,T), \\ u(s,T)=H(s-K) & s\in R^+. \end{cases} \tag{1}$$

这里，S 是标的资产的价格，K 是执行价格，T 是到期时间，σ 和 r 分别是波动率和无风险利率，假设它们是常数，即 $\sigma=\sigma_0$。H 指 Heavisede 函数。我们希望根据当前市场价格来确定漂移函数 $u(s)$，以更准确地反映市场的实际情况：

$$u(t^*,S^*;T,K)=u^*(T,K),\quad K>0. \tag{2}$$

Dupire 在[2]中首次探讨了反问题，他运用了转移概率密度函数的对称性，用一种带有参数 K 和 T 的对偶性方程替代了期权定价的逆问题，为后来的研究者在这个领域打下了重要基础。在[3]中，作者利用 Carleman 估计，将波动性的识别问题简化为具有终端观测的反抛物型问题，并获得了唯一性和稳定性结果。该方法产生了非线性 Fredholm 积分方程，通过迭代求解这个积分方程，可以获得近似解。此外，在文献[4] [5]中，研究了在已知解的情况下识别主系数的逆问题，以确保识别系数的存在性、唯一性和稳定性。在解决不适定问题时，Tikhonov 正则化方法一直是一个重要的工具。文献[6]提出了一个新的连续时间模型，以恢复波动率，并通过求解两个完全非线性的抛物型方程得到相应的结果。在文献[7]中，用五个特殊数字将波动率进行参数化，并通过(非线性)最小化适配函数实现。目的是将参数化的波动率与观测数据进行拟合或匹配。近年来，线性化技术在解决期权定价的逆问题方面得到了广泛应用。在文献[8] [9]

[10]中，通过采用线性化技术，将问题转化为反源问题，从而恢复未知性。通过应用积分方程法和 Landweber 迭代法，获得了反问题的稳定数值解，同时进行了理论分析和数值算例。相较于波动率逆问题，有关漂移率逆问题的文献相对较少。在文献[11]中，作者研究了从市场价格中恢复二元看涨期权的漂移率的反问题。通过采用线性化方法，将该反问题转化为积分方程，并获得了相应的数值结果。在文献[12]中，首次对逆问题 P1 进行了研究，并且转化为以下的问题 P2。

问题 P2：考虑以下二阶抛物型方程：

$$\begin{cases} P_\tau - \frac{1}{2}\sigma_0^2 P_{yy} + \left(\frac{1}{2}\sigma_0^2 + g(y)\right)P_y + rP = 0, & (y,\tau) \in R \times (0,\tau^*), \\ P(y,0) = H(-y), & y \in R. \end{cases} \tag{3}$$

这里，$g(y)$ 是(3)中的未知系数，附加条件

$$P(y,\tau^*) = P^*(y),\ y \in R. \tag{4}$$

确定一个函数 P 和 $g(y)$，使得(3)~(4)条件成立。

关于退化抛物型方程系数的识别，已经进行了大量的研究。在文献[13]中，已经探讨了以下问题：如何同时重建初值和源系数，这涉及到退化抛物型方程的反问题，通过运用 Carleman 估计，我们已经证明了原始问题解的唯一性和稳定性。在文献[14]中，研究了从最终观测信息中恢复源温度的反问题，唯一性的证明采用了积分变换，并应用了刘维尔定理获得。通过利用积分恒等式的涵义，我们建立了反问题的 Lipschitz 稳定性。另一方面，在文献[15]中，作者研究了关于抛物面方程的逆问题，该问题涉及到扩散系数的重构。基于双曲问题的全局 Carleman 估计和积分变换的反演，我们获得了通过空间区间一侧的边界数据来识别一般系数的唯一性结果。尽管我们无法详尽回顾所有内容，但我们提及了最近一篇关于低阶系数的反问题可解性研究的论文[16]。在该论文中，作者在积分观测的附加条件下证明了 Black-Scholes 型方程中确定低阶系数的反问题的存在性和唯一性定理。对于退化抛物型方程的其他问题，我们可以参考文献[17] [18] [19]以及这些文献所引用的参考资料。

值得注意的是，上述学者及其研究在期权定价的逆波动性和漂移率问题方面做出了重要贡献。然而，这些研究还存在改进的空间。其中一个明显的不足是，由于理论问题 P2 位于无界区域，许多学者不得不通过人工截断进行数值模拟。这种方法存在潜在问题，即过大的截断间隔会增加计算负担，而过小的截断间隔则会引入误差。在实际应用中，这种方法可能无法精确控制风险。为了克服这一问题，本文的主要目标是使用一些变量替换[20]，得到以下问题 P。

取

$$x = \arctan y,\ P = U.$$

问题 P：为二阶退化抛物型方程问题：

$$\begin{cases} U_t - \frac{1}{2}\sigma_0^2 \cos^4 x U_{xx} + \left[\sigma_0^2 \sin x \cos^3 x + \left(\frac{1}{2}\sigma_0^2 + a(x)\right)\cos^2 x\right]U_x + rU = 0, & (x,\tau) \in Q, \\ U(x,0) = H(-x), & x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \end{cases} \tag{5}$$

其中 $Q = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \times (0,T]$，附加条件为

$$U(\tau,x^*) = U^*(x), x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \tag{6}$$

$$a(x) := g(\tan x).$$

通过确定函数 U 和 $a(x)$，我们可以满足所给模型的(5)~(6)。我们将尝试逆向推导隐含的漂移率 $a(x)$。

在本文的研究中，我们采用最优控制方法来研究问题 P2。与其他有关漂移率识别问题的论文相比，我们的工作具有如下特色。首先，我们要识别的未知函数是一阶项系数，而不是主函数本身。其次，我们将无界域的数学模型，通过变量替换，转化为有界域上的问题，这更有利于理论分析和数值计算。这一变换的缺点是原方程将化为一个退化抛物型方程，但我们很难做到两全，相较于无界域的困难，退化所带来的困难可能更容易解决。

2. 最优控制问题

最优控制问题的目标是寻找一个最优的控制策略 $a(x)$，使得性能指标 $J(a)$ 最小化。通过引理 2.1 中的能量估计，我们可以将性能指标 $J(a)$ 与系统状态的能量联系起来，从而在优化过程中更好地理解控制策略对系统能量的影响，进而优化控制策略的设计。通过对系统状态 $U(x,\tau)$ 的能量进行估计，得到了系统状态的能量上界。对于以下最优控制问题 P3 进行考虑。

问题 P3：存在 $\bar{a} \in \mathcal{A}$，使得

$$J(a) = \min_{\bar{a} \in \mathcal{A}} J(a), \tag{7}$$

这里，

$$J(a) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| U\left(x,\tau^*;a\right) - U^*(x) \right|^2 \mathrm{d}x + N\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\nabla a|^2 \mathrm{d}x, \tag{8}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ a(x) \middle| 0 < a_0 < a(x) < \alpha_1, \nabla a \in L^2\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), |\nabla a| \le \alpha_2 \right\}.$$

对于给定的 $\bar{a} \in \mathcal{A}$，$U\left(x,\tau^*;a\right)$ 是问题(5)的解，N 是正则化参数。

引理 2.1 如果 $U(x,\tau)$ 是初边值问题(5)的解。那么

$$\max_{0\le\tau\le\tau^*} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} U^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + \int_Q U_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \le C\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(-x)^2 \mathrm{d}x. \tag{9}$$

其中，C 是一个常数。

证明 对于方程(5)，当 $0 \le \tau \le \tau^*$ 时，我们有

$$\int_{Q_\tau} \left(U_\tau - \frac{1}{2}\sigma_0^2 \cos^4 x U_{xx} + \left[\sigma_0^2 \sin x \cos^3 x + \left(\frac{1}{2}\sigma_0^2 + a(x) \right)\cos^2 x \right] U_x + rU \right) U \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau = 0.$$

其中 $Q_\tau = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \times (0,\tau]$ 根据分部积分，可以得出：

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{U^2}{2}\bigg|_0^\tau \mathrm{d}x + \int_{Q_\tau} \left(\frac{1}{2}\sigma_0^2 \cos^4 x U_x^2 + rU^2 \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{Q_\tau} \left(\sigma_0^2 \cos^3 x \sin x - \frac{1}{2}\sigma_0^2 \cos^2 x - a\cos^2 x \right) U_x U \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式，可以得到：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{U^2}{2}\bigg|_\tau \mathrm{d}x+\int_{Q_\tau}\left(\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xU_x^2+rU^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$
$$\le\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}H(-x)^2\,\mathrm{d}x+\int_{Q_\tau}\left(\frac{1}{4}\sigma_0^2\cos^4 xU_x^2+CU^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.$$

即，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{U^2}{2}\bigg|_\tau \mathrm{d}x+\int_{Q_\tau}\left(\frac{1}{4}\sigma_0^2\cos^4 xU_x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$
$$\le\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}H(-x)^2\,\mathrm{d}x+\int_{Q_\tau}CU^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.$$

利用 Gronwall 不等式，我们得到：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{U^2}{2}\bigg|_\tau \mathrm{d}x+\int_{Q}\left(\frac{1}{4}\sigma_0^2\cos^4 xU_x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$
$$\le C\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}H(-x)^2\,\mathrm{d}x.$$

引理 2.1 证明完毕。

定理 2.1 存在性存在一个 $J(a)$ 的极小元 $\bar{a}\in\mathcal{A}$，即

$$J(a)=\min_{\bar{a}\in\mathcal{A}}J(a),$$

证明 定理 2.1 的证明是标准的，具体可参见[21]。

3. 必要条件

本节引入了一个三元组 (U,V,a) 的概念，将控制函数 a 与系统状态 U 和 V 关联起来。这种关联性的引入在最优控制问题中是相对新颖的，通过逐步的推导，得出了关于系统状态 U 和 V 以及控制函数 a 之间的方程和不等式。

定理 3.1 如果 a 是最优控制问题(7)的解，那么存在一个三元组 (U,V,a) 满足以下系统

$$\begin{cases}U_\tau-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xU_{xx}+\left[\sigma_0^2\sin x\cos^3 x+\left(\frac{1}{2}\sigma_0^2+a(x)\right)\cos^2 x\right]U_x+rU=0, & (x,\tau)\in Q,\\ U(x,0)=H(-x), & x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}\tag{10}$$

$$\begin{cases}-V_\tau-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xV_{xx}-\frac{1}{2}\sigma_0^2\left(2\sin x\cos^3 x+\cos^2 x\right)V_x-\cos^2 x\left(a(x)V\right)_x+rV=0, & (x,\tau)\in Q,\\ V(x,\tau)=U\left(x,\tau^*\right)-U^*(x), & x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\end{cases}\tag{11}$$

和

$$N\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\nabla a\cdot\nabla(h-a)\mathrm{d}x-\int_Q V(h-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\ge 0,\tag{12}$$

对于任意的 $h\in\mathcal{A}$ 都成立，其中 $Q=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times\left(0,\tau^*\right)$。

证明 对于任意给定的 $h\in\mathcal{A}$，如果 $0\le\delta\le 1$，则

$$a_\delta=(1-\delta)a+\delta h\in\mathcal{A}.$$

由于 a 是最优解，根据公式(8)，我们可以推断出 U_δ 是问题(10)在 $a=a_\delta$ 时的解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\delta}J(a_\delta)\Big|_{\delta=0}=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(U(x,\tau^*)-U^*(x)\right)\left(\frac{\partial U_\delta}{\partial\delta}\Big|_{\delta=0}\right)\mathrm{d}x+2N\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\nabla a\cdot\nabla(h-a)\mathrm{d}x\ge 0. \tag{13}$$

令 $U'_\delta\equiv\dfrac{\partial U_\delta}{\partial\delta}$，直接计算(10)式可以得到

$$\begin{cases}(U'_{\delta\tau})=\dfrac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xU'_{\delta xx}-\dfrac{1}{2}\sigma_0^2\left(2\sin x\cos^3 x+\cos^2 x\right)U'_{\delta x}-a_\delta(x)\cos^2 xU'_{\delta x}-(h-a)\cos^2 xU_{\delta x}-rU'_\delta,\\ U'_\delta\big|_{\tau=0}=0,\end{cases} \tag{14}$$

设 $\xi=U'_\delta\big|_{\delta=0}$，则 ξ 满足

$$\begin{cases}\xi_\tau=\dfrac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 x\xi_{xx}-\dfrac{1}{2}\sigma_0^2\left(2\sin x\cos^3 x+\cos^2 x\right)\xi_x-a(x)\cos^2 x\xi_x-(h-a)\cos^2 x\dfrac{\partial U}{\partial x}-r\xi,\\ \xi\big|_{\tau=0}=0,\end{cases} \tag{15}$$

从(13)式中，我们可以推得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(U(x,\tau^*)-U^*(x)\right)\xi(x,\tau^*)\mathrm{d}x+N\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\nabla a\cdot\nabla(h-a)\mathrm{d}x\ge 0. \tag{16}$$

假设 V 是下述方程组的广义解：

$$\begin{cases}\mathcal{L}^*V=-V_\tau-\dfrac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xV_{xx}-\dfrac{1}{2}\sigma_0^2\left(2\sin x\cos^2 x\right)V_x-\cos^2 x\left(a(x)V\right)_x+rV=0,\\ V(x,\tau)=U(x,\tau^*)-U^*(x),\end{cases} \tag{17}$$

由(15)和(17)式，得

$$\begin{aligned}0&=\int_Q L^*V\cdot\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\ &=\int_Q\left(-V_\tau\xi-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xV_{xx}\xi-\frac{1}{2}\sigma_0^2\left(2\sin x\cos^3 x+\cos^2 x\right)V_x\xi-\cos^2 x\left(a(x)V\right)_x\xi+rV\xi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\ &=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}V\xi\Big|_0^{\tau^*}\mathrm{d}x+\int_Q\left(V\xi_\tau-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xV\xi_{xx}+\frac{1}{2}\sigma_0^2\left(2\sin x\cos^3 x+\cos^2 x\right)V\xi_x+a(x)\cos^2 xV\xi_x+rV\xi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\ &=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(U(x,\tau^*)-U^*(x)\xi(x,\tau^*)\right)\mathrm{d}x+\int_Q V(a-h)U_x\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{18}$$

通过结合方程(16)和(18)，可以推导得到

$$N\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\nabla a\cdot\nabla(h-a)\mathrm{d}x-\int_Q V(h-a)U_x\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\ge 0.$$

定理 3.1 证明完毕。

4. 唯一性

将引理 4.1 和引理 4.2 应用在最优控制问题中，它们将有界连续函数的性质与梯度的平方联系起来，

通过引理的结论，可以推导出关于解的估计和性质。引理 4.2 给出了两个最优控制问题解的差异估计，通过控制变量的变化来分析解之间的关系，定理 4.5 探讨了解的唯一性问题，它通过假设极小元在某点相等，并结合引理和估计结果，推导出解在整个区间内都相等的结论。

引理 4.1 对于任何有界连续函数 $f(x)\in C\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，我们有

$$\max_{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\left|f(x)\right|\le\left|f(x_0)\right|+C\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\nabla f\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

其中 x_0 是不动点。

证明

$$\begin{aligned}\left|f(x)\right|&\le\left|f(x_0)\right|+\left|\int_{x_0}^{x}f'\,\mathrm{d}x\right|\\&\le\left|f(x_0)\right|+\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\nabla f\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

引理 4.1 证明完毕。

假设 $a_1(x)$ 和 $a_2(x)$ 分别是最优控制问题 P3 的两个极小元，并且当 $\overline{a}=a_i$ 时，方程(10)和(11)的解分别为 $\{U_i,V_i\}(i=1,2)$。设

$$a_1-a_2=A,\quad U_1-U_2=U,\quad V_1-V_2=V.$$

那么 U 和 V 满足

$$\begin{cases}U_\tau-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xU_{xx}+\left(\sigma_0^2\sin x\cos^3 x-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^2 x+a_1(x)\cos^2 x\right)U_x+rU=A-AU_{2x},\\U(x,0)=0.\end{cases}\tag{19}$$

和

$$\begin{cases}-V_\tau-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xU_{xx}-\frac{1}{2}\sigma_0^2\left(2\sin x\cos^3 x+\cos^2 x\right)V_x-\cos^2 x\left(a_1(x)V\right)_x+rV=\left(AV_2\right)_x,\\V\left(x,\tau^*\right)=U\left(x,\tau^*\right),\end{cases}\tag{20}$$

引理 4.2

$$\left\|V_i\right\|_\infty\le\left\|U_i\left(x,\tau^*\right)-U_i^*(x)\right\|_\infty\left(i=1,2\right).\tag{21}$$

证明 设 $t=\tau^*-\tau$，由(11)式，得

$$\begin{cases}\mathcal{L}_1V_i=V_{it}-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xV_{ixx}-\frac{1}{2}\sigma_0^2\left(2\sin x\cos^3 x+\cos^2 x\right)V_{ix}-\cos^2 x\left(a_i(x)V_i\right)_x+rV_i=0,\\V_i(x,0)=U_i\left(x,\tau^*\right)-U_i^*(x),\end{cases}$$

令 $W=\left\|U_i\left(x,\tau^*\right)-U_i^*(x)\right\|_\infty\pm V_i$，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_1W=\mathcal{L}_1\left\|U_i-U_i^*\right\|_\infty\pm\mathcal{L}_1V_i=r\left\|U_i-U_i^*\right\|_\infty\ge0,\\&W\big|_{t=0}=\left\|U_i\left(x,\tau^*\right)-U_i^*(x)\right\|_\infty\pm\left(U_i\left(x,\tau^*\right)-U_i^*(x)\right)\ge0,\end{aligned}$$

运用最大值原理，最终得到

$$\left\|V_i\right\|_\infty \le \left\|U_i\left(x,\tau^*\right)-U_i^*\left(x\right)\right\|_\infty \left(i=1,2\right).$$

引理 4.2 证明完毕。

引理 4.3 对于方程(19)，我们进行了估计

$$\max_{0\le\tau\le\tau^*}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} U^2 \mathrm{d}x \le C\left(\max\left|A\right|^2\right)\left(\int_Q \left|U_{2x}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+1\right), \tag{22}$$

和

$$\max_{0\le\tau\le\tau^*}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} U_x^2 \mathrm{d}x \le C\left(\max\left|A\right|^2\right)\left(\int_Q \left|U_{2x}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+1\right). \tag{23}$$

这里 C 被定义为一个常数。

证明 (22)式的证明是标准的，我们只需要证明估计(23)式。根据方程(19)，在 $0\le\tau\le\tau^*$ 的范围内，我们可以得到以下结果：

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau}\left(-a_2-AU_{2x}\right)U_\tau \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\
&=\int_{Q_\tau}\left(U_\tau-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xU_{xx}+\left(\sigma_0^2\sin x\cos^3 x-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^2 x+a_1\left(x\right)\cos^2 x\right)U_x+rU-a_1\left(x\right)\right)U_\tau \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\
&=\int_{Q_\tau}U_\tau^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_{Q_\tau}\frac{\sigma_0^2}{2}\cos^4 xU_xU_{\tau x}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{rU^2}{2}\bigg|_0^\tau \mathrm{d}x \\
&+\int_{Q_\tau}\left(\left(\sigma_0^2\sin x\cos^2 x-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^2 x+a_1\left(x\right)\cos^2 x\right)U_xU_\tau-a_1U_\tau\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

通过利用 $a_1\left(x\right)$ 的有界性，我们可以得到如下的不等式：

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau}U_\tau^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 x\frac{U_x^2}{2}\bigg|_0^\tau \mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\frac{U^2}{2}\bigg|_\tau \mathrm{d}x \\
&=\int_{Q_\tau}\left(-\sigma_0^2\sin x\cos^2 x+\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^2 x-a_1\left(x\right)\cos^2 x\right)U_xU_\tau+AU_\tau-AU_{2x}U_\tau \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\
&\le\int_{Q_\tau}\left(CU_x^2+\frac{1}{2}U_\tau^2+C\left(\max\left|A\right|^2\right)+C\left(\max\left|A\right|^2\right)U_{2x}^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

即，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}U_\tau^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 x\left(\frac{U_x^2}{2}\right)\bigg|_\tau \mathrm{d}x \\
&\le C\int_{Q_\tau}U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+C\left(\max\left|A\right|^2\right)\int_{Q_\tau}\left(U_{2x}^2+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

根据 Gronwall 不等式，我们有

$$\int_{Q_\tau}\frac{1}{2}U_\tau^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 x\left(\frac{U_x^2}{2}\right)\bigg|_\tau \mathrm{d}x\le C\left(\max\left|A\right|^2\right)\left(\int_{Q_\tau}U_{2x}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+1\right).$$

引理 4.3 证明完毕。

引理 4.4 给出了方程(20)的估计

$$\max_{0\le\tau\le\tau^*}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}V^2\mathrm{d}x\le C\left(\max|A|^2\right)\left(\int_{Q_\tau}\left(V_2^2U_{2x}^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+1\right),\tag{24}$$

这里 C 是一个常数。

证明 对于(20)式，当 $0\le\tau\le\tau^*$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau}\left(AV_2\right)V\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\
&=\int_{Q_\tau}\left(-V_\tau-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xV_{xx}-\frac{1}{2}\sigma_0^2\left(2\sin x\cos^3 x+\cos^2 x\right)V_x-\cos^2 x\left(a_1(x)V\right)_x+rV\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{V^2}{2}\right)\Bigg|_\tau^{\tau^*}\mathrm{d}x+\int_{Q_\tau}\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xV_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_{Q_\tau}\left(\sigma_0^2\sin x\cos^3 x-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^2 x\right)V_xV\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\
&\quad+\int_{Q_\tau}\cos^2 xa_1(x)VV_x\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_{Q_\tau}rV^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\
&=-\int_{Q_\tau}AV_2V_x\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

运用引理 4.3，可以得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{V^2}{2}\Bigg|_\tau\mathrm{d}x+\int_{Q_\tau}\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^4 xV_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_{Q_\tau}\left(\sigma_0^2\sin x\cos^3 x-\frac{1}{2}\sigma_0^2\cos^2 x\right)V_xV\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_{Q_\tau}rV^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{V^2}{2}\Bigg|_{(x,\tau^*)}\mathrm{d}x-\int_{Q_{\tau^*}}\cos^2 xa_1(x)VV_x\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-\int_{Q_{\tau^*}}AV_2V_x\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\
&\le C\left(\max|A|^2\right)\left(\int_{Q_\tau}U_{2x}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+1\right)+C\left(\int_{Q_\tau}V^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right)+\frac{a_1\sigma_0^2}{4a_1}\int_{Q_\tau}V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+C\left(\max|A|^2\right)\int_{Q_\tau}V_2^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

最终，利用 Gronwall 不等式推导出

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{V^2}{2}\Bigg|_\tau\mathrm{d}x+\int_{Q_\tau}\left(\frac{1}{2}\sigma_0^2-\frac{a_1\sigma_0^2}{4a_1}\right)V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\le C\left(\max|A|^2\right)\left(\int_{Q_\tau}\left(U_{2x}^2+V_2^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+1\right).$$

引理 4.4 证明完毕。

定理 4.1 假设 $a_1(x)$，$a_2(x)$ 是最优控制问题 P3 的两个极小元。存在某个点 x_0 使得

$$a_1(x_0)=a_2(x_0),$$

则当 $\tau^*\ll 1$时，有

$$a_1(x)\equiv a_2(x)\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

证明 在必要条件(12)中，当 $\bar{a}=a_1$ 时，取 $h=a_2$，当 $\bar{a}=a_2$ 时，取 $h=a_1$，得到

$$N\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\nabla a_1\cdot\nabla\left(a_2-a_1\right)\mathrm{d}x+\int_Q V_1\left(a_1-a_2\right)U_{1x}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\ge 0,\tag{25}$$

$$N\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\nabla a_2\cdot\nabla\left(a_1-a_2\right)\mathrm{d}x+\int_Q V_2\left(a_2-a_1\right)U_{2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\ge 0,\tag{26}$$

其中 $\{U_i,V_i\}(i=1,2)$ 是当 $\bar{a}=a_i\,(i=1,2)$ 时方程组(10)和(11)对应的解。从(25)式和(26)式中得

$$
\begin{aligned}
& N\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\nabla\left(a_2-a_1\right)\right|^2\mathrm{d}x \\
& \le \int_Q\left(a_1-a_2\right)\left(V_1U_{1x}-V_2U_{2x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\
& = \int_Q A\left(V_1U_{1x}-V_2U_{1x}+V_2U_{1x}-V_2U_{2x}-V_1+V_2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\
& = \int_Q A\left(VU_{1x}+V_2U_x-V\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\
& \le C\left(\max|A|\right)\sqrt{\int_Q V^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau}\left(\sqrt{\int_Q U_{1x}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau}+1\right) \\
& \quad +C\left(\max|A|\right)\sqrt{\int_Q V_2^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau}\sqrt{\int_Q U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

从引理 4.3、引理 4.4 和(27)式中，我们可以推出

$$
\begin{aligned}
& N\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\nabla A|^2\mathrm{d}x \\
& \le C\left(\max|A|^2\right)\sqrt{\tau^*\left(\int_Q\left(V_2^2+U_{2x}^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+1\right)}\left(\sqrt{\int_Q U_{1x}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau}+1\right) \\
& \quad +C\left(\max|A|^2\right)\sqrt{\int_Q V_2^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau}\sqrt{\tau^*\left(\int_Q U_{2x}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+1\right)}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

从引理 2.1，我们得出

$$\int_Q U_{1x}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau<\infty, \tag{29}$$

$$\int_Q U_{2x}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau<\infty. \tag{30}$$

从引理 4.2，我们得出

$$\int_Q V_2^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau<\infty. \tag{31}$$

从定理 4.2 的假设出发，存在一点 $x_0\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 使得

$$A\left(x_0\right)=x_1\left(x_0\right)-x_2\left(x_0\right)=0. \tag{32}$$

再根据引理 4.1，推得

$$\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}|A|\le C\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\nabla A|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{33}$$

从(27)式到(33)式，可以得出以下结论

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\nabla A|^2\mathrm{d}x\le C\left(\max|A|^2\right)\sqrt{\tau^*}\le C\sqrt{\tau^*}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\nabla A|^2\mathrm{d}x. \tag{34}$$

则当 $\tau^*\ll 1$ 时，可以得到

$$C^2\tau^*\le\frac{1}{2},$$

从而得到

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\nabla A|^2\mathrm{d}x\le 0.$$

因此，

$$\nabla A = 0.$$

从假设 $A(x_0) = 0$ 出发，可得

$$A(x) = a_1(x) - a_2(x) \equiv 0.$$

定理 4.1 证明完毕。

5. 总结

本文探讨了基于退化抛物方程的期权漂移率反问题，旨在通过已知的期权市场价格来恢复股票价格漂移率函数。然而，研究退化抛物模型漂移率的文献很少。在本文中，我们解决了以下退化抛物方程中恢复函数 $a(x)$ 的反问题 P：

$$U_\tau - \frac{1}{2}\sigma_0^2 \cos^4 x U_{xx} + \left[\sigma_0^2 \sin x \cos^3 x + \left(\frac{1}{2}\sigma_0^2 + a(x)\right)\cos^2 x\right]U_x + rU = 0,$$

$$(x,\tau) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, T].$$

由于问题涉及到无界域，与经典抛物型方程的逆问题不同，我们引入一些变量替换，将原问题转化为有界区域退化抛物型方程中的问题，从中可以恢复未知的漂移率，并解决人工截断引起的不足。然后，在论文中采用最优控制方法，将原始问题转化为一个优化问题，并证明了最小元的适定性。这一变换的缺点是原方程将转化为一个退化抛物型方程，但我们很难做到两全，相较于无界域的困难，退化所带来的困难可能更容易解决。总体而言，这篇论文在金融数学领域的探讨具有实际应用价值，即通过期权市场价格来推断股票价格漂移率。

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Mathematical Finance*, **81**, 637-654. https://doi.org/10.1086/260062

[2] Dupire, B. (1994) Pricing with a Smile. *Risk*, **7**, 1-10.

[3] Bouchouev, I. and Isakov, V. (1999) Uniqueness, Stability and Numerical Methods for the Inverse Problem That Arises in Financial Markets. *Inverse Problems*, **15**, R95. https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/3/201

[4] Jiang, L.S., Chen, Q.H., Wang, L.J. and Zhang, J.E. (2003) A New Well-Posed Algorithm to Recover Implied Local Volatility. *Quantitative Finance*, **3**, 451-457. https://doi.org/10.1088/1469-7688/3/6/304

[5] Jiang, L.S. and Bian, B.J. (2005) Identifying the Principal Coefficient of Parabolic Equations with Non-Divergent Form. *Journal of Physics*: *Conference Series*, **12**, 58-65. https://doi.org/10.1088/1742-6596/12/1/006

[6] Touchouev, I. and Isakov, V. (1997) The Inverse Problem of Option Pricing. *Inverse Problems*, **5**, 7-11. https://doi.org/10.1088/0266-5611/13/5/001

[7] De Cezaro, A. and Zubelli, J. (2013) The Tangential Cone Condition for the Iterative Calibration of Local Volatility Surfaces. *IMA Journal of Applied Mathematics*, **1**, 212-232. https://doi.org/10.1093/imamat/hxt037

[8] Deng, Z.C. and Yang, L. (2019) An Inverse Volatility Problem of Financial Products Linked with Gold Price. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **45**, 1243-1267. https://doi.org/10.1007/s41980-018-00196-x

[9] Isakov, V. (2017) Recovery of Time-Dependent Volatility Coefficient by Linearization. *Evolution Equations and Control Theory*, **3**, 119-134. https://doi.org/10.3934/eect.2014.3.119

[10] Deng, Z.C., Hon, Y.C. and Isakov, V. (2016) Recovery of Time-Dependent Volatility in Option Pricing Model. *Inverse Problems*, **32**, Article ID: 115010. https://doi.org/10.1088/0266-5611/32/11/115010

[11] Xing, Y., Wu, X., Zhao, L. and Zhao, P. (2020) Recovery of Local Volatility Surface Using Deep Learning. *Quantitative Finance*, **20**, 213-230.

[12] Ota, Y. and Kaji, S. (2016) Reconstruction of Local Volatility for the Binary Option Model. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **24**, 727-741. https://doi.org/10.1515/jiip-2013-0051

[13] Yang, L., Liu, Y. and Deng, Z.C. (2020) Multi-Parameters Identification Problem for a Degenerate Parabolic Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **366**, Article ID: 112422. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112422

[14] Li, R.R. and Li, Z.Y. (2021) Identifying Unknown Source in Degenerate Parabolic Equation from Final Observation. *Inverse Problems in Science and Engineering*, **29**, 1012-1031. https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1817005

[15] Cannarsa, P., Doubova, A. and Yamamoto, M. (2021) Inverse Problem of Reconstruction of Degenerate Diffusion Coefficient in a Parabolic Equation. *Inverse Problems*, **37**, Article ID: 125002. https://doi.org/10.1088/1361-6420/ac274b

[16] Bukharova, T.I., Kamynin, V.L. and Tonkikh, A.P. (2019) On Inverse Problem of Determination of the Coefficient in Strongly Degenerate Parabolic Equation. *Journal of Physics*: *Conference Series*, **1205**, Article ID: 012008. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1205/1/012008

[17] Kamynin, V.L. (2020) The Inverse Problem of Simultaneous Determination of the Two Time-Dependent Lower Coefficients in a Nondivergent Parabolic Equation in the Plane. *Mathematical Notes*, **107**, 93-104. https://doi.org/10.1134/S0001434620010095

[18] Cannarsa, P., Tort, J. and Yamamoto, M. (2010) Determination of Source Terms in a Degenerate Parabolic Equation. *Inverse Problems*, **26**, Article ID: 105003. https://doi.org/10.1088/0266-5611/26/10/105003

[19] Alabau-Boussouira, F., Cannarsa, P. and Fragnelli, G. (2006) Carleman Estimates for Degenerate Parabolic Operators with Applications to Null Controllability. *Journal of Evolution Equations*, **6**, 161-204. https://doi.org/10.1007/s00028-006-0222-6

[20] Yimamu, Y., Deng, Z.C. and Yang, L. (2022) An Inverse Volatility Problem in a Degenerate Parabolic Equation in a Bounded Domain. *AIMS Mathematics*, **7**, 237-266. https://doi.org/10.3934/math.20221056

[21] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.