Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(10), 4456-4466
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1210437

非线性阻尼波方程在$\mathbb{R}^3$上的时间依赖吸引子

王兴慧

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年9月25日；录用日期：2023年10月19日；发布日期：2023年10月26日

摘 要

基于时间依赖空间中的吸引子理论，本文研究了无界域上带有非线性阻尼的波方程解的长时间行为。利用压缩函数方法和一些估计技巧证明了过程的渐近紧性，进而得到了时间依赖吸引子的存在性。

关键词

时间依赖吸引子，非线性阻尼，压缩函数

Time-Dependent Attractor of Nonlinear Damping Wave Equation on $\mathbb{R}^3$

Xinghui Wang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Sep. 25th, 2023; accepted: Oct. 19th, 2023; published: Oct. 26th, 2023

Abstract

Based on the attractor theory in time-dependent spaces, we consider long-time behavior of solutions for the wave equation with nonlinear damping on the unbounded domain. We prove the asymptotic compactness of the process by using the contrative

文章引用: 王兴慧. 非线性阻尼波方程在$\mathbb{R}^3$上的时间依赖吸引子[J]. 应用数学进展, 2023, 12(10): 4456-4466.
DOI: 10.12677/aam.2023.1210437

functions and some detailed estimates, thus the existence of time-dependent attractors is proved.

Keywords

Time-Dependent Attractor, Nonlinear Damping, Contractive Functions

1. 引言

本文考虑如下带有非线性阻尼的波方程

$$\begin{cases} \varepsilon(t)u_{tt} + g(u_t) - \Delta u + \lambda u + f(u) = h(x),\ x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq \tau, \\ u(x,\tau) = u_0(x),\ u_t(x,\tau) = u_1(x),\ x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.1}$$

时间依赖全局吸引子的存在性, 其中$u(x,t)$是未知函数, $\lambda > 0,\ h(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3),\ \varepsilon = \varepsilon(t)$单调递减并满足

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0, \tag{1.2}$$

特别地, 存在$L > 0$使得

$$\sup_{t\in R}[|\varepsilon(t)| + \varepsilon'(t)] \leq L. \tag{1.3}$$

非线性阻尼$g \in C^1(\mathbb{R}),\ g(0) = 0, g$严格递增, 并满足

$$\liminf_{|s|\to+\infty} g'(s) > 0, \tag{1.4}$$

$$|g(s)| \leq C_0(1 + |s|^p),\ 1 \leq p < 5. \tag{1.5}$$

非线性项$f \in C^1(\mathbb{R}),\ f(0) = 0$并满足

$$|f'(s)| \leq C_1(1 + |s|^q),\ \forall s \in \mathbb{R},\ 0 \leq q \leq 2, \tag{1.6}$$

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{s} > -\lambda_1,\ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

其中λ_1是$A = -\Delta$的第一特征值, 且$0 < \lambda < \lambda_1, C_0, C_1$是正常数.

时间依赖全局吸引子是由$Plinio, Temam$等人 [1–4]提出的, 并且研究了振荡方程和波方程的时间依赖全局吸引子的存在性及渐近结构. 当时间依赖系数$\varepsilon(t)$是与时间t无关的正常数且阻尼项为线

性时, 方程(1.1) 解的长时间行为已有研究 [5–7]. 2016年, 孟凤娟等人 [7]研究了有界域上具有非线性阻尼波方程

$$\varepsilon(t)u_{tt}+g(u_t)-\Delta u+\varphi(u)=f(x).$$

的时间依赖全局吸引子的存在性. 2019 年, 刘亭亭等人 [8]考虑了$\mathbb{R}^3$上具有时间依赖衰退系数的板方程

$$u_{tt}+\alpha u_t-k(0)\Delta u-\int_0^\infty k'(s)\Delta u(t-s)ds+g(x,u)=f.$$

作者首先建立了验证过程渐近紧的压缩函数方法, 然后利用此方法证明了板方程解的渐近紧性, 并得到了$H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ 上时间依赖吸引子的存在性. 文 [9]研究了具有非线性阻尼和线性记忆的波动方程

$$\varepsilon(t)u_{tt}+a(x)g(u_t)-\Delta u-\int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds+f(u)=h(x)$$

解的长期行为. 文 [10]在$g(u_t)=\alpha u_t-\Delta u_t$时利用"尾部"估计方法获得了波方程

$$\varepsilon(t)u_{tt}-\Delta u_t+u_t-\Delta u+\lambda u+f(u)=h(x)$$

在$\mathbb{R}^n$ 上时间依赖吸引子的存在性.

基于以上研究现状, 本文在无界域 $\mathbb{R}^3$ 上考虑波动方程 (1.1) 的全局吸引子的存在性. 当 $\varepsilon(t)$ 依赖于时间 t 且在正无穷远处趋于 0 时, 由于系数参数与时间 t 有关, 问题变得更为复杂和有趣. 本文将经典理论中的压缩函数方法推广应用到这类方程, 并且应用一些估计技巧, 克服了无界域上 $Sobolev$ 嵌入非紧的困难, 进而得到了波方程 (1.1) 在全空间 $\mathbb{R}^3$ 上时间依赖全局吸引子的存在性.

2. 预备知识

不失一般性, 记$H=L^2(\mathbb{R}^3), V=H^1(\mathbb{R}^3)$, H的内积和范数分别记为$\langle\cdot,\cdot\rangle, ||\cdot||$. 对于$s\in\mathbb{R}^+$, 记$H^s=H^s(\mathbb{R}^3)=D(A^{\frac{s}{2}})$, 并赋予相应地内积和范数:

$$\langle w,v\rangle_s=\langle A^{\frac{s}{2}}w,\ A^{\frac{s}{2}}v\rangle, ||w||_s^2=\langle A^{\frac{s}{2}}w, A^{\frac{s}{2}}w\rangle.$$

对于$t\in\mathbb{R}$ 及 $0\le s\le 1$, 定义时间依赖空间$H_t^s=H^{s+1}\times H^s$, 相应范数为

$$||(u,u_t)||_{H_t}^2=||u||_{s+1}^2+||u||_s^2+\varepsilon(t)||u_t||_s^2.$$

当$s=0$时, 记$H_t=H^1\times H$, 相应范数为

$$||(u,u_t)||_{H_t}^2=||\nabla u||^2+||u||^2+\varepsilon(t)||u_t||^2.$$

与文 [5]一样, 对于非线性函数g, 由条件(1.5)可得

$$|g(s)|^{\frac{p+1}{p}}=|g(s)|^{\frac{1}{p}}+|g(s)|^p\le C_0^1(1+|S|)|g(s)|\le C_0^1+C_0^1 g(s)s, \tag{2.1}$$

进一步, 有

$$|g(s)|\le C+C(g(s)s)^{\frac{p}{p+1}}. \tag{2.2}$$

定义 1.1 [3,7,11] 设$\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$是一族赋范线性空间, 称双参数算子族$\{U(t,\tau): X_\tau \to X_t, t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$ 是一个过程, 如果它满足:

(i) $U(\tau,\tau) = Id$ 是 X_t 上的恒等映射, $\forall \tau \in \mathbb{R}$;

(ii) $U(t,s)U(s,\tau) = U(t.\tau)$, $\forall t \geq s \geq \tau$.

引理 1.2 [8] 设$F(u) = \int_0^u f(s)\mathrm{d}s$, 根据(1.7), 取$0 < \nu = min\{1,\lambda\}$, 存在$\varrho(\nu) > 0$, $c_i > 0(i = 1,2)$, 使得

$$2\langle F(u), 1\rangle \geq -\nu||\nabla u||^2 - c_1, \tag{2.3}$$

$$\langle f(u), u\rangle + \frac{\nu}{2}||\nabla u||^2 \geq \varrho(\nu)||u||^2 - c_2. \tag{2.4}$$

引理 1.3 [5,7] 若$g(\cdot)$满足条件(1.5), 则对于$\forall\delta > 0$存在正常数C_δ, 使得对所有的$u, v \in \mathbb{R}$, 有

$$||u - v||^2 \leq \delta + C_\delta(g(u) - g(v))(u - v).$$

定理 1.4 [11] 令X, Y为两个$Banach$空间, B为$X \times Y$的一个有界子集, $\{U(t)\}_{t\geq 0}$为$X \times Y$上的半群. 如果对于任意的$\varepsilon > 0$存在$T = T(B,\varepsilon)$和$\varphi_T^t \in C(B)$ 使得对任意的$x, y \in B$, 有

$$||U(t,T)x - U(t,T)y|| \leq \varepsilon + \varphi_T^t(x,y),$$

则$\{U(t)\}_{t\geq 0}$为$X \times Y-$压缩半群, 其中φ_t^t依赖于T, $C(B)$表示$B \times B$上所有压缩函数的集合.

定理 1.5 [11] 令X, Y为两个$Banach$空间, $\{U(t)\}_{t\geq 0}$为$X\times Y$上的连续半群. 那么$\{U(t)\}_{t\geq 0}$在$X \times Y$ 中有一个全局吸引子当且仅当下列条件成立:

(i)$\{U(t)\}_{t\geq 0}$在X上存在有界吸收集B_0;

(ii)$\{U(t)\}_{t\geq 0}$是B_0上的渐近压缩半群.

定理 1.6 [7,11] 若$U(\cdot,\cdot)$是一族Banach空间$\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$的一个过程, 则$U(\cdot,\cdot)$有一个时间依赖全局吸引子$U^* = \{A_t^*\}_{t\in\mathbb{R}} = \bigcap\limits_{s\leq t}\overline{\bigcup\limits_{\tau\leq s} U(t,\tau)B_\tau}$, 当且仅当

(i) $U(\cdot,\cdot)$有一个拉回吸收族$B = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$;

(ii) $U(\cdot,\cdot)$是拉回渐近紧的.

3. 时间依赖全局吸引子的存在性

引理 2.1 [4,11] 设(1.2) − (1.7)成立, 对任意初值$z_\tau = (u_0, u_1) \in H_\tau$, 在$H_t$中存在问题(1.1)的唯一解$z(t) = (u(t), u_t(t))$, 满足$u \in C([\tau,t], H^1), u_t \in C([\tau,t], L^2)$. 此外, 设$z_i(\tau) = \{u_0^i, u_1^i\} \in H_\tau(i = 1,2)$ 是满足$||z_i(\tau)||_{H_\tau} \leq R(i = 1,2)$ 的两个初值, 且$z_i(t)$ 是对应于初值$z_i(\tau)$的两个解, 则存在$C = C(R) \geq 0$, 使得

$$||z_1(t) - z_2(t)||_{H_t} \leq e^{c(t-\tau)}||z_1(t) - z_2(\tau)||_{H_\tau}, \ \forall\, t \geq \tau. \tag{3.1}$$

因此, 系统(1.1)生成一个强连续过程$U(t,\tau)$, 即$U(t,\tau): H_\tau \to H_t$, $U(t,\tau)z(\tau) = \{u(t), u_t(t)\}$.

引理 2.2 若(1.2)-(1.7)成立, 任意初值$z(\tau) \in B_\tau(R) \subset H_\tau$, 则存在$R_0 > 0$, 使得$B = \{B_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$

是过程$U(t,\tau)$ 的时间依赖吸收集.

证明 定义$E_0(t)=\frac{\varepsilon(t)}{2}||u_t||^2+\frac{1}{2}||\nabla u||^2+\frac{\lambda}{2}||u||^2+\langle F(u),1\rangle-\langle h,u\rangle$. 用$u_t$与(0.1)在$L^2(\mathbb{R}^3)$中作内积, 可得

$$\frac{d}{dt}E_0(t)+\int_{\mathbb{R}^3}g(u_t)u_tdx-\frac{\varepsilon'(t)}{2}||u_t||^2=0. \tag{3.2}$$

由$g(u_t)$和$\varepsilon(t)$的条件

$$\int_{\mathbb{R}^3}g(u_t)u_tdx-\frac{\varepsilon'(t)}{2}||u_t||^2>0.$$

给(3.2)在$[\tau,t]$上积分, 得

$$E_0(t)\le E_0(\tau),\ \forall\, t\ge\tau. \tag{3.3}$$

由(2.3)有,

$$\begin{aligned}E_0(t)&\ge\frac{\varepsilon(t)}{2}||u_t||^2+\frac{1-\nu}{2}||\nabla u||^2+\frac{\lambda}{4}(2-\frac{1}{\lambda})||u||^2-(c_1+\frac{4}{\lambda}||h||^2)\\&\ge-(c_1+\frac{4}{\lambda}||h||^2).\end{aligned} \tag{3.4}$$

因此, 由(3.2)和(3.4)可得,

$$\begin{aligned}&\int_\tau^t\int_{\mathbb{R}^3}g(u_t)u_tdxds-\frac{1}{2}\int_\tau^t\varepsilon'(t)||u_t(s)||^2ds\\\le\ &E_0(\tau)+(c_1+\frac{4}{\lambda}||h||^2).\end{aligned} \tag{3.5}$$

另一方面, 结合(2.2), (3.4)和Hölder不等式, 有

$$|\int_{\mathbb{R}^3}g(u_t)udx|\le C\int_{\mathbb{R}^3}|u|dx+\eta||u||^2+C_\eta||u||^{\frac{p-1}{p}}\int_{\mathbb{R}^3}g(u_t)u_tdx, \tag{3.6}$$

其中$\eta>0$足够小. 用$u_t+\delta u$与(1.1)在$L^2(\mathbb{R}^3)$中作内积, 可得

$$\frac{d}{dt}E_\delta(t)+I(t)=0, \tag{3.7}$$

其中$E_\delta(t)=E_0(t)+\delta\varepsilon(t)(u_t,u)$,

$$\begin{aligned}I(t)&=\frac{|\varepsilon'(t)|}{2}||u_t||^2-\delta\varepsilon(t)||u_t||^2+\delta||\nabla u||^2+\delta\lambda||u||^2+\delta\langle f(u),u\rangle\\&-\ \delta\langle h(x),u\rangle+\int_{\mathbb{R}^3}g(u_t)(u_t+\delta u)dx-\delta\varepsilon'(t)(u_t,u).\end{aligned}$$

根据(1.3), (3.4), $H\ddot{o}lder$不等式和$Young$不等式, 取δ足够小, 可得

$$\begin{aligned}E_\delta(t)&\ge\frac{\varepsilon(t)}{2}||u_t||^2+\frac{(1-\nu)}{2}||\nabla u||^2+\frac{\lambda}{4}||u||^2-(c_1+\frac{4}{\lambda}||h||^2)\\&-\ (\frac{1}{4}\varepsilon(t)||u_t||^2+\delta^2L||u||^2)\\&\ge\frac{\delta}{8}(\varepsilon(t)||u_t||^2+||\nabla u||^2+||u||^2)-(c_1+\frac{4}{\lambda}||h||^2).\end{aligned} \tag{3.8}$$

根据(1.4)和(1.5), 存在$\delta>0$和$C_\delta>0$使得

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(u_t)u_t dx \geq 2\delta||u_t||^2 - C_\delta.$$

此外,

$$-\delta\varepsilon'(t)(u_t,u) \geq -\frac{1}{4}|\varepsilon'(t)|||u_t||^2 - \delta^2 L||u||^2.$$

因此, 结合(2.4), (3.6), 取足够小的η和δ, 有

$$\begin{aligned}
I(t) &\geq (\frac{|\varepsilon'(t)|}{2} - \delta\varepsilon(t))||u_t||^2 + \delta||\nabla u||^2 + \delta\lambda||u||^2 - \frac{\delta\nu}{2}||\nabla u||^2 \\
&- \delta\varrho(\nu)||u||^2 - c_2\delta - \delta(\frac{\lambda}{2}||u||^2 + \frac{1}{2\lambda}||h||^2) + 2\delta||u_t||^2 - C_\delta \\
&- \delta[C\int_{\mathbb{R}^3}|u|dx + \eta||u||^2 + C_\eta||u||^{\frac{p-1}{p}}\int_{\mathbb{R}^3} g(u_t)u_t dx] - [\frac{1}{4}|\varepsilon'(t)|||u_t||^2 + \delta^2 L||u||^2] \\
&\geq \frac{\delta}{4}(\varepsilon(t)||u_t||^2 + ||\nabla u||^2 + ||u||^2) - c_2\delta - C_\delta E_0(\tau)\int_{\mathbb{R}^3} g(u_t)u_t dx - C_\delta(1+||h||^2) \\
&- C^2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

对(3.7)在$[\tau,t]$上积分有

$$E_\delta(t) = E_\delta(\tau) - \int_\tau^t I(s)ds.$$

由(3.5), (3.8)和(3.9)可得

$$\frac{\delta}{8}(\varepsilon(t)||u_t||^2 + ||\nabla u||^2 + ||u||^2) - M_2 \leq -\int_\tau^t [\frac{\delta}{4}(\varepsilon(t)||u_t||^2 + ||\nabla u||^2 + ||u||^2) - M_1]ds, \tag{3.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
M_1 &= c_2\delta + C_\delta(1+||h||^2) + C_2, \\
M_2 &= (c_1 + \frac{4}{\lambda}||h||^2) + C_\delta E_0(\tau)(E_0(\tau) + c_1 + \frac{4}{\lambda}||h||^2) + CE_0(\tau).
\end{aligned}$$

因此, 对任意的$R_0=\frac{4M_1}{\delta}$, 存在$t_0\geq\tau$使得

$$\varepsilon(t_0)||u_t(t_0)||^2 + ||\nabla u(t_0)||^2 + ||u(t_0)||^2 \leq R_0.$$

集合$B_\tau=\{(u_0,u_1)\in H_\tau : ||u_0||^2+||\nabla u_0||^2+\varepsilon(\tau)||u_1||^2\leq R_0\}$. 因此$B_\tau$ 是一个有界的时间依赖吸收集. 定义$B_t=\bigcup\limits_{t\geq\tau} U(t,\tau)B_\tau$, 则$B_t$是过程$\{U(t,\tau)\}$ 的有界吸收集.

下面证明过程的渐近紧性, 为此, 设$(u_i(t),u_{i_t}(t))$是问题(1.1)对应的解, 初值$(u_0^i(\tau),v_0^i(\tau))\in\{B_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$. 为了简便, 与文 [7]一样, 引入符号

$$g_i(t)=g(u_{i_t}(t)),\ f_i(t)=f(u_i(t)),\ i=1,2,\ w=u_1(t)-u_2(t).$$

那么$w(t)$满足

$$\begin{cases} \varepsilon(t)w_{tt}+(g_1(t)-g_2(t))-\Delta w+\lambda w+f_1(t)-f_2(t)=0,\ t\geq T,\\ w(x,T)=u_0^1(T)-u_0^2(T),\ w_t(x,T)=v_0^1(T)-v_0^2(T). \end{cases} \tag{3.11}$$

定义$E_w(t)=\frac{1}{2}\varepsilon(t)||w_t||^2+\frac{1}{2}||\nabla w||^2+\frac{1}{2}\lambda||w||^2$, 用(3.11)与$w_t$在$L^2(\mathbb{R}^3)$中作内积, 有

$$\frac{d}{dt}E_w(t)-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)||w_t||^2+((g_1(t)-g_2(t)),w_t)+(f_1-f_2,w_t)=0, \tag{3.12}$$

将(3.12)在$[s,t]$上积分可得

$$\begin{aligned} &E_w(t)-E_w(s)-\frac{\varepsilon'(t)}{2}\int_s^t||w_t(\xi)||^2d\xi\\ &+\int_s^t((g_1(\xi)-g_2(\xi)),w_t(\xi))d\xi+\int_s^t(f_1-f_2,w_t(\xi))d\xi=0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

由于$\varepsilon'(t)<0$, 则由(3.13)可知

$$\int_s^t((g_1(\xi)-g_2(\xi)),w_t(\xi))d\xi\leq E_w(s)-\int_s^t(f_1-f_2,w_t(\xi))d\xi.$$

由(1.3)和引理1.3可知, 对任意的$\delta>0$存在$C_\delta>0$使得

$$\varepsilon(\xi)|w_t|^2\leq L|w_t|^2\leq\delta L+LC_\delta(g_1(\xi)-g_2(\xi),w_t(\xi)),$$

则

$$\int_T^t\varepsilon(\xi)||w_t||^2d\xi\leq\delta L(t-T)+C_\delta LE_w(T)-C_\delta L\int_T^t(f_1-f_2,w_t(\xi))d\xi, \tag{3.14}$$

给(3.11)乘w, 并在$\mathbb{R}^3\times[T,t]$上积分, 可得

$$\begin{aligned} &\int_T^t||\nabla w(s)||^2ds+\varepsilon(t)\langle w_t(t),w(t)\rangle\\ =\ &\varepsilon(T)\langle w_t(T),w(T)\rangle+\int_T^t\varepsilon'(s)\langle w_t(s),w(s)\rangle ds+\int_T^t\varepsilon(s)||w_t(s)||^2ds\\ -\ &\int_T^t\langle g_1-g_2,w(s)\rangle ds-\lambda\int_T^t||w(s)||^2ds-\int_T^t\langle f_1-f_2,w(s)\rangle ds, \end{aligned} \tag{3.15}$$

将(3.14)与(3.15)结合可得

$$\begin{aligned} &2\int_T^tE_w(s)ds\leq2\delta L(t-T)+2C_\delta LE_w(t)-2C_\delta L\int_T^t\langle f_1-f_2,w_t\rangle ds\\ -\ &\varepsilon(t)\langle w_t(t),w(t)\rangle+\varepsilon(T)\langle w_t(T),w(T)+\int_T^t\varepsilon'(\xi)\langle w_t(\xi),w(\xi)\rangle d\xi\rangle\\ -\ &\int_T^t\langle g_1-g_2,w(\xi)\rangle d\xi-\int_T^t\langle f_1-f_2,w(\xi)\rangle d\xi. \end{aligned} \tag{3.16}$$

另一方面, 将(3.13)在$[T,t]$上积分, 有

$$
\begin{aligned}
&(t-T)E_w(t)+\int_T^t\int_s^t\langle g_1(\xi)-g_2(\xi),w_t(\xi)\rangle d\xi ds-\frac{1}{2}\int_T^t\int_s^t\varepsilon'(\xi)||w_t||^2d\xi ds\\
=\ &-\int_T^t\int_s^t\langle f_1(\xi)-f_2(\xi),w_t(\xi)\rangle d\xi ds+\int_T^t E_w(s)ds. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

因为$\int_{\mathbb{R}^3}(g_1(\xi)-g_2(\xi))w_t(\xi)dx-\frac{1}{2}\varepsilon'(\xi)||w_t||^2>0$, 结合(3.16) 和(3.17) 可得

$$
\begin{aligned}
(t-T)E_w(t)\ \le\ &\delta L(t-T)+C_\delta LE_w(t)-C_\delta L\int_T^t\langle f_1-f_2,w_t\rangle ds-\frac{1}{2}\varepsilon(t)\langle w_t(t),w(t)\rangle\\
+\ &\frac{1}{2}\varepsilon(T)\langle w_t(T),w(T)\rangle+\frac{1}{2}\int_T^t\varepsilon'(s)\langle w_t(s),w(s)\rangle ds-\frac{1}{2}\int_T^t\langle g_1-g_2,w(s)\rangle ds\\
-\ &\frac{1}{2}\int_T^t\langle f_1(s)-f_2(s),w(s)\rangle ds-\int_T^t\int_s^t\langle f_1(\xi)-f_2(\xi),w_t(\xi)\rangle d\xi ds. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

接下来, 我们处理$\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}(g_1(\xi)-g_2(\xi))wdxd\xi$. 给(1.1)乘$u_{i_t}$并在$\mathbb{R}^3$上积分, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varepsilon(t)||u_{i_t}||^2+||\nabla u_i||^2+\lambda||u_i||^2)-\frac{\varepsilon'(t)}{2}||u_{i_t}||^2+\langle g(u_{i_t}),u_{i_t}\rangle\\
&+\langle f(u_i),u_{i_t}\rangle=\langle h,u_{i_t}\rangle,
\end{aligned}
$$

结合(3.2)-(3.4)以及时间依赖吸收集的存在性, 我们有

$$
\int_T^t\langle g(u_{i_t}),u_{i_t}\rangle ds\le E_0(T)-E_0(t)\le C_T,
$$

这里C_T依赖于T, 则由(2.2)和Hölder不等式有

$$
\begin{aligned}
&|\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}g(u_{i_t})w(x,s)dxds|\\
\le\ &[\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}(C_0'+C_0'g(u_{i_t})u_{i_t})dxds]^{\frac{p}{p+1}}(\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}|w(x,s)|^{p+1}dxds)^{\frac{1}{p+1}}\\
\le\ &[C_1'(t-T)+C_1'\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}g(u_{i_t})u_{i_t}dxds]^{\frac{p}{p+1}}(\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}|w(x,s)|^{p+1}dxds)^{\frac{1}{p+1}}\\
\le\ &[C_1'(t-T)^{\frac{p}{p+1}}+(C_1'C_T)^{\frac{p}{p+1}}](\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}|w(x,s)|^{p+1}dxds)^{\frac{1}{p+1}}. \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

现将(3.19)代入(3.18)中, 得

$$
\begin{aligned}
(t-T)E_w(t)\ \le\ &\delta L(t-T)+C_\delta LE_w(t)-C_\delta L\int_T^t\langle f_1-f_2,w_t\rangle ds-\frac{1}{2}\varepsilon(t)\langle w_t(t),w(t)\\
+\ &\varepsilon(T)\langle w_t(T),w(T)\rangle+\frac{1}{2}\int_T^t|w_t||w|ds-\frac{1}{2}\int_T^t\langle f_1(s)-f_2(s),w(s)\rangle ds\\
-\ &\int_T^t\int_s^t\langle f_1(\xi)-f_2(\xi),w_t(\xi)\rangle d\xi ds+A(\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}|w(x,s)|^{p+1}dxds)^{\frac{p}{p+1}},
\end{aligned}
$$

其中$A=\frac{C_1'(t-T)^{\frac{p}{p+1}}+(C_1'C_T)^{\frac{p}{p+1}}}{2}$.

令

$$\begin{aligned}
&\varphi_T^t((u_0^1(T),v_0^1(T)),(u_0^2(T),v_0^2(T)))\\
=\ &-\frac{C_\delta L}{t-T}\int_T^t\langle f_1-f_2,w_t\rangle ds-\frac{1}{2(t-T)}\varepsilon(t)\langle w_t(t),w(t)\rangle\\
+\ &\frac{L}{2(t-T)}\int_T^t|w_t||w|ds-\frac{1}{2(t-T)}\int_T^t\langle f_1(s)-f_2(s),w(s)\rangle ds\\
-\ &\frac{1}{t-T}\int_T^t\int_s^t\langle f_1(\xi)-f_2(\xi),w_t(\xi)\rangle d\xi ds\\
+\ &\frac{A}{t-T}(\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}|w(x,s)|^{p+1}dxds)^{\frac{p}{p+1}},
\end{aligned}\tag{3.20}$$

$$C_M=\delta L(t-T)+C_\delta LE_w(t)+\varepsilon(T)\langle w_t(T),w(T)\rangle,\tag{3.21}$$

则可推得

$$E_w(t)\le\frac{C_M}{t-T}+\varphi_T^t((u_0^1(T),v_0^1(T)),(u_0^2(T),v_0^2(T))).\tag{3.22}$$

定理 2.3 若条件(1.2)-(1.7)成立, 对任意固定的$t\in\mathbb{R}$, 有界序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X_{\tau_n}$以及对任意的$\{\tau_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}^{-t}$ ($\tau_n\to-\infty$, 当 $n\to\infty$), 序列$\{U(t,\tau_n)x_n\}_{n=1}^\infty$ 有一个收敛序列.

证明 对任意的$\varepsilon>0$, 固定的t, 令$T<t$且$t-T$足够大, 使得

$$\frac{C_M}{t-T}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此由定理1.5, 我们只需要证明对每个固定的T有$\varphi_T^t\in C(B_t)$. 设(u_n,u_{n_t})是问题(1.1)对应的解, 初值$(u_0^n,v_0^n)\in B_T$. 由(3.3)可知$||u||^2+||\nabla u||^2+\varepsilon(t)||u_t||^2$是有界且依赖$T$的, 因此$||u_n||^2$是有界的. 此外, 由(1.2), (1.3), 对固定的T, $\xi\in[T,t]$, $\varepsilon(\xi)$是有界的, 故$||u_{n_t}||^2$是有界的. 令$\Omega_k=\{x\in\mathbb{R}^3:\ |x|<k\}$, 根据$Alaoglu$定理, 不失一般性, 我们假设

(i) $u_n\overset{*}{\rightharpoonup}u$在$L^\infty(T,t;H_0^1(\Omega_k))$中;

(ii) $u_{n_t}\overset{*}{\rightharpoonup}u_t$在$L^2(T,t;H_0^1(\Omega_k))$中;

(iii) $u_n\to u$在$L^2(T,t;L^2(\Omega_k))$中;

(iv) $u_n(T)\to u(T),\ u_n(t)\to u(t)$在$L^2$中.

下面估计(3.20)的每一项. 首先, 由引理2.2, (i), (ii) 和(iv)可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}(f(u_n)-f(u_m))(u_n(s)-u_m(s))dxds=0,\tag{3.23}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon(t)(u_{n_t}(t)-u_{m_t}(t))(u_n(t)-u_m(t))dx=0,\tag{3.24}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}L(u_{n_t}-u_{m_t})(u_n-u_m)dxds, \tag{3.25}$$

与文 [7]中定理5.4的证明类似, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}(f(u_n)-f(u_m))(u_{n_t}(s)-u_{m_t}(s))dxds=0. \tag{3.26}$$

对每个固定的t, $|\int_s^t\int_{\mathbb{R}^3}(u_{n_t}(\xi)-u_{m_t}(\xi))(\varphi(u_n(\xi))-\varphi(u_m(\xi)))dxd\xi|$ 是有界的, 则由Lebesgue控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_s^t\int_{\mathbb{R}^3}(u_{n_t}(\xi)-u_{m_t}(\xi))(\varphi(u_n(\xi))-\varphi(u_m(\xi)))dxd\xi ds\\
=&\int_T^t(\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_s^t\int_{\mathbb{R}^3}(u_{n_t}(\xi)-u_{m_t}(\xi))(\varphi(u_n(\xi))-\varphi(u_m(\xi)))dxd\xi)ds\\
=&\ 0.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

最后, 由(iii)可知

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{A}{t-T}(\int_T^t\int_{\mathbb{R}^3}|w(x,s)|^{p+1}dxds)^{\frac{p}{p+1}}=0. \tag{3.28}$$

因此, 根据(3.23) − (3.28), 得到φ_T^t是压缩函数, 从而φ_T^t是渐近压缩函数, 从(3.22)可知过程是渐近压缩的, 证明完成.

定理 2.4 假设(1.2)-(1.7)成立, 由问题(1.1)产生的过程$U(t,\tau):H_\tau\to H_t$ 有一个不变的时间依赖全局吸引子$U=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

证明 由引理2.2, 定理2.3, 定理1.4可知, 问题(1.1)存在唯一的时间依赖全局吸引子$U=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 此外, 由于引理2.1中过程的强连续性, 我们可得U是不变的.

4. 结论

本文基于时间依赖全局吸引子理论, 研究了在无界域 $\mathbb{R}^3$ 上带有非线性阻尼 $g(u_t)$ 的波方程(1.1) 解的长时间行为. 利用压缩函数的方法和一些估计技巧证明了过程的渐近紧性, 克服了无界域上*Sobolev* 嵌入非紧的困难, 进而得到了系统(1.1)时间依赖吸引子的存在性. 在后续的研究中, 还可以考虑此问题在无界域 $\mathbb{R}^n$ 上的长时间行为以及吸引子的正则性等问题.

基金项目

国家自然科学基金 (11961059)。

参考文献

[1] Plinio, D.F., Duane, G.S. and Temam, R. (2010) Time-Dependent Attractor for the Oscillon Equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **29**, 141-167.

https://doi.org/10.3934/dcds.2011.29.141

[2] Plinio, D.F., Duane, G.S. and Temam, R. (2013) The 3-Dimensional Oscillon Equation. *Bollettino dell Unione Matematica Italiana*, **5**, 19-53.

[3] Conti, M. and Pata, V. (2014) Asymptotic Structure of the Attractor for Processes on Time-Dependent Spaces. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **19**, 1-10. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.02.002

[4] Conti, M., Pata, V. and Temam, R. (2013) Attractors for Processes on Time-Dependent Spaces, Applications to Wave Equations. *Journal of Differential Equations*, **255**, 1254-1277. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.05.013

[5] Khanmamedov, A.K. (2006) Global Attractors for Wave Equations with Nonlinear Interior Damping and Critical Exponents. *Journal of Differential Equations*, **230**, 702-719. https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.06.001

[6] Sun, C.Y., Yang, L. and Duan, J.Q. (2011) Asymptotic Behavior for a Semilinear Second Order Evolution Equation. *Transactions of the American Mathematical Society*, **363**, 6085-6109. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2011-05373-0

[7] Meng, F.J., Yang, M.H. and Zhong, C.K. (2016) Attractors for Wave Equations with Nonlinear Damping on Time-Dependent Space. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, **25**, 205-225. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.205

[8] Pata, V. (2000) Attractors for a Damped Wave Equation on $\mathbb{R}^n$ with Linear Memory. *Mathematical Methods and Applied Science*, **23**, 633-653. https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(20000510)23:7⟨633::AID-MMA135⟩3.0.CO;2-C

[9] Ma, Q.Z., Wang, J. and Liu, T.T. (2019) Time-Dependent Attractor of Wave Equations with Nonlinear Damping and Linear Memory. *Open Mathematics*, **17**, 89-103. https://doi.org/10.1515/math-2019-0008

[10] 吴晓霞, 马巧珍. 带有强阻尼的波方程在$\mathbb{R}^n$上的时间依赖吸引子[J]. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(6): 22-29.

[11] Conti, M. and Pata, V. (2014) Asymptotic Structure of the Attractor for Processes on Time-Dependent Spaces. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **19**, 1-10. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.02.002