

对比研究KGD、PKN与改进的P3D模型

刘广涛

数学地质四川省重点实验室, 成都理工大学, 四川 成都

收稿日期: 2023年10月3日; 录用日期: 2023年10月27日; 发布日期: 2023年11月6日

摘要

本文的目的是表征一个裂缝在特定时间的生长到其最终形状。对设计早期水力裂缝的二维模型KGD和模型PKN进行了分析、比较, 并求解。并对P3D三维模型进行了修正, 给出了真实的三维结果。通过假设裂缝的椭圆生长而不是圆形生长, 产生了更真实的结果。特别要注意的是, 由于断裂而形成的椭圆轨迹的参数在任何时刻都是变化的, 这意味着在特定时间内的断裂轨迹, 也不能用一个简单的数学方程来描述。使用MATLAB进行编程得出KGD、PKN和改进的P3D模型, 并展示可视化后的结果。

关键词

PKN, KGD, 二维断裂模型, 改进的P3D断裂模型, 椭圆断裂

A Comparative Analysis of KGD, PKN, and a Modified P3D Model

Guangtao Liu

Geomathematics Key Laboratory of Sichuan Province, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Oct. 3rd, 2023; accepted: Oct. 27th, 2023; published: Nov. 6th, 2023

Abstract

The paper is aiming to represent the growth of a fracture to its final shape at a specific time. 2D models *i.e.* KGD and PKN which most of the early hydraulic fractures were designed by applying one of these models were analyzed, compared and their equations solved. Moreover a P3D model is modified to give true 3D results. By assuming elliptical growth of the fracture and not the circular growth, a more realistic results generated. It is prudent to notice that the elliptic behavior which the fracture growing is representing has changing parameters at any moment, means the growth of a fracture in a specific period of time even in its simplest form does not obey a simple mathematical equation. Programming using MATLAB to derive KGD, PKN and improved P3D mod-

els and display visualized results.

Keywords

PKN, KGD, 2-Dimensional Fracture Model, Improved P3D Fracture Model, Elliptic Fracture

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

水力压裂技术已被国内外证明是在开发非常规水库的一种实用和有效的技术。在水力压裂处理过程中，首先将加压压裂液泵入目标地层，导致岩石的拉伸失效。然后，将选定的支撑剂注入新生成的裂缝中，以便在随后的碳氢化合物生产过程中保持其开放[1] [2] [3]。因此，建立了一条在井筒与目标储层之间具有高渗透性的流体流动途径。一般来说，刺激过程伴随着低震级的微地震事件。然而，一旦受刺激井与已存在的断层之间存在直接水力连接，大地震可能会成核[4] [5] [6] [7]。在高频操作过程中，水力裂缝通常平行于 SH_{max} 的方向传播。压裂出的裂缝的几何形态是压裂井压后产量与经济评价的基础[8]，从上个世纪中叶，多种水力压裂模型设计在地质学领域相继被研究和发展[9] [10] [11]。

压裂过程的设计通常至少包括三个阶段：压裂几何形状预测、压裂清理预测和油井性能预测[12] [13] [14]。本研究部分涉及第一阶段和第二阶段。水力压裂的尺寸和传播特征是压裂作业设计中的重要信息。知道了储层岩石、压裂液以及原地应力的方向和大小特性，我们就可以在给定的抽油速度和时间对水力压裂的开口宽度、长度和高度进行准确预测[5] [15] [16]。

由于水力压裂的乎平面垂直于最小水平原位应力，所以断裂高度的增长受水平最小原位应力的垂直分布控制。当相邻应力区之间的应力对比比较大时，预计断裂高度的增长将被遏制。有两个基本的恒定高度模型：Khristinaovic-Geertsma-de Klerk 模型和 Perkins-Kem-Nordgren 模型[6] [17] [18]。大多数早期的水力压裂是通过应用这些模型中的一个来设计的。这两个模型的基本力学原理有很大不同。原则上，拟三维模型可以被视为 KGD 或 PKN 模型的延伸并包括断裂高度的增长。最简单的方法是通过满足局部静态平衡，从局部净流体压力、原位应力对比和岩石韧性中确定断裂高度。通常假设在裂缝的垂直截面上有一个恒定的流体压力，并且流体的流动是沿支付区的方向一维的[16] [19] [20]。假设裂缝内的一维流体流动在裂缝高度增长的计算中产生了一致。二维断裂模型在实际模拟中取得了相当大的成功。然而，它们的局限性迫使我们使用改进的模型。拟三维模型确实可以提供关于水力诱导断裂行为的有用信息，并在一定程度上解决二维模型的问题，尽管该模型已被证明是裂缝设计中具有价值的工具，但必须记住，在某些情况下，如具有复杂的原位应力分布的地层，由于模型的近似性质，拟三维断裂模型可能无法捕获所有重要特征[1] [9] [11] [21]。

2. 模型介绍

水力压裂是提高油井提高生产效率的常用方法之一。对于水力压裂操作的设计，已经开发了许多模型。KGD 和 PKN 是该领域最常用的模型。在这两种模型中，裂缝的特征即：裂缝长度(L)、裂缝宽度(w)和裂缝开口处的裂缝压力(p)都是基于封闭形式关系来确定的。由于 KGD 和 PKN 模型中做了简化假设，

在这些经典解析公式中忽略了一些地质力学和水力因子的影响。

2.1. KGD(2D)模型

该模型最适合于长度与高度之比比较接近或越小的裂缝。因此，高度近似于最终长度。该模型如图 1 有如下假设：裂缝高度恒定；裂缝在水平平面的平面应变条件下；断裂端点为尖状尖端；压裂液为牛顿流体；岩石遵循弹性力学理论；没有压裂液流失。

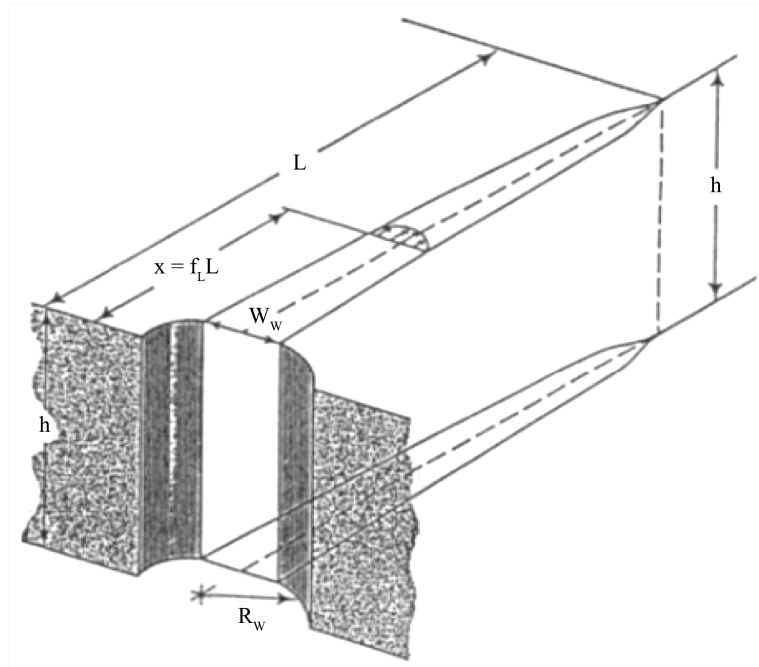


Figure 1. KGD constant height crack model

图 1. KGD 恒高裂缝模型

KGD 一般方程为：

$$W_0 = 1.727 \left[\frac{(1-g)Q^3 \mu}{G} \right]^{\frac{1}{6}} t^{\frac{1}{3}}$$

$$L = 0.593 \left[\frac{GQ^3}{(1-g)\mu} \right]^{\frac{1}{6}} t^{\frac{2}{3}} \quad \downarrow$$

$$P - \sigma_{\min} = 1.0651 \left[\frac{G^3 Q \mu}{(1-g)^3 L^2} \right]^{\frac{1}{4}}$$

其中， G 为剪切模量； g 为岩石泊松比； μ 为流体黏度； σ_{\min} 为原位应力； Q 为泵入排量； t 为施工时间； L 为缝长； W_0 为缝宽； P_w 为井底压力。

PKN(2D)模型

该模型通常被认为最适合于长度与高度之比比较大的裂缝。因此，高度 = 0.2*最终长度。该模型如图 2 有如下假设：裂缝在水平平面的平面应变条件下；垂直断裂截面为椭圆形；断裂韧性对断裂的几何形状没有影响；没有压裂液流失。

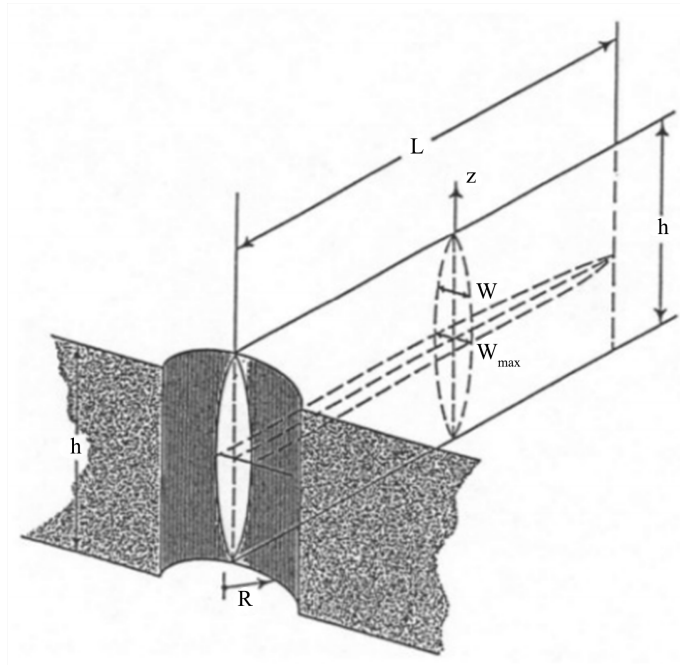


Figure 2. The PKN constant height crack model
图 2. PKN 恒高裂缝模型

PKN 一般方程为:

$$W_0 = 2.5 \left[\frac{(1-g)Q^2\mu}{Gh_f} \right]^{\frac{1}{5}} t^{\frac{1}{5}}$$

$$L = 0.68 \left[\frac{GQ^3}{(1-g)\mu g_f^4} \right]^{\frac{1}{5}} t^{\frac{4}{5}}$$

$$P = 2.5 \left[\frac{G^4 Q^2 \mu}{(1-g)^4 h_f^6} \right]^{\frac{1}{5}} t^{\frac{1}{5}}$$

2.2. 改进的 P3D 模型

拟三维模型如图 3 可以被视为 KGD 或 PKN 模型的延伸并包括断裂高度的增长。最简单的方法是通过满足局部静态平衡，从局部净流体压力、原位应力对比和岩石韧性中确定断裂高度。该模型假设：最小现场应力均匀垂直分布；裂缝呈椭圆形；没有压裂液流失。

P3D 改进后方程为:

$$R = 0.548 \left[\frac{GQ^3}{\mu} \right]^{(1/9)} t^{(1/9)}$$

$$W_o = 1.32 \left[\frac{8(1-\nu)Q^3 u}{G} \right]^{(1/6)} t^{(1/3)}$$

$$P_w = \sigma_{\min} - \frac{5}{4\pi} \frac{Gw_o}{R} \ln \left(\frac{r_w}{R} \right)$$

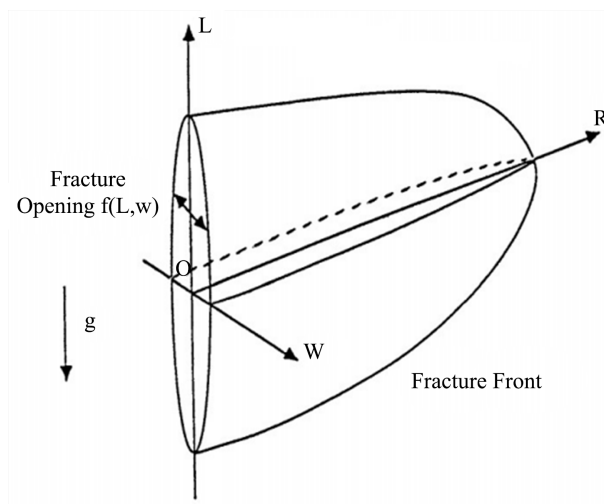


Figure 3. 3D model of P3D fracture prediction

图 3. P3D 裂缝预测的三维模型

3. 模型求解

上面给出了 3 种模型，利用 MATLAB 进行编程求解二维的 KGD 模型、PKN 模型和修改的拟三维模型。3 个模型的基本数据见表 1。

Table 1. Material parameters

表 1. 材料参数

材料参数	
剪切模 G/GPa	1.302
排水泊松比 \mathcal{G}	0.2
流体粘度 $\mu/(\text{mPa}\cdot\text{s})$	1
原位应力 $\sigma_{\text{min}}/\text{MPa}$	15.32
泵送速率 $Q/(\text{m}^3\cdot\text{min}^{-1})$	60
井口半径 r_w/m	0.1
施工时间(可自行定义) t/min	0.3

4. 结果分析

图 4 显示，裂缝长度随着增加的速率而增加，而裂缝开口宽度与 $t^{1/3}$ 成正比增加。在裂缝生长 18 秒后，最终 L/W 的比值为 300，表明端点有尖锐的弯曲，这也说明了这些模型中尖端几何形状对裂缝生长的低影响。在这里可以认为，由于尖端是裂缝的局部奇点，它对裂缝整体的几何形状的影响应该很小，他们的解很好给出裂缝开口宽度和整体裂缝长度的近似值。

注意到尖端的真实形状比在图 4 到图 8 中看到的更清晰。由于坐标的维数不同，它的真实形状被隐藏了，除了表示真实的比率外，并没有显示出满意的三维形状。可以使用代码控制比例，以获得裂缝的不同视图。图 4 所解释的内容在一定程度上也可以适用于图 5 和图 6。事实上，尽管 PKN 和 KGB 模型的基本机制存在显著差异，但在相似的假设下，它们产生了相似的结果，但它们在预测宽度上存在一定的差异。

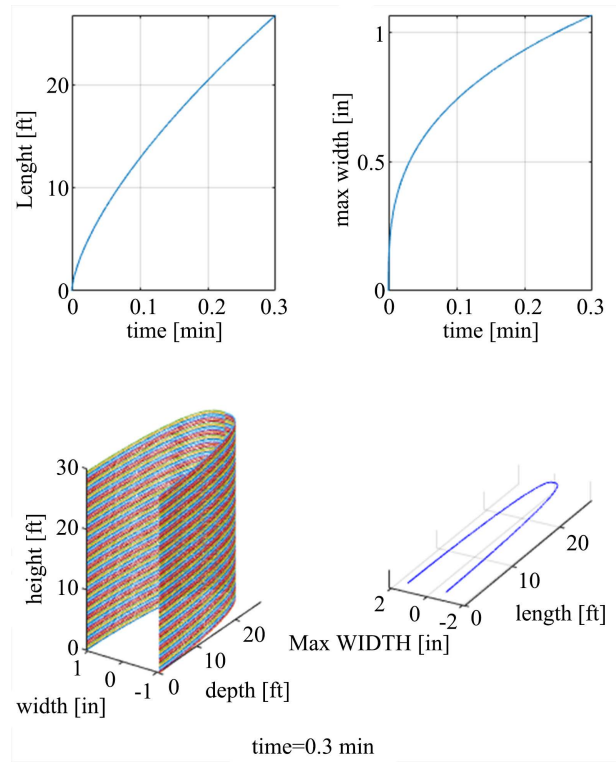


Figure 4. KGD model fracture final shape
图 4. KGD 模型裂缝最终形状

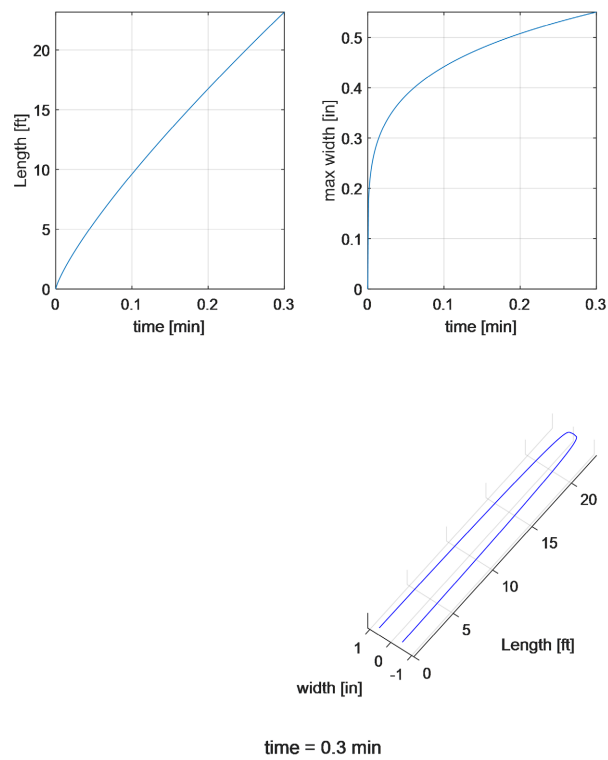


Figure 5. PKN model fracture final shape
图 5. PKN 模型裂缝最终形状

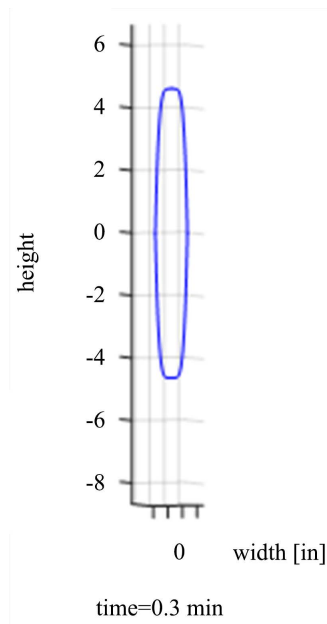


Figure 6. PKN model fracture final shape
图 6. PKN 模型裂缝最终形状

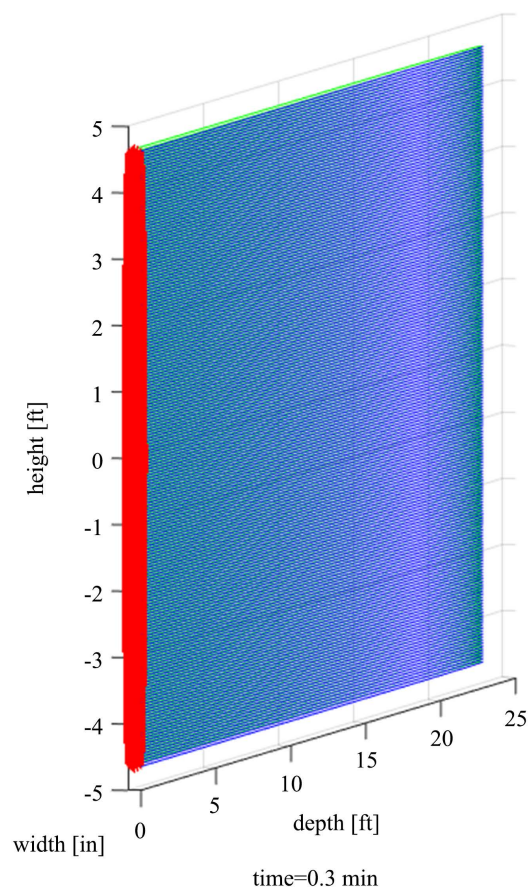


Figure 7. PKN model fracture final shape
图 7. PKN 模型裂缝最终形状

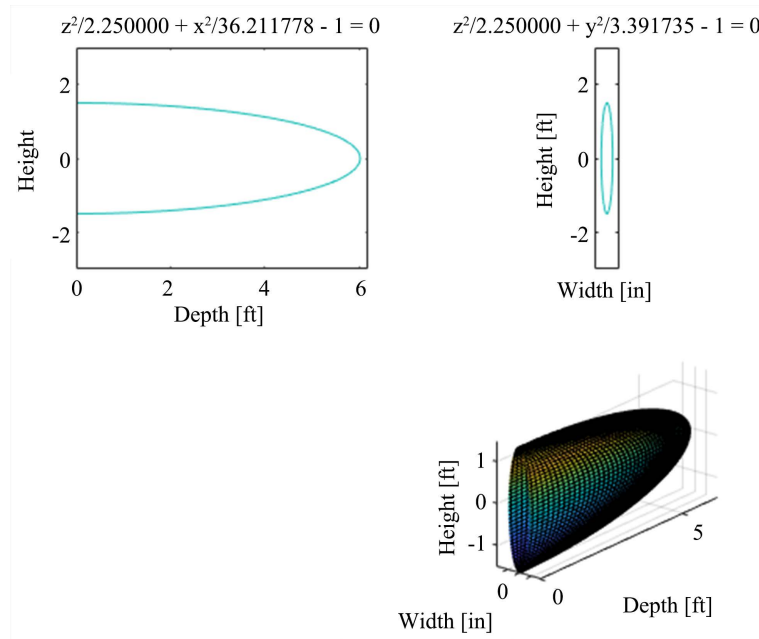


Figure 8. Final shape of the MP3D model crack
图 8. MP3D 模型裂缝最终形状

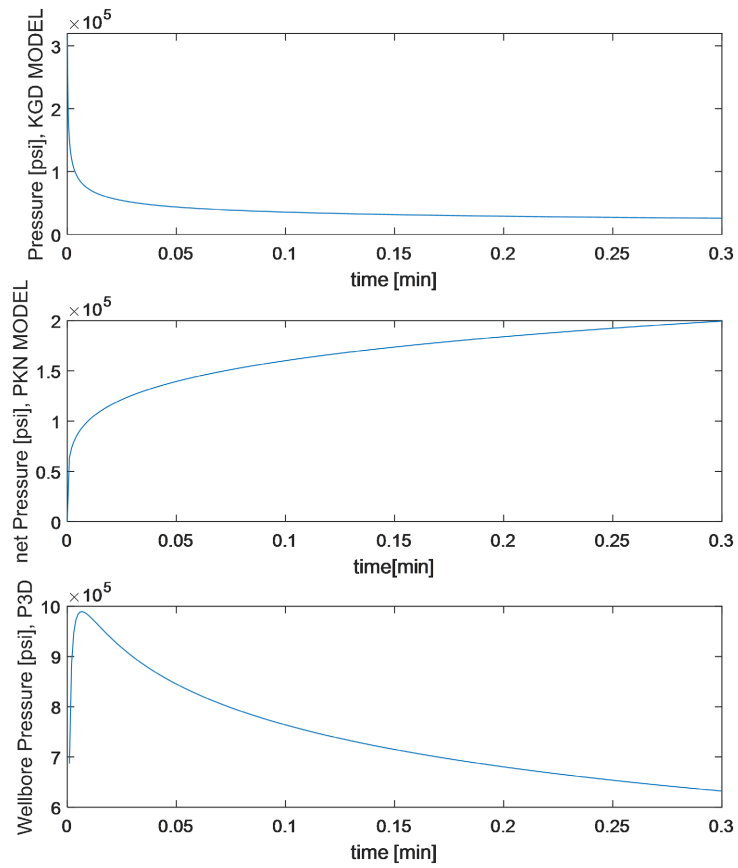


Figure 9. Pressure change and time curve predicted by the three models
图 9. 三种模型预测的压力变化与时间曲线

在最后的 3d 形状中还有另一个明显的不一致点。图 5 中的 yz 平面为矩形，表示三维曲面是 xy 平面向三维空间的延伸，而图 7 中的三维曲面在 xy 平面上为半抛物线，在 yz 平面上为半椭圆。垂直于 x 轴的横截面切割半椭圆曲面： $(L(\text{时间})、W(\text{时间})、H)$ 。值得注意的是，椭圆方程

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

具有常数变量 b (和 a , 如果高度不是恒定的), 意味着裂缝在特定时间内的增长, 即使最简单的形式下也不服从一个简单的数学方程。然而, 最终这个修正的拟三维模型预测了在特定时间内的一个完整的三维空间椭球体, 如图 8 所示。

图 8 比较了 P3D 模型在不同时刻的预测宽度和长度。可以看出, 最初裂缝的长度 - 时间平面形状接近圆, 但时间越久, 裂缝越深, 正在形成椭圆的形状。由于相关方程中 t 的权重, 这种“圆到椭圆的现象”在 yz 平面中并不太明显。也再次揭示了断裂区域周围的均匀应力。

值得注意的是, 在图 9 中与 KGD 模型相比, PKN 模型预测的井筒压力随着断裂长度的增加而增加。然而, KGD 预测的压力将接近于原位应力 σ_{\min} 。最初, 两个二维模型对压力的预测之间的差异是明显的, 但是随着时间的推移, 这个差异达到了一个恒定的最大值。

可以看出, 在 PKN 和 KGD 的简化解中, 有一些地质力学和水力学因素没有被考虑在内, 从而使这些封闭形式的解是近似的。

5. 总结展望

本论文提出了一种新的三维断裂模型(P3D), 它通过修正传统的二维模型(KGD 和 PKN), 实现了对裂缝生长过程的更准确模拟。这种修正的方法不仅考虑了裂缝的二维生长, 还充分考虑了裂缝在三维空间中的生长情况。具体来说, 该模型假设裂缝是以椭圆形形状生长的, 而非传统的圆形, 这一假设在已有的模型中并未被充分考虑。因此, 这种新的三维模型能够产生更真实的结果。此外, 值得注意的是, 这种修正的模型不仅仅是对原有的 KGD 和 PKN 模型进行简单的扩展, 而是在深入理解和考虑实际应用中的复杂情况后得出的。这使得新的模型具有更高的实用性和准确性。它不仅能够更好地预测裂缝的几何形状, 而且可以在实际操作中为水力压裂的设计和 optimization 提供有价值的参考。

对于未来的研究方向, 我们提出以下几点展望:

1) 针对地质条件的复杂性和不确定性, 需要进一步研究和发展更精细、更全面的模型。这包括考虑地层应力分布、岩石力学性质、以及流体流动等多种因素的影响。

2) 由于水力压裂通常涉及到大规模的工程操作, 因此需要考虑如何在大规模计算和 optimization 方面进行研究和改进, 以提高水力压裂的效率和效果。

3) 另外, 随着数值模拟技术的发展, 未来可以考虑将这种修正的模型与数值模拟技术结合, 以实现水力压裂过程的更精确、更直观的模拟和预测。通过以上研究和发展, 可以期待在未来的水力压裂设计和 optimization 中实现更高的效率和更好的效果。这对于提高非常规水库的开发效率和成功率具有重要的意义。

参考文献

- [1] Eaton, D.W. and Schultz, R. (2018) Increased Likelihood of Induced Seismicity in Highly Overpressured Shale Formations. *Geophysical Journal International*, **214**, 751-757. <https://doi.org/10.1093/gji/ggy167>
- [2] Schultz, R., Stern, V., Novakovic, M., Atkinson, G. and Gu, Y.J. (2015) Hydraulic Fracturing and the Crooked Lake Sequences: Insights Gleaned from Regional Seismic Networks. *Geophysical Research Letters*, **42**, 2750-2758. <https://doi.org/10.1002/2015GL063455>
- [3] Schultz, R., Wang, R.J., Gu, Y.J., Haug, K. and Atkinson, G. (2017) A Seismological Overview of the Induced Earth-

- quakes in the Duvernay Play Near Fox Creek, Alberta. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **122**, 492-505. <https://doi.org/10.1002/2016JB013570>
- [4] 惠钢, 陈胜男, 顾斐. 流体-地质力学耦合建模表征水力压裂诱发地震: 以加拿大 Fox Creek 地区为例[J]. 地球物理学报, 2021, 64(3): 864-875.
- [5] Hui, G., Chen, S.N., Chen, Z.X. and Gu, F. (2021) An Integrated Approach to Characterize Hydraulic Fracturing-Induced Seismicity in Shale Reservoirs. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **196**, Article ID: 107624. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2020.107624>
- [6] Settari, A. and Cleary, M.P. (1986) Development and Testing of a Pseudo-Three-Dimensional Model of Hydraulic Fracture Geometry. *SPE Production Engineering*, **1**, 449-466. <https://doi.org/10.2118/10505-PA>
- [7] Xu, J.X., Ding, Y.H., Yang, L.F., Liu, Z., Gao, R., Yang, H.X. and Wang, Z. (2019) Effect of Proppant Deformation and Embedment on Fracture Conductivity after Fracturing Fluid Loss. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, **71**, Article ID: 102986. <https://doi.org/10.1016/j.jngse.2019.102986>
- [8] 潘英. 矿山提升机械设计[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2001.
- [9] 王志甫. 矿山固定机械与运输设备[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2006.
- [10] 于励民, 仵自连. 矿山固定设备选型使用手册(下册) [M]. 北京: 煤炭工业出版社, 2007.
- [11] Zeng, Q.L., Liu, Z.L., Xu, D.D. and Zhuang, Z. (2014) Modeling Stationary and Moving Cracks in Shells by X-FEM with CB Shell Elements. *Science China Technological Sciences*, **57**, 1276-1284. <https://doi.org/10.1007/s11431-014-5589-y>
- [12] 景东阳, 李治平, 赵晓红, 等. 致密薄互层水力压裂裂缝垂面扩展施工因素数值模拟[J]. 科学技术与工程, 2023, 23(14): 5988-5994.
- [13] 李小波, 史英, 张修明, 等. 水力压裂裂缝模拟研究[J]. 西安石油大学学报(自然科学版), 2009, 24(3): 52-55.
- [14] 魏海峰. 非均质性页岩水力压裂裂缝扩展形态研究进展[J]. 油气地质与采收率, 2023, 30(4): 156-166.
- [15] Warpinski, N.R., Abou-Sayed, I.S., Moschovidis, Z. and Parker, C. (1993) Hydraulic Fracture Model Comparison Study: Complete Results. *Technical Report*.
- [16] Esfandiari, M. and Pak, A. (2023) XFEM Modeling of the Effect of in-Situ Stresses on Hydraulic Fracture Characteristics and Comparison with KGD and PKN Models. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, **13**, 185-201. <https://doi.org/10.1007/s13202-022-01545-7>
- [17] Haddad, M. and Eichhubl, P. (2020) Poroelastic Models for Fault Reactivation in Response to Concurrent Injection and Production in Stacked Reservoirs. *Geomechanics for Energy and the Environment*, **24**, Article ID: 100181. <https://doi.org/10.1016/j.gete.2020.100181>
- [18] Qu, Z.Q., Wang, J.W., Guo, T.K., Shen, L., Liao, H.L., Liu, X.Q., Fan, J.C. and Hao, T. (2021) Optimization on Fracturing Fluid Flowback Model after Hydraulic Fracturing in Oil Well. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **204**, Article ID: 108703. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.108703>
- [19] Gao, F.Q., Stead, D. and Kang, H.P. (2015) Numerical Simulation of Squeezing Failure in a Coal Mine Roadway Due to Mining-Induced Stresses. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, **48**, 1635-1645. <https://doi.org/10.1007/s00603-014-0653-2>
- [20] Guo, J.C., Luo, B., Lu, C., Lai, J. and Ren, J.C. (2017) Numerical Investigation of Hydraulic Fracture Propagation in a Layered Reservoir Using the Cohesive Zone Method. *Engineering Fracture Mechanics*, **186**, 195-207. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.10.013>
- [21] Bakhshi, E., Rasouli, V., Ghorbani, A., Marji, M.F., Damjanac, B. and Wan, X. (2019) Lattice Numerical Simulations of Lab-Scale Hydraulic Fracture and Natural Interface Interaction. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, **52**, 1315-1337. <https://doi.org/10.1007/s00603-018-1671-2>