

具有隐藏状态的随机营养物质 - 浮游植物模型的长期行为

杨 争, 黄燕慧, 陈琳芳, 许文清, 黄在堂*

南宁师范大学数学与统计学院, 广西 南宁

收稿日期: 2023年10月28日; 录用日期: 2023年11月23日; 发布日期: 2023年11月29日

摘 要

本文主要研究具有隐藏状态的营养物质 - 浮游植物模型的长期行为。首先, 构造适当的李雅普诺夫函数, 利用强马尔可夫性质, 证明具有隐藏状态的随机营养物质 - 浮游植物模型解的存在唯一性和费勒过程; 其次, 讨论由非线性滤波器的遍历性和李雅普诺夫函数构造的阈值 λ ; 最后, 再运用弱收敛性和强大数定律等相关知识, 证明了具有隐藏状态的随机营养物质 - 浮游植物模型解的灭绝性和持久性。

关键词

随机营养物质 - 浮游植物模型, 隐藏随机过程, 遍历性, 灭绝性, 持久性

Long-Term Behavior of a Random nutrient-Phytoplankton Model with Hidden State

Zheng Yang, Yanhui Huang, Linfang Chen, Wenqing Xu, Zaitang Huang*

School of Mathematics and Statistics, Nanning Normal University, Nanning Guangxi

Received: Oct. 28th, 2023; accepted: Nov. 23rd, 2023; published: Nov. 29th, 2023

Abstract

This article mainly studies the long-term behavior of a nutrient-floating plant model with a hidden state. Firstly, the properly constructed Lee Yapanov function, using strong Marcov's nature to prove that the existence of random nutrients with a hidden state-floating plant model solution is unique and Ferler's process; secondly, discuss the ergodicity of nonlinear filters and the threshold constructed by Lyapunov functions; finally, by applying relevant knowledge such as weak conver-

*通讯作者。

gence and strong laws of large numbers, the extinction and persistence of solutions for the stochastic nutrient phytoplankton model with hidden states were proved.

Keywords

Stochastic Nutrient-Phytoplankton Model, Hidden Stochastic Process, Ergodicity, Extinction, Persistence

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在生态系统中,浮游生物两者需要依靠营养物质维持生存并受其影响。营养物质作为生物生存的必要条件,但随着经济的发展,流入水中的营养物质对环境的危害较大,以及造成微藻生物柴油减少。中国作为海洋面积世界第三大以及拥有不少湖泊的国家,研究浮游生物是生态系统中重要的问题之一,对保护环境和人类的发展具有极大的价值作用。在这样的背景下,与此相关问题吸引了不少研究者,研究者开始考虑到浮游动植物在相互作用[1][2][3]的过程中,浮游植物自身也需要摄入营养物质。如 Ruan [4][5]在浮游生物相互作用模型中指出了营养物质对浮游生物种群增长的重要性。因此,为更好的了解浮游生物,合理解决有害的浮游生物,不少研究者对营养物质与浮游动植物相互作用模型进行研究。此模型系统可以由以下微分方程描述:

$$\begin{cases} dN(t) = \left[D(N^0 - N(t)) - \frac{\alpha_1 P(t)N(t)}{K_1 + N(t)} \right] dt, \\ dP(t) = \left[\frac{\alpha_2 P(t)N(t)}{K_1 + N(t)} - C(P(t))Z(t) - D_1 P(t) \right] dt, \\ dZ(t) = \left[\beta_1 C(P(t))Z(t) - D_2 P(t) \right] dt. \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$C(P(t)) = \frac{e_1 \sigma_1 P(t)}{1 + h e_1 \sigma_1 P(t)} \left(1 - \frac{e_1 \sigma_1 P(t)}{4G_1(1 + h e_1 \sigma_1 P(t))} \right).$$

系统(1)的初始条件为

$$N(0) > 0, P(0) > 0, Z(0) > 0.$$

其中 $N(t), P(t), Z(t)$ 分别表示 t 时刻营养物质的浓度、浮游植物种群的浓度、浮游动物种群的浓度。 N^0 表示营养物质的恒定输入量, D 表示营养物质的稀释率, α_1 表示浮游植物种群的养分稀释率, α_2 表示浮游植物种群生长的养分转化率, e_1 表示每单位浮游植物种类的相遇率, σ_1 表示浮游动物摄食所遇到的食物生物量的比例 ($0 < \sigma_1 \leq 1$)。 h 表示单位生物量的处理时间, 其中包含了消化道处理该物质所需的时间。

$1 - \frac{f(N)}{4G_1}$ 表示毒素决定的功能反应, 说明了毒素的负效应, 其中 $G_1 = \frac{M_1}{T_1}$, M_1 表示衡量单位时间内浮游动物能耐受最大毒素量的度量, T_1 表示当浮游动物耐受的毒素浓度降低(高毒性)或毒素浓度在浮游植物生

物量增加时, G_1 下降。 D_1 表示浮游植物种群的死亡率, D_2 表示浮游动物种群的死亡率, β_1 表示浮游动物的最大转化率, K_1 表示考虑相应霍林——II 型函数来描述以 K_1 为半饱和函数的放牧现象。因子 4 只是一个数, 它将 $C(P)$ 的峰值形式简化为 P 。

在上述式(1)中, 选择二维的营养物质 - 浮游植物模型进行研究。为了使该模型更为逼真, 必须考虑温度、气候、水资源等各种因素对模型的影响, 得到的随机营养物质 - 浮游植物模型如下:

$$\begin{cases} dN(t) = [DN^0 - DN(t) - P(t)y(N(t), P(t))]dt + \varrho_1 N(t)dB_1(t), \\ dP(t) = \left[-D_1 P(t) - \frac{e_1 \sigma_1 P(t)}{1 + h e_1 \sigma_1 P(t)} \left(1 - \frac{e_1 \sigma_1 P(t)}{4G_1(1 + h e_1 \sigma_1 P(t))} \right) (\gamma - P(t)) + P(t)y(N(t), P(t)) \right] dt \\ + \varrho_2 P(t)dB_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $B_1(t), B_2(t)$ 为独立的布朗运动和 $\varrho_1, \varrho_2 \neq 0$ 为噪声强度。假设 $P(t) + Z(t) = \gamma, \gamma$ 为正常数, 相比较与模型(1), 重新定义以上的系数:

$$\frac{\alpha_1 P(t)N(t)}{K_1 + N(t)} = \frac{\alpha_2 P(t)N(t)}{K_1 + N(t)} = P(t)y(N(t), P(t)).$$

在生态学中, 浮游植物依靠无机营养物质存活, 如氮、磷、碳水化合物等。但有些浮游植物依赖于隐藏状态的营养物质, 不能直接观察到, 因此, 在模型中加入隐藏状态的营养物质。为实现目标, 需对营养物质进行分类, 在分类设置中一类考虑的是未隐藏的营养物质, 即仍用 $P(t)y(N(t), P(t))$ 表示。另一类包含隐藏的营养物质, 即 $P(t)g(N(t), P(t))$ 。设 $\alpha(t)$ 为取值在 $\mathcal{M} = [0, 1]$ 中的马尔可夫过程。假设 $\alpha(t)$ 表示隐藏状态类中的营养物质在 $t \geq 0$ 时刻被转化的营养物质百分比, 并且只有 $\alpha(t)$ 在噪声损坏下的观测是可用的。因此, 让函数 y 和 g 依赖于 $\alpha(t)$, 利用式(2)的隐态动力学, 得出具有隐藏状态的随机营养物质 - 浮游植物模型:

$$\begin{cases} dN(t) = [DN^0 - DN(t) - P(t)y(\alpha(t), N(t), P(t)) - \alpha(t)P(t)g(\alpha(t), N(t), P(t))]dt + \varrho_1 N(t)dB_1(t), \\ dP(t) = \left[-D_1 P(t) - \frac{e_1 \sigma_1 P(t)}{1 + h e_1 \sigma_1 P(t)} \left(1 - \frac{e_1 \sigma_1 P(t)}{4G_1(1 + h e_1 \sigma_1 P(t))} \right) (\gamma - P(t)) + P(t)y(\alpha(t), N(t), P(t)) \right. \\ \left. + \alpha(t)P(t)g(\alpha(t), N(t), P(t)) \right] dt + \varrho_2 P(t)dB_2(t). \end{cases} \quad (3)$$

模型(3)加入了噪声项, 考虑了实际情况, 相比较于模型(1), 许多的研究者不考虑突发因素的干扰。由于营养物质的状态是隐藏的, 不能直接获得, 因此模型很难研究, 一些研究者会考虑加入隐马尔可夫过程, 对隐含状态提高准确的识别, 但还是比较困难的, 所以我们考虑运用非线性滤波技术[6] [7]获得具有隐藏状态的随机营养物质-浮游植物模型的长期行为。

2. 准备知识

在本文中, 将使用 $\mathbb{R}_+ := [0, \infty), \mathbb{R}_+^0 := [0, \infty), \mathbb{R}_+^2 := [0, \infty) \times [0, \infty)$, 以及 $\mathbb{R}_+^{2,0} := (0, \infty) \times (0, \infty)$ 。设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ 具有满足通常条件滤的完备概率空间, 并且 $B_1(t), B_2(t)$ 和 $W(t)$ 是相互独立的标准布朗运动。信号过程 $\alpha(t)$ 在 $[0, 1]$ 中取值, 其被假定是一个自适应的随机过程, 且与 $B_1(t), B_2(t)$ 和 $W(t)$ 相独立。 \mathcal{M} 表示在 $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ 上被赋予弱拓扑的概率测度空间, $C[0, 1]$ 表示在 $[0, 1]$ 上所有实值连续的函数空间。对任何函数 $l \in C[0, 1]$ 和 $\mu \in \mathcal{M}$, 设

$$\mu(l) := \int_0^1 l(x) \mu(dx).$$

考虑假设中的精确值 $\alpha(t)$ 不可用, 只有噪声观测可用。 $\alpha(t)$ 的观测过程 $r(t)$ 如下

$$dr(t) = \rho(\alpha(t))dt + dW(t), r(0) = 0, \tag{4}$$

其中 $\rho: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数。 设 $\mathcal{F}_t^r := \sigma\{r(s): 0 \leq s \leq t\} \vee \sigma(\alpha(0))$, 其中 \vee 表示由一些 σ -代数并集生成的最小 σ -代数。 设 $\pi \Pi(\cdot) \in \mathcal{M}$ 是在给定观测值 $r(t)$ 的条件下, $\alpha(t)$ 的条件分布和初始数据, 即

$$\Pi_t(A) = \mathbb{P}[\alpha(t) \in A | \mathcal{F}_t^r], A \in \mathcal{B}([0,1]).$$

则 $\Pi_t(\cdot)$ 称为非线性滤波器。

进一步, 介绍 Fujisaki-Kallianpuru-Kunita 的结果[6], 涉及到了非线性滤波器 $\Pi_t(\cdot)$ 的微分方程。 定义

$$\xi(t) = r(t) - \int_0^t \Pi_s(\rho) ds,$$

其中过程 $\xi(t)$ 是一维维纳过程。 此外, $\sigma\{\xi(t_2) - \xi(t_1): t_2 \geq t_1 \geq t\}$ 和 \mathcal{F}_t^r 对于所有 $t \geq 0$ 是独立的。 如果 $\alpha(t)$ 是具有无穷小生成元 A 的马尔可夫过程, $\Pi_t(\cdot)$ 为式(5)的解。

$$\Pi_t(l) := \Pi_0(l) + \int_0^t \Pi_s(A) ds + \int_0^t (\Pi_s(l\rho) - \Pi_s(l)\Pi_s(\rho)) d\xi(s), \forall l \in \mathcal{D}(A). \tag{5}$$

为了讨论下一节, 需要建立相关遍历性。 把 $\Pi_t(\cdot)$ 当作一个取值在 \mathcal{M} 上的随机过程, 利用 $\Pi_t(\cdot)$ 的连续可测的修正。

在只观察到 $\alpha(t)$ 的噪声项的前提下, 继续研究系统(3), 使用非线性滤波器 $\Pi_t(\cdot)$, $\Pi_t(\cdot)$ 具有给定观测过程 $r(t)$ 的信息。 考虑了系统(6)

$$\begin{cases} dN(t) = \left[DN^0 - DN(t) - \int_0^1 P(t) y(x, N(t), P(t)) \Pi_t(dx) - P(t) \int_0^1 xg(x, N(t), P(t)) \Pi_t(dx) \right] dt + \varrho_1 N(t) dB_1(t), \\ dP(t) = \left[-D_1 P(t) - \frac{e_1 \sigma_1 P(t)}{1 + h e_1 \sigma_1 P(t)} \left(1 - \frac{e_1 \sigma_1 P(t)}{4G_1(1 + h e_1 \sigma_1 P(t))} \right) (\gamma - P(t)) + \int_0^1 P(t) y(x, N(t), P(t)) \Pi_t(dx) \right. \\ \left. + P(t) \int_0^1 xg(x, N(t), P(t)) \Pi_t(dx) \right] dt + \varrho_2 P(t) dB_2(t), \end{cases} \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_t(A) &= \mathbb{P}[\alpha(t) \in A | \mathcal{F}_t^r], \forall A \in \mathcal{B}([0,1]), \\ dr(t) &= \rho(\alpha(t))dt + dW(t), \quad r(0) = 0. \end{aligned}$$

$\mathbb{P}_{u,v,\pi}$ 和 $\mathbb{E}_{u,v,\pi}$ 分别表示初始值为 $N(0) = u, P(0) = v, \Pi_0 = \pi$ 和 $\alpha(0)$ 的分布所对应的概率和期望。

假设 2.1 以下条件成立:

- 函数 $y: [0,1] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是非负的, $y(x, 0, p) = 0, \forall x \in [0,1], p \geq 0$ 。 此外, y 是利普希兹连续的, 即存在一个正常数 L_1 使得对所有的 $x_1, x_2 \in [0,1], n_1, n_2, p_1, p_2 \geq 0$,

$$|y(x_1, n_1, p_1) - y(x_2, n_2, p_2)| \leq L_1 (|x_1 - x_2| + |n_1 - n_2| + |p_1 - p_2|).$$

- 函数 $g: [0,1] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ 满足 $g(x, 0, p) = 0$, g 是利普希兹连续的, 具有利普希兹常数 L_2 , 即对所有的 $x_1, x_2 \in [0,1], n_1, n_2, p_1, p_2 \geq 0$,

$$|g(x_1, n_1, p_1) - g(x_2, n_2, p_2)| \leq L_2 (|x_1 - x_2| + |n_1 - n_2| + |p_1 - p_2|).$$

- 对每一个 $x \in [0,1]$, 函数 $g(x, \cdot, 0)$ 和 $y(x, \cdot, 0)$ 是非递减的。

假设 2.2 $\alpha(t)$ 是马尔可夫费勒过程, 有唯一不变测度 μ^* 和

$$\|P(t, x, \cdot) - \mu^*(\cdot)\|_{TV} = 0.$$

其中 $P(t, x, \cdot)$ 是转移概率和 $\|\cdot\|_{TV}$ 是总变异范数。

命题 2.1 [8] 假设在紧可分 Hausdorff 空间中赋值的 $\alpha(t)$ 是具有半群 $P(t)$ 的马尔可夫费勒过程, 该过程有唯一不变测度 μ^* 和

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int |P_t(x) - \mu^*(x)| \mu(dx) = 0, \forall t \in C([0,1]).$$

过程 $\Pi_t(\cdot)$ 是有唯一不变测度 Φ^* 的 \mathcal{M} 值马尔可夫费勒过程, μ^* 为 Φ^* 的重心, 即,

$$\mu^*(l) := \int_{\mathcal{M}} \nu(l) \Phi^*(d\nu), \forall l \in C[0,1].$$

在证明非线性滤波的不变测度的唯一性中, 需要恒等式(7)

$$\bigcap_{t \geq 0} \mathcal{F}_{[0,\infty)}^t \vee \varrho\{\alpha(s) : s \geq t\} = \mathcal{F}_{[0,\infty)}^t \vee \left(\bigcap_{t \geq 0} \varrho\{\alpha(s) : s \geq t\} \right). \tag{7}$$

其中 $\mathcal{F}_{[0,\infty)}^t := \vee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t^r$ 。

命题 2.2 在假设 2.2 下, 过程 $\Pi_t(\cdot)$ 是一个 \mathcal{M} 值马尔可夫费勒过程和有唯一不变测度 Φ^* , μ^* 是 Φ^* 的重心, 即

$$\mu^*(l) := \int_{\mathcal{M}} \nu(l) \Phi^*(d\nu), \forall l \in C[0,1].$$

接下来, 讨论灭绝性和持久性的阈值[9]。将使用以上讨论的非线性滤波器的遍历性, 并结合来自动力系统的李亚普诺夫指数[10]。引入一个阈值 λ , 表征系统(6)的长期行为。

考虑边界上的方程, 当浮游植物不存在时, 即

$$d\varphi(t) = (DN^0 - D\varphi(t))dt + \varrho_1\varphi(t)dB_1(t), \varphi(0) = u \geq 0. \tag{8}$$

通过求解 Fokker-Planck 方程, 方程(8)有唯一的平稳分布 $\hat{\mu}$, 其密度为

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)} r^{-(a+1)} e^{-\frac{b}{r}}, r > 0. \tag{9}$$

其中 $c_1 = D + \frac{\varrho_1^2}{2}, a = \frac{2c_1}{\varrho_1^2}, b = \frac{2DN^0}{\varrho_2^2}$ 和 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数。通过观察李亚普诺夫指数 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln P(t)}{t}$ 在 $P(t)$ 很小时, 来确定 $P(t)$ 是否收敛于 0。运用伊藤公式得出

$$\begin{aligned} \frac{\ln P(t)}{t} &= \frac{\ln \nu}{t} + \frac{\varrho_2 B_2(t)}{t} - c_2 - \frac{1}{t} \int_0^t \frac{e_1 \sigma_1}{1 + h e_1 \sigma_1 P(s)} \left(1 - \frac{e_1 \sigma_1 P(s)}{4G_1(1 + h e_1 \sigma_1 P(s))} \right) (\gamma - P(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^1 y(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) ds + \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^1 xg(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) ds, \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $c_2 = D_1 + \frac{\varrho_2^2}{2}$ 。 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln P(t)}{t} < 0$ 意味着 $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$ 。因此, 如果 $P(t)$ 很小, 那么提供 $N(0) = \varphi(0)$, $N(t)$ 就接近于 $\varphi(t)$, 同时有

$$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{e_1 \sigma_1}{1 + h e_1 \sigma_1 P(s)} \left(1 - \frac{e_1 \sigma_1 P(s)}{4G_1(1 + h e_1 \sigma_1 P(s))} \right) (\gamma - P(s)) \leq e_1 \sigma_1 \gamma.$$

当 t 足够大时, 有

$$\begin{aligned} & -e_1\sigma_1\gamma + \frac{1}{t}\int_0^t\int_0^1 y(x, N(s), P(s))\Pi_s(dx)ds + \frac{1}{t}\int_0^t\int_0^1 xg(x, N(s), P(s))\Pi_s(dx)ds \\ & \approx -e_1\sigma_1\gamma + \frac{1}{t}\int_0^t\int_0^1 y(x, \varphi(s), 0)\Pi_s(dx)ds + \frac{1}{t}\int_0^t\int_0^1 xg(x, \varphi(s), 0)\Pi_s(dx)ds. \end{aligned}$$

从式(10), 由 $\varphi(t)$ 和 $\Pi_t(\cdot)$ 的强大数定律, 得到 $P_{u,v}(t)$ 的李亚普诺夫指数可以近似为

$$-c_2 - e_1\sigma_1\gamma + \int_0^\infty \int_{\mathcal{M}} \left(\int_0^1 y(x, r, 0)\nu(dx) \right) \Phi^*(d\nu) \hat{\mu}(dr) + \int_0^\infty \int_{\mathcal{M}} \left(\int_0^1 xg(x, r, 0)\nu(dx) \right) \Phi^*(d\nu) \hat{\mu}(dr). \quad (11)$$

由于 μ^* 是 Φ^* 的重心, $P(t)$ 的李亚普诺夫指数近似为

$$-c_2 - e_1\sigma_1\gamma + \int_0^\infty \int_0^1 y(x, r, 0)\mu^*(dx) \hat{\mu}(dr) + \int_0^\infty \int_0^1 xg(x, r, 0)\mu^*(dx) \hat{\mu}(dr).$$

因此, 将阈值 λ 定义为

$$\lambda := -c_2 - e_1\sigma_1\gamma + \int_0^\infty \int_0^1 y(x, r, 0)\mu^*(dx) \hat{\mu}(dr) + \int_0^\infty \int_0^1 xg(x, r, 0)\mu^*(dx) \hat{\mu}(dr).$$

3. 解的存在唯一性和费勒过程

本小节, 主要讨论具有隐藏状态的随机营养物质 - 浮游植物模型(3)解的存在唯一性和费勒过程。

定理 3.1 对于任意 $(u, v, \pi) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{M}$, 则系统(6)存在唯一全局解, 其初始值为 (u, v, π) , 且随机过程 $\{(N(t), P(t), \Pi_t), t \geq 0\}$ 是马尔科夫过程。

证明: 首先证明系统(6)解的存在唯一性。假设 $y(n, p)$ 是利普希兹连续的, 但系统(6)中的系数 $py(n, p)$ 一般不是全局的利普希兹。因为系统(6)的系数是局部利普希兹连续的, 系统有唯一的解 $(N(t), P(t))$ 与初始值 $(u, v, \pi) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{M}$ [11], 需定义最大区间 $t \in [0, \tau_e)$, $\tau_e := \inf \{t \geq 0 : N(t) \vee P(t) = \infty\}$ 和约定 $\inf \emptyset = \infty$ 。设

$$\tau_k = \inf \{t \geq 0 : N(t) \vee P(t) > k\},$$

则 $\tau_e = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$ 。考虑 $V_1(n, p) = n + p$, 则从 $\mathcal{L}V_1$ 的定义有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_1(n, p, \pi) &= DN^0 - Dn - D_1p - \frac{e_1\sigma_1p}{1 + he_1\sigma_1p} \left(1 - \frac{e_1\sigma_1p}{4G_1(1 + he_1\sigma_1p)} \right) (\gamma - p) \\ &\leq DN^0 + \frac{e_1\sigma_1p}{1 + he_1\sigma_1p} \left(1 - \frac{e_1\sigma_1p}{4G_1(1 + he_1\sigma_1p)} \right) p \\ &\leq DN^0 + \frac{e_1\sigma_1p^2}{1 + he_1\sigma_1p}, \quad \forall (n, p, \pi) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{M}. \end{aligned}$$

运用伊藤公式并取期望, 则

$$\mathbb{E}_{u,v,\pi} V_1(N(\tau_k \wedge t), P(\tau_k \wedge t)) \leq V_1(u, v) + \left(DN^0 + \frac{e_1\sigma_1p^2}{1 + he_1\sigma_1p} \right) t.$$

由马尔可夫不等式, 得出

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\tau_k < t\} &\leq \mathbb{P}_{u,v,\pi} \{V_1(N(\tau_k \wedge t), P(\tau_k \wedge t), \alpha(\tau_k \wedge t)) \geq k\} \\ &\leq \frac{V_1(u, v) + \left(DN^0 + \frac{e_1\sigma_1p^2}{1 + he_1\sigma_1p} \right) t}{k} \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此, 对于所有 $t > 0$, 有 $\mathbb{P}_{u,v,\pi} \{ \tau_e \leq t \} = 0$ 或 $\mathbb{P}_{u,v,\pi} \{ \tau_e > t \} = 1$ 。因此, $\mathbb{P}_{u,v,\pi} \{ \tau_e = \infty \} = 1$, 系统(6)有唯一全局连续的解。

继续证明马尔科夫性质。由于 Π_t 是一个马尔可夫过程并且与 $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 相互独立, 对于过程 $(N(t), P(t), \Pi_t)$ 的马尔可夫性质遵循标准论证[11]。

接下来, 利用李亚普诺夫函数, 得出 $N(t)$ 和 $P(t)$ 的矩估计, 定义 $\varrho_*^2 := \max \{ \varrho_1^2, \varrho_2^2 \}$ 。

引理 3.1 以下结论成立:

(i) 对于任意的 $0 < \bar{q} < \frac{2k}{\varrho_*^2}$, 有常数 Q_1 使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{u,v,\pi} (N(t) + P(t))^{1+\bar{q}} \leq Q_1, \forall (u, v, \pi) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{M}.$$

(ii) 对于任意的 $\varepsilon > 0, H > 1, T > 0$, 有 $\bar{H} = \bar{H}(\varepsilon, H, T)$ 使得

$$\mathbb{P}_{u,v,\pi} \left\{ \frac{1}{\bar{H}} \leq N(t) \leq \bar{H}, \forall t \in [0, T] \right\} \geq 1 - \varepsilon \text{ if } (u, v, \pi) \in [H^{-1}, H] \times [0; H] \times \mathcal{M},$$

和

$$\mathbb{P}_{u,v,\pi} \{ 0 \leq N(t), P(t) \leq \bar{H}, \forall t \in [0, T] \} \geq 1 - \varepsilon \text{ if } (u, v, \pi) \in [0, H] \times [0; H] \times \mathcal{M}.$$

证明: 考虑李亚普诺夫函数 $V_3(n, p) = (n + p)^{1+\bar{q}}$ 。通过直接用微分算子 $\mathcal{L}V_3$ 计算和利用假设 2.1, 得出

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_3(n, p, \pi) &= (1 + \bar{q})(n + p)^{\bar{q}} \left[DN^0 - Dn - D_1p - \frac{e_1\sigma_1p}{1 + he_1\sigma_1p} \left(1 - \frac{e_1\sigma_1p}{4G_1(1 + he_1\sigma_1p)} \right) (\gamma - p) \right] \\ &\quad + \frac{\bar{q}(1 + \bar{q})}{2} (n + p)^{\bar{q}-1} (\varrho_1^2 n^2 + \varrho_2^2 p^2) \\ &\leq -(1 + \bar{q})(n + p)^{\bar{q}-1} \left[-\frac{\bar{q}}{2} \varrho_*^2 (n + p)^2 - \left(DN^0 + \frac{e_1\sigma_1p^2}{1 + he_1\sigma_1p} \right) (n + p) \right], \end{aligned}$$

其中 $\forall (n, p, \pi) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{M}$, 设 $0 < C_4 < \frac{\bar{q}(1 + \bar{q})}{2} \varrho_*^2$ 。通过计算, 得出

$$C_5 = \sup_{(n,p,\pi) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{M}} \{ \mathcal{L}V_3(n, p, \pi) + C_4 V_3(n, p) \} < \infty.$$

则

$$\mathcal{L}V_3 \leq C_5 - C_4 V_3, \tag{12}$$

运用系统(6)解的存在性[12], 证明引理的第(i)部分。第(ii)部分的证明源于第(i)部分和标准论证[12]。

定理 3.2 过程 $(N(t), P(t), \Pi_t)$ 是系统(6)的一个强马尔可夫和费勒过程。有 $\mathbb{P}_{u,v,\pi} \{ N(t) > 0, t > 0 \} = 1$ 和 $\mathbb{P}_{u,0,\pi} \{ P(t) = 0, t > 0 \} = 1, \mathbb{P}_{u,v,\pi} \{ P(t) > 0, t > 0 \} = 1, v > 0$ 。

证明: 如果系统(6)的系数是全局利普希兹, 则系统(6)的解是一个齐次强马尔可夫和费勒过程[12][13]。在 $[0, 1]$ 中, 弱拓扑的概率测度空间 \mathcal{M} 是由有界的利普希兹度量进行定义的, 如下

$$\| \pi_1 - \pi_2 \|_{BL} := \sup \left\{ |\pi_1(l) - \pi_2(l)| : \|l\| \leq 1, \sup_{x \neq r \in [0,1]} \frac{|l(x) - l(r)|}{|x - r|} \leq 1 \right\}.$$

因此, 通过引理 3.1 的结果, 系统(6)系数的局部利普希兹性质和截断论证 $(N(t), P(t), \Pi_t)$ 是齐次强马尔可夫和费勒过程[14]。

接下来, 建立解的正性。首先, 假设 $u, v > 0$ 。考虑李亚普诺夫函数 $V_2: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$V_2 = (n, p) = (n - 1 - \ln n) + (p - 1 - \ln p).$$

通过计算, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_2(n, p, \pi) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(DN^0 - Dn - py(x, n, p) - p \int_0^1 xg(x, n, p)\pi(dx) \right) + \frac{\varrho_1^2 n^2}{2n^2} \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[-D_1 p - \frac{e_1 \sigma_1 p}{1 + he_1 \sigma_1 p} \left(1 - \frac{e_1 \sigma_1 p}{4G_1(1 + he_1 \sigma_1 p)}\right) \right] (\gamma - p) \\ &\quad + py(x, n, p) + p \int_0^1 xg(x, n, p)\pi(dx) \left] + \frac{\varrho_2^2 p^2}{2p^2}. \end{aligned}$$

由假设 2.1 可知 $y(x, n, p) = |y(x, n, p) - y(x, 0, p)| \leq L_1 n$ 和 $g(x, n, p) = |g(x, n, p) - g(x, 0, p)| \leq L_2 n$ 。则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_2(n, p) &\leq C_1 + \frac{py(n, p)}{n} + \frac{p \int_0^1 g(x, n, p)\pi(dx)}{n} + \frac{e_1 \sigma_1 p^2}{1 + he_1 \sigma_1 p} \\ &\leq C_1 + (L_1 + L_2)(n + p) + \frac{e_1 \sigma_1 p^2}{1 + he_1 \sigma_1 p}, \end{aligned}$$

令 $\frac{e_1 \sigma_1 p^2}{1 + he_1 \sigma_1 p} = 0$, 假设 $C_2 = L_1 + L_2 + 1$ 和 $C_3 = C_1 + 2C_2 \ln C_2 + 2C_2$, 则

$C_1 = DN^0 + D + \frac{\varrho_1^2}{2} + D_1 + e_1 \sigma_1 \gamma + \frac{\varrho_2^2}{2}$ 。得出

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_2(n, p, \pi) - C_2 V_2(n, p) &\leq C_1 - n - p + C_2 (\ln n + \ln p) + 2C_2 \\ &\leq C_1 + 2C_2 \ln C_2 + 2C_2 = C_3. \end{aligned} \tag{13}$$

对 $k > 1$, 定义

$$\begin{aligned} \eta &= \inf \{t \geq 0: N(t) \wedge P(t) \leq 0\}, \\ \eta_k &= \inf \left\{t \geq 0: N(t) \wedge P(t) < \frac{1}{k}\right\}. \end{aligned}$$

得到 $\eta = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k$ 。另外, 通过使用与上面相同的论证, 从而由式(13), 得出

$$\mathbb{P}_{u, v, \pi} \{ \eta_k < t \} \leq \frac{V_2(u, v) + C_3(t)}{e^{-C_2 t} (\ln k - 1)} \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty.$$

因此, $\mathbb{P}_{u, v, \pi} \{ \eta_\infty = \infty \} = 1$, 得出

$$\mathbb{P}_{u, v, \pi} \{ N(t) > 0: t > 0 \} = \mathbb{P}_{u, v, \pi} \{ P(t) > 0: t > 0 \} = 1, \forall u, v > 0. \tag{14}$$

如果 $u > 0, v = 0$, 则 $\mathbb{P}_{u, v, \pi} \{ N(t) > 0: t > 0 \} = 1$ 可以类似地证明。此外, $\mathbb{P}_{u, 0, \pi} \{ P(t) = 0: t > 0 \} = 1$ 是明显的。

考虑 $u = 0$ 和 $v \geq 0$ 的情况, 证明 $N(t)$ 的正性。设 $\varepsilon > 0$ 足够小, 使得

$$DN^0 - D\tilde{u} - \tilde{v} \sup_{x \in [0, 1]} (y(x, \tilde{u}, \tilde{v}) + g(x, \tilde{u}, \tilde{v})) \geq \frac{DN^0}{2}, \sqrt{a^2 + b^2} \tag{15}$$

对于任何 $(\tilde{u}, \tilde{\nu}) \in \mathbb{R}^2$ 满足 $\tilde{u} + |\tilde{\nu} - \nu| < \varepsilon$ 。由假设 2.1, 存在一个 ε , 设

$$\tilde{\tau}_1 = \inf \{t > 0 : N(t) + |P(t) - \nu| \geq \varepsilon\}.$$

由 $(N(t), P(t))$ 的连续性, 可知 $\mathbb{P}_{0,\nu,\pi} \{\tilde{\tau}_1 > 0\} = 1$ 。由式(15)可知, 如果 $t \in (0, \tilde{\tau}_1]$, 有

$$DN^0 - DN(t) - P(t) \int_0^1 y(x, N(t), P(t)) \Pi_t(dx) - P(t) \int_0^1 xg(x, N(t), P(t)) \Pi_t(dx) > 0.$$

从常数变分公式[12]可知

$$\mathbb{P}_{0,\nu,\pi} \{N(t) > 0, t \in (0, \tilde{\tau}_1]\} = 1,$$

结合式(14)和 $(N(t), P(t), \Pi_t)$ 的强马尔可夫性质, 得出

$$\mathbb{P}_{0,\nu,\pi} \{N(t) > 0, t \in (0, \infty)\} = 1.$$

定理证明完毕。

4. 长期行为

本小节, 主要讨论具有隐藏状态的随机营养物质 - 浮游植物模型(3)解的持久性和灭绝性。

引理 4.1 对于任意 $T, H > 1, \varepsilon > 0, \theta > 0$, 有 $\delta = \delta(H, T, \varepsilon, \theta)$, 使得

$$\mathbb{P}_{u,\nu,\pi} \{\tau_\theta \geq T\} \geq 1 - \varepsilon, \forall (u, \nu, \pi) \in [0, H] \times (0, \delta] \times \mathcal{M},$$

其中 $\tau_\theta = \inf \{t \geq 0 : P_{u,\nu}(t) > \theta\}$ 。

证明: 通过指数鞅不等式[12], 有 $\mathbb{P}_{u,\nu,\pi}(\Omega_1) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, 其中

$$\Omega_1 = \left\{ \varrho_2 B_2(t) \leq \frac{\varrho_2^2 t}{2} + \ln \frac{2}{\varepsilon}, \forall t \geq 0 \right\}.$$

由引理 3.1 第(ii)部分, 存在一个 $\bar{H} = \bar{H}(T, H, \varepsilon)$, 使得 $\mathbb{P}_{u,\nu,\pi}(\Omega_2) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, 其中

$$\Omega_2 = \{0 \leq N(t), P(t) \leq \bar{H}, \forall t \in [0, T]\}.$$

将伊藤公式应用于系统(6)

$$\begin{aligned} \ln P(t) = & \ln \nu - c_2 t - \int_0^t \frac{e_1 \sigma_1}{1 + h e_1 \sigma_1 P(s)} \left(1 - \frac{e_1 \sigma_1 P(s)}{4 G_1 (1 + h e_1 \sigma_1 P(s))} \right) (\gamma - P(s)) ds \\ & + \int_0^t \int_0^1 y(x, N_{u,\nu}(s), P_{u,\nu}(s)) \Pi_s(dx) ds + \int_0^t \int_0^1 xg(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) ds + \varrho_2 B_2(t). \end{aligned} \tag{16}$$

因此, 对于任何 $(n, p, \pi) \in [0, H] \times (0, H] \times \mathcal{M}$ 和 $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, 由(16)和 y, g 的利普希兹连续性, 有

$$\ln P(t) < \ln \nu - D_1 T - e_1 \sigma_1 \gamma T + T(2L_1 \bar{H} + 2L_2 \bar{H}) + \ln \frac{2}{\varepsilon}, \forall t \in [0, T].$$

此时, 可以选择一个足够小的 $\delta = \delta(H, T, \varepsilon, \theta) < H$, 可以得出 $(n, p, \pi) \in [0, H] \times (0, \delta] \times \mathcal{M}$ 和 $0 \leq t \leq T, \ln P(t) < \ln \theta, \forall \omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ 。证明完毕。

命题 4.1 对任何 $0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{5}, -\frac{\lambda}{5} \right\}$ 和 $H > 1$, 存在 $\hat{\delta} = \hat{\delta}(\varepsilon, H) \in (0, H^{-1})$, 使得

$$\mathbb{P}_{u,v,\pi} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln P(t)}{t} = \lambda \right\} \geq 1 - 4\varepsilon, \forall (u, v, \pi) \in [H^{-1}; H] \times (0; \hat{\delta}] \times \mathcal{M}_{\Phi^*}.$$

证明：设 $\theta_0 = \theta_0(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{L_1 + L_2} \wedge \frac{D}{L_1 + L_2}$ 使得

$$\frac{DN^0 + \theta_0(L_1 + L_2 + L_1\theta_0 + L_2\theta_0)}{D - (L_1 + L_2)\theta_0} - \frac{DN^0}{D} < \frac{\varepsilon}{L_1 + L_2}. \tag{17}$$

考虑下面的随机微分方程(18)

$$d\bar{\varphi}(t) = (\bar{D}N^0 - \bar{D}\bar{\varphi}(t))dt + \varrho_1\bar{\varphi}(t)dB_1(t), \tag{18}$$

其中 $\bar{D}N^0 = DN^0 + L_1 + L_2 + L_1\theta_0 + L_2\theta_0, \bar{D} = D - (L_1 + L_2)\theta_0 > 0$ 。如果 $\varphi(0) = \bar{\varphi}(0)$ ，由比较原理，可知 $\varphi(t) \leq \bar{\varphi}(t), t \geq 0$ a.s. 再由强大数定律得出

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left| \int_0^t \int_0^1 y(x, \bar{\varphi}(s), 0) \Pi_s(dx) ds + \int_0^t \int_0^1 xg(x, \bar{\varphi}(s), 0) \Pi_s(dx) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t \int_0^1 y(x, \varphi(s), 0) \Pi_s(dx) ds - \int_0^t \int_0^1 xg(x, \varphi(s), 0) \Pi_s(dx) ds \right| \\ & \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (L_1 + L_2)(\bar{\varphi}(s) - \varphi(s)) ds \\ & = (L_1 + L_2) \left(\frac{\bar{D}N^0}{\bar{D}} - \frac{DN^0}{D} \right) a.s. \end{aligned} \tag{19}$$

结合式(17)和(19)，得出

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left| \int_0^t \int_0^1 y(x, \bar{\varphi}(s), 0) \Pi_s(dx) ds + \int_0^t \int_0^1 xg(x, \bar{\varphi}(s), 0) \Pi_s(dx) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t \int_0^1 y(x, \varphi(s), 0) \Pi_s(dx) ds - \int_0^t \int_0^1 xg(x, \varphi(s), 0) \Pi_s(dx) ds \right| < \varepsilon \text{ a.s.} \end{aligned} \tag{20}$$

因此，存在 $T_1^* = T_1^*(\varepsilon)$ ，使得 $\mathbb{P}(\Omega_3) > 1 - \varepsilon$ ，其中

$$\begin{aligned} \Omega_3 := & \left\{ \left| \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^1 y(x, \bar{\varphi}(s), 0) \Pi_s(dx) ds + \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^1 xg(x, \bar{\varphi}(s), 0) \Pi_s(dx) ds \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^1 y(x, \varphi(s), 0) \Pi_s(dx) ds - \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^1 xg(x, \varphi(s), 0) \Pi_s(dx) ds \right| < 2\varepsilon, \forall t \geq T_1^* \right\}. \end{aligned}$$

由 λ 的定义和 $\varphi(t), \Pi_t$ 的遍历性，得出

$$\mathbb{P}_{H,\pi} \left\{ -c_2 - e_1\sigma_1\gamma + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^1 y(x, \varphi(s), 0) \Pi_s(dx) ds + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^1 xg(x, \varphi(s), 0) \Pi_s(dx) ds = \lambda \right\} = 1,$$

其中 $\mathbb{P}_{H,\pi}$ 表示 $(\varphi(t), \Pi_t)$ 的初始值。因此，存在 $T_2^* = T_2^*(H, \varepsilon) > 1$ 使得 $\mathbb{P}_{H,\pi}(\Omega_4) \geq 1 - \varepsilon$ ，其中

$$\Omega_4 = \left\{ -c_2 - e_1\sigma_1\gamma + \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^1 y(x, \varphi(s), 0) \Pi_s(dx) ds + \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^1 xg(x, \varphi(s), 0) \Pi_s(dx) ds \leq \lambda + \varepsilon, \forall t \geq T_2^* \right\}.$$

鉴于解的唯一性，对所有 $u \in [0, H]$ ，有 $\varphi_u(s) \leq \varphi_H(s), s \geq 0$ a.s. 其中 $\varphi(s)$ 的下标表示初始值 $\varphi(0)$ 。则对所有 $(u, \pi) \in [0, H] \times \mathcal{M}_{\Phi^*}$ ，有 $\mathbb{P}_{u,\pi}(\Omega_4) \geq 1 - \varepsilon$ 。

由 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_2(t)}{t} = 0$ a.s. 有 $T_3^* = T_3^*(\varepsilon) > 1$ 使得 $\mathbb{P}(\Omega_5) \geq 1 - \varepsilon$, 其中

$$\Omega_5 = \left\{ \sigma_2 \frac{B_2(t)}{t} < \varepsilon, \forall t \geq T_3^* \right\}.$$

令 $T = \max\{T_1^*, T_2^*, T_3^*\}$. 由引理 4.1, 有 $\hat{\delta} = \hat{\delta}(\varepsilon, H) < \theta_0$, 使得 $(u, \nu, \pi) \in [0, H] \times (0, \hat{\delta}] \times \mathcal{M}$, $\mathbb{P}_{u, \nu, \pi}(\Omega_6) \geq 1 - \varepsilon$, 其中

$$\Omega_6 = \{\tau_{\theta_0} \geq T\}.$$

现在, 由式(20)得出 $\forall (u, \nu, \pi) \in [0, H] \times (0, \delta] \times \mathcal{M}_{\Phi^*}$. 在 $\bigcap_{j=3}^6 \Omega_j$ 中, 对于所有的 $t \in [T, \tau_{\theta_0}]$, 有

$$\begin{aligned} \ln P(t) &= \ln \nu - c_2 t - e_1 \sigma_1 \gamma t + \varrho_2 B_2(t) + \int_0^t \left(\int_0^1 y(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) + \int_0^1 xg(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) \right) ds \\ &= \ln \nu - c_2 t - e_1 \sigma_1 \gamma t + \varrho_2 B_2(t) + \int_0^t \left(\int_0^1 y(x, N(s), 0) \Pi_s(dx) + \int_0^1 xg(x, N(s), 0) \Pi_s(dx) \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\int_0^1 y(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) + \int_0^1 xg(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 y(x, N(s), 0) \Pi_s(dx) - \int_0^1 xg(x, N(s), 0) \Pi_s(dx) \right) ds \\ &\leq \ln \nu - c_2 t - e_1 \sigma_1 \gamma t + \int_0^t \left(\int_0^1 y(x, \bar{\varphi}(s), 0) \Pi_s(dx) + \int_0^1 xg(x, \bar{\varphi}(s), 0) \Pi_s(dx) \right) ds \\ &\quad + \varepsilon t + (L_1 + L_2) \int_0^t P(s) ds \\ &\leq \ln \nu - c_2 t - e_1 \sigma_1 \gamma t + 3\varepsilon t + \int_0^t \left(\int_0^1 y(x, \varphi(s), 0) \Pi_s(dx) + \int_0^1 xg(x, \varphi(s), 0) \Pi_s(dx) \right) ds \\ &\leq \ln \nu + (\lambda + 4\varepsilon)t < \ln \hat{\delta} < \ln \theta_0. \end{aligned} \tag{21}$$

如上所述, 当 $P(t) \leq \theta_0$, 有

$$\begin{aligned} P(s) \int_0^1 xg(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) &\leq \theta_0 (g(0, 0, 0) + L_2 + L_2 N(s) + L_2 P(s)) \\ &\leq \theta_0 (L_2 + L_2 \theta_0) + L_2 \theta_0 N(s), \end{aligned}$$

因此, 对所有 $t \in [0, \tau_{\theta_0}]$, 有 $N(s) \leq \bar{\varphi}(s)$.

由式(21)的结论, 对于 $\omega \in \bigcap_{j=3}^6 \Omega_j$, 得出 $\tau_{\theta_0} = \infty$. 根据式(11), 由 $\bar{D}_1 > 0$, 式(18)的解有唯一不变测度, 记为 $\bar{\mu}$. 从 $\bar{\varphi}(t)$ 的遍历性得到, 对于一些小 $\hat{q} > 0$, 则

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N^{(1+\hat{q})}(u) du \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \bar{\varphi}^{(1+\hat{q})}(u) du = \int x^{(1+\hat{q})} \bar{\mu}(dx) < \infty. \tag{22}$$

式(22)包含在 $\bigcap_{j=3}^6 \Omega_j$ 中. 利用式(22)和 $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$, 以及 \mathcal{M} 的紧密性, 随机占有测度

$$\tilde{U}_{u, \nu, \pi}^t(\cdot) := \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{(N(s), P(s), \Pi_s) \in \cdot\}} ds,$$

几乎对所有的 $\omega \in \bigcap_{j=3}^6 \Omega_j$ 都是紧密的. 在概率为 1 的情况下, $\tilde{U}_{u, \nu, \pi}^t(\cdot)$ 的任何弱极限在 $t \rightarrow \infty$ 时是不变的概率测度, 其在 $[0, \infty) \times \{0\} \times \mathcal{M}$ 上是成立的. 因为 $\hat{\mu} \times \delta \times \Phi^*$ 是 $[0, \infty) \times \{0\} \times \mathcal{M}$ 的不变概率测试, 其

中 $\bar{\varphi}$ 是集中在 0 的狄拉克测度, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 在 $\omega \in \bigcap_{j=3}^6 \Omega_j$ 中, 几乎可以肯定 $\tilde{U}_{u,v,\pi}^t(\cdot)$ 族弱收敛于 $\mu_0 \times \delta$ 。从(22)中的弱收敛和一致可积性得出

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln P(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[-D_1 t - \frac{\rho_2^2 t}{2} - \int_0^t \frac{e_1 \sigma_1}{1 + h e_1 \sigma_1 P(s)} \left(1 - \frac{e_1 \sigma_1 P(s)}{4 G_1 (1 + h e_1 \sigma_1 P(s))} \right) (\gamma - P(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^1 y(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) ds + \int_0^t \int_0^1 x g(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) ds \right] + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho_2 B_2 t}{t} \\ &\leq -c_2 - e_1 \sigma_1 \gamma + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{M}} \left[\int_0^1 y(x, r, p) \nu(dx) + \int_0^1 x g(x, r, p) \nu(dx) \right] \tilde{U}_{u,v,\pi}^t(dr, dp, d\nu) \\ &= -c_2 - e_1 \sigma_1 \gamma + \int_0^\infty \int_{\mathcal{M}} \left[\int_0^1 y(x, r, 0) \nu(dx) \right] \Phi^*(d\nu) \hat{\mu}(dr) + \int_0^\infty \int_{\mathcal{M}} \left[\int_0^1 x g(x, r, 0) \nu(dx) \right] \Phi^*(d\nu) \hat{\mu}(dr) \\ &= \lambda < 0. \end{aligned}$$

几乎对于每一个 $\omega \in \bigcap_{j=3}^6 \Omega_j$, 有 $(u, v, \pi) \in [0, H] \times (0, \hat{\delta}] \times \mathcal{M}_{\Phi^*}$ 。由 $\mathbb{P}(\bigcap_{j=3}^6 \Omega_j) > 1 - 4\varepsilon$, 证明完毕。

定理 4.1 假设 $\lambda < 0$ 。那么对于任意初始点 $(u, v, \pi) \in \mathbb{R}_+^{2,0} \times \mathcal{M}$, 则吸收养分的浮游植物浓度 $P(t)$ 以指数的速度趋近于零, 即,

$$\mathbb{P}_{u,v,\pi} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln P(t)}{t} = \lambda \right\} = 1,$$

和营养物浓度 $N(t)$ 弱收敛于边界上的解 $\varphi(t)$ 。

证明: 设任意的 $\varepsilon > 0$ 。由命题 4.1, 过程 $(N(t), P(t))$ 在 $\mathbb{R}_+^{2,0}$ 中是瞬态的[14]。因此, 过程 $(N(t), P(t))$ 在 $\mathbb{R}_+^{2,0}$ 中没有不变概率测度。因此, 在 $\mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{M}_{\Phi^*}$ 上, $\hat{\mu} \times \delta \times \Phi^*$ 是 $(N(t), P(t), \Pi_t)$ 的唯一不变概率测度。

设 H 足够大, 使 $\hat{\mu}((0, H)) > 1 - \varepsilon$ 。由于引理 3.1 第(i)部分和 \mathcal{M} 的紧密性, 过程 $(N(t), P(t), \Pi_t)$ 是紧密的。因此, 占有测度

$$U_{u,v,\pi}^t(\cdot) := \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}_{u,v,\pi} \{ (N(s), P(s), \Pi_s) \in \cdot \} ds,$$

在 $\mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{M}$ 上是紧密的。当 $t \rightarrow \infty$ 时, $U_{u,v,\pi}^t$ 的任何弱收敛一定是过程 $(N(s), P(s), \Pi_s)$ 的不变概率测度[15], 有 $U_{u,v,\pi}^t$ 弱收敛于 $\hat{\mu} \times \delta \times \Phi^*$ 。因此, 对任何 $\delta > 0$, 存在 $\hat{T} > 0$ 使得

$$U_{u,v,\pi}^{\hat{T}}(\cdot) \left((0, H) \times (0, \delta) \times \mathcal{M}_{\Phi^*} \right) > 1 - \varepsilon,$$

或

$$\frac{1}{\hat{T}} \int_0^{\hat{T}} \mathbb{P}_{u,v,\pi} \{ (N(t), P(t), \Pi_t) \in (0, H) \times (0, \delta) \times \mathcal{M}_{\Phi^*} \} dt > 1 - \varepsilon.$$

则有

$$\mathbb{P}_{u,v,\pi} \{ \hat{t} \leq \hat{T} \} > 1 - \varepsilon,$$

其中 $\hat{t} = \inf \{ t \geq 0 : (N(t), P(t), \Pi_t) \in (0, H) \times (0, \delta) \times \mathcal{M}_{\Phi^*} \}$ 。通过利用强马尔可夫性质和命题 4.1, 有

$$\mathbb{P}_{u,v,\pi} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln P(t)}{t} \leq \lambda + 4\varepsilon \right\} \geq 1 - \varepsilon$$

对任何 $(u, v, \pi) \in \mathbb{R}_+^{2,*} \times \mathcal{M}$, 任意的 $\varepsilon > 0$, $P(t)$ 收敛成立。由于 $P(t)$ 指数快速收敛到 0, 则 $N(t)$ 收

敛到 $\varphi(t)$ 。

定义 4.1 对于任何初始值 $(u, \nu, \pi) \in \mathbb{R}_+^{2,0} \times \mathcal{M}$ ，系统(6)是持久性的。

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_{u, \nu, \pi} N(s) ds > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_{u, \nu, \pi} P(s) ds > 0.$$

定理 4.2 假设 $\lambda > 0$ 。则对于任意初始值 $(u, \nu, \pi) \in \mathbb{R}_+^{2,0} \times \mathcal{M}$ ，系统(6)是持久的。

证明：首先证明 $(N(t), P(t), \Pi_t)$ 的所有不变测度集中在 $\mathbb{R}_+^{2,0} \times \mathcal{M}$ 上，利用反证法，假设 $(N(t), P(t))$ 在 $\mathbb{R}_+^{2,0}$ 上没有不变测度。因此，在 $\mathbb{R}_+^{2,*}$ 上没有不变测度，因为根据定理 3.1 可知，从 $\mathbb{R}_+^{2,*}$ 开始的解将进入并停在 $\mathbb{R}_+^{2,0}$ 中。因此，在 $\mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{M}$ 上的边界 $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathcal{M}$ 上的唯一不变测度 $\hat{\mu} \times \delta \times \Phi^*$ 是过程 $(N(t), P(t), \Pi(t))$ 的唯一不变测度，则有

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}_{u, \nu, \pi} \int_0^t \int_0^1 y(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{M}} \int_0^1 y(x, r, i) \hat{\mu}(dr) \delta(di) \Phi^*(d\nu) \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 y(x, r, 0) \mu^*(dx) \hat{\mu}(dr). \end{aligned} \tag{23}$$

和

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}_{u, \nu, \pi} \int_0^t \int_0^1 xg(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{M}} \int_0^1 xg(x, r, i) \nu(dx) \hat{\mu}(dr) \delta(di) \Phi^*(d\nu) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathcal{M}} \int_0^1 xg(x, r, 0) \nu(dx) \hat{\mu}(dr) \Phi^*(d\nu) \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 xg(x, r, 0) \mu^*(dx) \hat{\mu}(dr). \end{aligned} \tag{24}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{u, \nu, \pi} \frac{\ln P(t)}{t} &= \mathbb{E}_{x, r} \frac{\ln \nu}{t} - c_2 - e_1 \sigma_1 \gamma + \frac{1}{t} \mathbb{E}_{x, r} \left(\int_0^t \int_0^1 y(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) ds \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t \int_0^1 xg(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) ds \right) + \mathbb{E}_{x, r} \frac{\varrho_2 W_2(t)}{t}. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{u, \nu, \pi} \frac{\ln P(t)}{t} \\ &= -c_2 - e_1 \sigma_1 \gamma + \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{x, r} \frac{1}{t} \left(\int_0^t \int_0^1 y(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) ds + \int_0^t \int_0^1 xg(x, N(s), P(s)) \Pi_s(dx) ds \right) \\ &= -c_2 - e_1 \sigma_1 \gamma + \int_0^\infty \int_0^1 y(x, r, 0) \mu^*(dx) \hat{\mu}(dr) + \int_0^\infty \int_0^1 xg(x, r, 0) \mu^*(dx) \hat{\mu}(dr) \\ &= \lambda > 0. \end{aligned}$$

得出

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{u, \nu, \pi} \frac{\ln P(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{u, \nu, \pi} \frac{P(t)}{t} = 0.$$

又因为 $\ln P \leq P$ ，且引理 3.1 表明了 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{u, \nu, \pi} \frac{P(t)}{t} = 0$ ，有矛盾。因此， $(N(t), P(t), \Pi(t))$ 的所有

不变测度集中在 $\mathbb{R}_+^{2,0} \times \mathcal{M}_\Phi^*$ 。

运用引理 3.1 中的矩有界性, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 得到一个序列 $T_k \rightarrow \infty$ 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_{u,v,\pi} N(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} \mathbb{E}_{u,v,\pi} N(s) ds,$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_{u,v,\pi} P(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} \mathbb{E}_{u,v,\pi} P(s) ds.$$

定理证明完毕。

参考文献

- [1] Bairagi, N., Pal, S., Chatterjee, S., *et al.* (2008) Nutrient, Non-toxic Phytoplankton, Toxic Phytoplankton and Zooplankton Interaction in an Open Marine System. In: Hosking, R.J., Venturino, E., Eds., *Aspects of Mathematical Modelling. Mathematics and Biosciences in Interaction*. Birkhäuser, Basel, 41-63. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-7643-8591-0_3
- [2] Chakraborty, S., Bhattacharya, S., Feudel, U., *et al.* (2012) The Role of Avoidance by Zooplankton for Survival and Dominance of Toxic Phytoplankton. *Ecological Complexity*, **11**, 144-153. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2012.05.006>
- [3] Banerjee, M. and Venturino, E. (2011) A Phytoplankton-Toxic Phytoplankton-Zooplankton Model. *Ecological Complexity*, **8**, 239-248. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2011.04.001>
- [4] Ruan, S. (1993) Persistence and Coexistence in Zooplankton-Phytoplankton-Nutrient Models with Instantaneous Nutrient Recycling. *Journal of Mathematical Biology*, **31**, 633-654. <https://doi.org/10.1007/BF00161202>
- [5] Ruan, S. (2001) Oscillations in Plankton Models with Nutrient Recycling. *Journal of Theoretical Biology*, **208**, 15-26. <https://doi.org/10.1006/jtbi.2000.2196>
- [6] Fujisaki, M., Kallianpur, G. and Kunita, H. (1972) Stochastic Differential Equations for the Nonlinear Filtering Problem. *Lithuanian Mathematical Journal*, **12**, 19-40. <https://doi.org/10.15388/LMJ.1972.21151>
- [7] 许跃千. 基于非线性滤波的水下目标跟踪技术研究[D]: [硕士学位论文]. 黑龙江: 哈尔滨工程大学自动化系, 2019.
- [8] Kunita, H. (1971) Asymptotic Behavior of the Nonlinear Filtering Errors of Markov Processes. *Journal of Multivariate Analysis*, **1**, 365-393. [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(71\)90015-7](https://doi.org/10.1016/0047-259X(71)90015-7)
- [9] Nguyen, D., Nguyen, N. and Yin, G. (2020) General Nonlinear Stochastic Systems Motivated by Chemist at Models: Complete Characterization of Long-Time Behavior, Optimal Controls, and Applications to Wastewater Treatment. *Stochastic Processes and Their Application*, **130**, 4608-4642. <https://doi.org/10.1016/j.spa.2020.01.010>
- [10] Du, N.H. and Nhu, N.N. (2020) Permanence and Extinction for the Stochastic SIR Epidemic Model. *Journal of Differential Equations*, **269**, 9619-9652. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.06.049>
- [11] Mao, X. and Yuan, C. (2006) *Stochastic Differential Equations with Markovian Switching*. Imperial College Press, London. https://doi.org/10.1142/9781860948848_0003 <https://doi.org/10.1142/p473>
- [12] Mao, X. (1997) *Stochastic Differential Equations and Their Applications*. Horwood Publishing, Chichester.
- [13] Zhu, C. and Yin, G. (2009) On strong Feller, Recurrence, and Weak Stabilization of Regime-Switching Diffusions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **48**, 2003-2031. <https://doi.org/10.1137/080712532>
- [14] Nguyen, D.H., Yin, G. and Zhu, C. (2017) Certain Properties Related to Well Posedness of Switching Diffusions. *Stochastic Processes and Their Application*, **127**, 3135-3158. <https://doi.org/10.1016/j.spa.2017.02.004>
- [15] Hening, A. and Nguyen, D. (2018) Coexistence and Extinction for Stochastic Kolmogorov Systems. *Annals of Applied Probability*, **28**, 1893-1942. <https://doi.org/10.1214/17-AAP1347>