Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(11), 4755-4760
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1211468

埃尔米特流形上的光滑函数的有界性

闫 烁

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年10月21日；录用日期：2023年11月14日；发布日期：2023年11月21日

摘 要

本文研究完备埃尔米特流形上的光滑函数的有界性质。特别地，如果完备埃尔米特流形上的一个正的光滑函数的复拉普拉斯满足一个基本不等式，那么可以证明该函数有有限的上界值。

关键词

埃尔米特流形，复拉普拉斯算子，施瓦茨引理

The Boundedness of Smooth Functions on Hermite Manifolds

Shuo Yan

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Oct. 21st, 2023; accepted: Nov. 14th, 2023; published: Nov. 21st, 2023

Abstract

In this paper, we study the boundedness of smooth functions on complete Hermitian manifolds. If the complex Laplacian of a positive smooth function on a complete Hermitian manifold satisfies a fundamental inequality, we can prove that the function has a finite upper bound.

Keywords

Hermitian Manifolds, Complex Laplacian Operator, Schwarz's Lemma

文章引用: 闫烁. 埃尔米特流形上的光滑函数的有界性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(11): 4755-4760.
DOI: 10.12677/aam.2023.1211468

1. 引言

利用极值原理，我们可推得在紧致流形上的光滑函数一定有有限的界。但是对于完备非紧的流形而言，其上的光滑函数一般是无界的。1975 年，丘成桐在[1]证明了完备黎曼流形上的极值原理，进而可以研究完备流形上的光滑函数的有界性质。利用该极值原理，丘成桐在[2]中证明了复流形上的施瓦茨引理，即：从里奇曲率有下界的完备凯勒流形到有负的界的双全纯截面曲率的埃尔米特流形的全纯映射，它的距离减少。最近，通过改变曲率条件或者去掉凯勒条件，这些工作有了新的突破[3]。特别地，倪磊在[4]和[5]中研究了凯勒流形之间的全纯映射，给出了不同曲率条件下新的施瓦茨估计。这些定理证明的主要想法是构造一个特殊的光滑函数，然后运用丘成桐的极值原理，给出该函数的上界估计。

本文参考前人的工作，考虑完备非紧的埃尔米特流形上的任意非负的光滑函数，给出其上界估计。

定理 1.1. 设 (M^m, g) 是一个完备的埃尔米特流形，其上的 Gauduchon1-形式有界，且 (M, g) 作为黎曼流形时，里奇曲率有一致的下界。如果对于任意正的光滑函数 f，满足如下不等式：

$$\square_g f \geq af^{c+1} - bf$$

其中 a, b, c 为正的常数，则有

$$f \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{c}}$$

特别地，f 在流形 M 上有有限的上界。

因为凯勒流形是特殊的埃尔米特流形，且 Gauduchon1-形式为 0，故定理 1.1 对凯勒流形也成立。利用定理 1.1 也可推出丘成桐的施瓦茨引理[2]，为了方便我们给出该定理的描述：

定理 1.2. 设 (M, h) 是完备的凯勒流形，且里奇曲率 $r \geq a$。(N, g) 是埃尔米特流形，且全纯双截面曲率 $B \leq b < 0$。其中 a 和 b 都是常数。如果 $f: M \to N$ 是非常值的全纯映射，那么有

$$f^* g \leq \frac{a}{b} h$$

2. 预备知识

关于黎曼流形的基本内容可参考[6]。这里我们给出埃尔米特流形的一些基本概念和性质，更多详细的知识可参考[7]。

不妨设 N^n 是 n 维埃尔米特流形，J 为近复结构，埃尔米特度量记为 h。定义 h 对应的一个 2-形式的 ω_h（也记 ω）：

$$\omega(X, Y) = h(JX, Y),$$

称 ω_h 为凯勒形式。令 $(z_1, \cdots, z_n)$ 是局部的全纯坐标，则

$$h = h_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j, \omega = \sqrt{-1} h_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j.$$

如果 $d\omega = 0$，ω 称为凯勒度量。

若 ∇ 表示陈联络，则 ∇ 的挠率张量 T 和曲率张量 R 定义为：

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y];$$

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z.$$

在局部坐标下，挠率张量 T 的分量可表示为：

$$T_{ij}^{k}=h^{k\bar{l}}\left(\frac{\partial h_{j\bar{l}}}{\partial z^{i}}-\frac{\partial h_{i\bar{l}}}{\partial z^{j}}\right).$$

当 h 是凯勒度量时，有 $T_{ij}^{k}=0$。记 η 为 Gauduchon1-形式，则有

$$\eta=\sum_{j}\eta_{j}dz^{j}=\sum_{i,j}T_{ij}^{i}dz^{j}.$$

曲率张量 R 的分量表达式为

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}}=-\frac{\partial^{2}h_{k\bar{l}}}{\partial z^{i}\partial\bar{z}^{j}}+h^{p\bar{q}}\frac{\partial h_{k\bar{q}}}{\partial z^{i}}\frac{\partial h_{p\bar{l}}}{\partial\bar{z}^{j}}.$$

对曲率张量求迹，可推得

$$R_{i\bar{j}}^{(1)}=h^{k\bar{l}}R_{i\bar{j}k\bar{l}}=-\frac{\partial^{2}}{\partial z^{i}\partial\bar{z}^{j}}\log\omega^{n}.$$

称 $R_{i\bar{j}}^{(1)}$ 为第一里奇曲率张量。第一陈里奇形式为

$$Ric^{(1)}=\sqrt{-1}R_{i\bar{j}}dz^{i}\wedge d\bar{z}^{j}\in\Gamma\left(N,\wedge^{1,1}T^{*}N\right).$$

它是闭的实(1,1)形式，并且是第一陈类 $c_1(N)\in H^2(N,2\pi\mathbb{Z})$ 的代表元。

曲率张量 R 满足对称性：

$$\overline{R\left(X,\bar{Y},Z,\bar{W}\right)}=R\left(Y,\bar{X},W,\bar{Z}\right),X,Y,Z,W\in T^{1,0}N.$$

若 h 是凯勒度量，则 R 也有交换性：$R\left(X,\bar{Y},Z,\bar{W}\right)=R\left(Z,\bar{Y},X,\bar{W}\right)$。

用 $\Box_h f$ 表示函数 f 相对于度量 h 的复拉普拉斯算子，且定义为：

$$\Box_h f=Tr_h\left(\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f\right)=h^{i\bar{j}}\frac{\partial^{2}f}{\partial z^{i}\partial\bar{z}^{j}}$$

在定理 1.1 的证明中，需要用到丘成桐的极值原理。

定理 2.1 ([1]). 设 (M,g) 是完备的黎曼流形，且黎曼度量 g 的里奇曲率有下界。如果 v 是 M 上有下界的光滑函数，则对于任意的 $\varepsilon>0$，在 M 上都存在一点 p_ε，使得在点 p_ε，有如下不等式成立：

$$|\nabla v|<\varepsilon,\ \Delta v>-\varepsilon,\ v(p_\varepsilon)<\inf v+\varepsilon.$$

这里 Δ 是拉普拉斯－贝尔特拉米算子，∇ 是列维－奇维塔联络。

3. 主要结果的证明

在给出定理 1.1 的证明之前，我们先给出一个复几何中大家熟知的引理：

引理 3.1. 设 (M^m,g) 是埃尔米特流形，且 v 是流形 M 上的光滑函数，则函数 v 的复拉普拉斯和拉普拉斯－贝尔米特算子满足如下关系式：

$$\Delta v=2\Box_g v+2\sum_{i=1}^{m}\left(v_i\bar{\eta}_i+v_{\bar{i}}\eta_i\right)$$

其中η是度量g下的Gauduchon1-形式，且$v_i = e_i(v)$，$v_{\bar{i}} = \overline{e_i}(v)$，$e$是酉标架。

如果(M^m, g)是凯勒流形，则Gauduchon1-形式为0，故v的拉普拉斯－贝尔米特等于2倍的复拉普拉斯，即：$\Delta v = 2\square_g v$。

下面我们证明定理1.1。

证明.由定理已知条件可知，Gauduchon1-形式有界，不妨设$|\eta| < D$，D是大于0的常数。由于非负光滑函数f满足

$$\square_g f \geq af^{c+1} - bf \tag{3.1}$$

且由引理3.1可知f也满足：

$$\Delta f = 2\square_g f + 2\sum_{i=1}^{m}\left(f_i\overline{\eta}_i + f_{\bar{i}}\eta_i\right) \tag{3.2}$$

故结合(3.1)和(3.2)可得

$$\Delta f \geq 2af^{c+1} - 2bf + 2\sum_{i=1}^{m}\left(f_i\overline{\eta}_i + f_{\bar{i}}\eta_i\right) \tag{3.3}$$

由$|\eta| < D$，可推出

$$\sum_{i=1}^{m}\left(f_i\overline{\eta}_i + f_{\bar{i}}\eta_i\right) \geq -2D|\nabla f| \tag{3.4}$$

故(3.4)代入(3.3)得到

$$\Delta f \geq 2af^{c+1} - 2bf - 4D|\nabla f| \tag{3.5}$$

我们现在构造一个新的函数v，即$v = (f+1)^{-\frac{1}{2}c} = \dfrac{1}{(f+1)^{\frac{1}{2}c}}$。故由$f > 0$，可知$v$也是流形$M$上的光滑的正函数。且有$f = v^{-\frac{2}{c}} - 1$。我们把$v$看成自变量是$f$的函数，则有

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{1}{2}c(f+1)^{-\frac{1}{2}c-1} \\ &= -\frac{1}{2}cv^{1+\frac{2}{c}} \end{aligned}$$

同理计算也有

$$v'' = \frac{1}{4}c(c+2)v^{1+\frac{4}{c}}$$

因为$\nabla v = v'\nabla f$，即：$|\nabla f| = \dfrac{|\nabla v|}{|v'|}$，则

$$\begin{aligned} \Delta v &= v''|\nabla f|^2 + v'\Delta f \\ &= \frac{1}{4}c(c+2)v^{1+\frac{4}{c}}\left(\frac{1}{v'}\right)^2|\nabla v|^2 + v'\Delta f \\ &= \frac{c+2}{c}\frac{1}{v}|\nabla v|^2 - \frac{1}{2}cv^{1+\frac{2}{c}}\Delta f \end{aligned}$$

即：

$$\Delta f=\frac{2(c+2)}{c^2}\frac{1}{v^{2+\frac{2}{c}}}|\nabla v|^2-\frac{2}{c}\frac{1}{v^{1+\frac{2}{c}}}\Delta v \tag{3.6}$$

把(3.6)代入(3.5)可得到

$$\begin{aligned}2af^{c+1}-2bf&\le 4D|\nabla f|+\Delta f\\&\le\frac{8D}{cv^{1+\frac{2}{c}}}|\nabla v|+\frac{2(c+2)}{c^2}\frac{1}{v^{2+\frac{2}{c}}}|\nabla v|^2-\frac{2}{c}\frac{1}{v^{1+\frac{2}{c}}}\Delta v\end{aligned} \tag{3.7}$$

现在我们对光滑函数 v 利用丘成桐的极值原理。对于任意的 $\varepsilon>0$，在流形 M 上存在点 p_ε，使得在点 p_ε 处，恒有

$$|\nabla v|<\varepsilon,\ \Delta v>-\varepsilon,\ v(p_\varepsilon)<\inf v+\varepsilon.$$

那么在点 p_ε，由(3.7)得到

$$\begin{aligned}2af^{c+1}-2bf&\le\frac{2(c+2)}{c^2v^{2+\frac{2}{c}}}\varepsilon^2+\frac{8D}{cv^{1+\frac{2}{c}}}\varepsilon+\frac{2}{cv^{1+\frac{2}{c}}}\varepsilon\\&=\frac{2(c+2)\varepsilon^2}{c^2}(f+1)^{c+1}+\frac{2(4D+1)\varepsilon}{c}(f+1)^{\frac{1}{2}c+1}\end{aligned} \tag{3.8}$$

若令 $\varepsilon\to0$，则由丘成桐的极值原理中的不等式可知，$v\to\inf v$。因为 $f=\frac{1}{v^{\frac{2}{c}}}-1$，故此时 $f\to\sup f$。下面我们用反证法证明 $\sup f$ 是有限值。不妨假设 $\sup f=+\infty$。那么我们把不等式(3.8)的两边同时除以 $(f+1)^{c+1}$，故有

$$2a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{f}}\right)^{c+1}-2b\left[\frac{1}{(f+1)^c}-\frac{1}{(f+1)^{c+1}}\right]\le\frac{2(c+2)\varepsilon^2}{c^2}+\frac{2(4D+1)\varepsilon}{c}\frac{1}{(f+1)^{\frac{1}{2}c}} \tag{3.9}$$

故由假设 $\varepsilon\to0$ 时，有 $\sup f=+\infty$，此时由不等式(3.9)可推得 $2a\le0$，这与已知条件 $a>0$ 矛盾。故可得 $\sup f$ 是有限值。

因为 $\sup f$ 是有限值，那么令 $\varepsilon\to0$，此时由(3.8)式可得：

$$2a(\sup f)^{c+1}-2b(\sup f)\le0.$$

故有 $\sup f\le\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{c}}$。 □

下面我们再利用定理 1.1 给出丘成桐的施瓦茨引理(定理 1.2)的证明。

证明：令 $u=tr_h(f^*g)$，易得 u 是流形 M 上的非负光滑函数。由定理 1.2 的条件可以得到 Lu-不等式[8]：

$$\square_h u\ge au-bu^2.$$

由定理 1.2 的条件，可知流形 M 也满足定理 1.1 的条件，且此时的 $c=1$，故运用定理 1.1 可推得：

$$u\le\frac{a}{b}\quad\square$$

4. 总结

本文的定理 1.1 的证明主要是利用已知函数满足的复拉普拉斯算子不等式，结合丘成桐的极值原理，利用反证法给出了我们想要的结论。我们知道，复几何中对研究一般的厄尔米特流形的几何性质和拓扑性质是比较困难的，并且已知的结果也不是很多。相较于凯勒几何而言，其上的厄尔米特度量的挠率不为零，故很多经典的性质和结论在厄尔米特流形上不一定成立。该定理考虑的是一般的完备厄尔米特流形，并且是任意的光滑函数，这对研究一般的复流形的光滑函数有重要的借鉴意义。当然，定理 1.1 的函数需要假设一个基本不等式，这是一个比较强的假设条件，是否能够改进该不等式的各项条件是今后的研究重点。比如，不等式的常数 a,b,c 能否改成一般的正函数。另外，研究哪些几何性质能够刚好满足此不等式也是我们重点考虑的一个方向。

参考文献

[1] Yau, S.T. (1975) Harmonic Functions on Complete Riemannian Manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **28**, 201-228. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280203

[2] Yau, S.T. (1978) A General Schwarz Lemma for Kähler Manifolds. *American Journal of Mathematics*, **100**, 197-203. https://doi.org/10.2307/2373880

[3] Yang, X.K. and Zheng, F.Y. (2019) On Real Bisectional Curvature for Hermitian Manifolds. Transactions of the *American Mathematical Society*, **371**, 2703-2718. https://doi.org/10.1090/tran/7445

[4] Ni, L. (2019) General Schwarz Lemmata and Their Applications. *International Journal of Mathematics*, **13**, Article 1940007. https://doi.org/10.1142/S0129167X1940007X

[5] Ni, L. (2021) Liouville Theorems and a Schwarz Lemma for Holomorphic Mappings between Kähler Manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **74**, 1100-1126. https://doi.org/10.1002/cpa.21987

[6] 白正国, 沈一兵, 水乃翔, 郭孝英. 黎曼几何初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[7] Zheng, F.Y. (2000) Complex Differential Geometry (AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 18). 1st Edition, International Press, Boston.

[8] Lu, Y.C. (1968) Holomorphic Mappings of Complex Manifolds. *Journal of Differential Geometry*, **2**, 299-312. https://doi.org/10.4310/jdg/1214428442