Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(1), 217-233**
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.131025

带有吸引型奇性的离散周期边值问题多重正解的存在性

李雅琴*，**路艳琼**

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年12月17日；录用日期：2024年1月11日；发布日期：2024年1月18日

摘 要

基于上下解方法和 Brouwer 度理论，获得如下边值问题

$$\begin{cases} \triangle^2 u(t-1) + f(u)\triangle u(t) + \varphi(t)u^m(t) + \frac{r(t)}{u^\mu(t)} = s, \quad t \in [1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = u(T), \triangle u(0) = \triangle u(T) \end{cases}$$

多重正解的存在性，其中 $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 连续，$\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ 和 $r:\mathbb{Z}\to(0,+\infty)$ 为 **T-**周期函数，$T>3$ 为给定的整数，m，μ，是两个正常数，且 $0<m\leq 1$ ， $s\in\mathbb{R}$ 是参数。

关键词

吸引型奇性，正解，Brouwer，度理论

Existence of Multiple Positive Solutions for Discrete Periodic Boundary Value Problems with a Singularity of Attractive Type

Yaqin Li*, **Yanqiong Lu**

* 第一作者。

文章引用: 李雅琴, 路艳琼. 带有吸引型奇性的离散周期边值问题多重正解的存在性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(1): 217-233. DOI: 10.12677/aam.2024.131025

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 17^{th}, 2023; accepted: Jan. 11^{th}, 2024; published: Jan. 18^{th}, 2024

Abstract

Based on the upper and lower solution method and Brouwer degree theory, we establish the existence of multiple positive solutions for the following boundary value problems

$$\begin{cases} \triangle^2 u(t-1) + f(u)\triangle u(t) + \varphi(t)u^m(t) + \frac{r(t)}{u^\mu(t)} = s, & t \in [1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = u(T), \triangle u(0) = \triangle u(T) \end{cases}$$

where $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ **is continuous,** $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, r : \mathbb{Z} \to (0,\infty)$ **are** T**-periodic functions,** $T > 3$ **is a positive integer,** m **and** μ **are two positive constants and** $0 < m \leq 1$, $s \in \mathbb{R}$ **is a parameter.**

Keywords

Singularity of Attractive Type, Positive Solutions, Brouwer, Degree Theory

1. 引言

差分方程作为一类重要的方程,在经济学、 电路分析、动力系统、 生物学等方面有着广泛的应用(参见 [1,2]).

2012年, 马如云等人 [3] 利用格林函数的一些性质和不动点理论获得了如下问题

$$\begin{cases} \triangle^2 y(n-1) + a(n)y(n) + f(n,y(n)) = 0, & n \in [1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ y(0) = y(T), \triangle y(0) = \triangle y(T) \end{cases} \tag{1.1}$$

单变量周期解的存在性, 其中 $a : [1,T]_{\mathbb{Z}} \to (\infty, 0]$ 且 $a(n) \not\equiv 0$, $f : [1,T]_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续.

2015年, He 等人 [4] 利用不动点理论和变分方法获得了问题

$$\begin{cases} \triangle(p(t-1)\triangle u(t-1)) + q(t)u(t) = f(t, u(t)), \ \ t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = u(T), \triangle u(0) = \triangle u(T) \end{cases} \tag{1.2}$$

符号变化解和正解存在的充分性, 其中 $f : [1, T]_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续, $p : [0, T]_{\mathbb{Z}} \to (0, \infty)$ 满足 $p(0) = p(T)$, $q : [1, T]_{\mathbb{Z}} \to (0, \infty)$ 满足 $\max\limits_{t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}} q(t) > 0$.

2006年, Bereanu 和 Mawhin [5] 利用拓扑度理论和上下解方法研究了问题

$$\begin{cases} D^2 x_m + f_m(x_m) = s, \ \ m \in [2, n-1]_{\mathbb{Z}}, \\ x_1 = x_n, Dx_1 = Dx_n \end{cases} \tag{1.3}$$

多重正解的存在性, 他们证明了存在 $\varsigma > 0$ 使得问题 (1.3) 分别在 $\lambda \in (0, \varsigma)$、 $\lambda = \varsigma$ 或 $\lambda = \varsigma$ 时, 没有正解、 至少有一个正解或至少有两个正解.

2021年, 王瑞等人 [6] 通过上下解方法和拓扑度理论研究了二阶离散周期边值问题

$$\begin{cases} \triangle^2 u(t-1) + f\triangle u(t) + g(t, u(t)) = s, \quad t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = u(T-1), \triangle u(0) = \triangle u(T-1) \end{cases} \tag{1.4}$$

解的个数与参数 s 的关系, 其中 $g : [1, T]_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数, $f \geq 0$ 是常数, $t \geq 2$ 整数, $s \in \mathbb{R}$.

自然地, f 为关于 u 的函数, $g(t, u)$ 有奇性时, 二阶离散周期边值问题

$$\begin{cases} \triangle^2 u(t-1) + f(u)\triangle u(t) + g(t, u) = s, \quad t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = u(T), \triangle u(0) = \triangle u(T) \end{cases} \tag{1.5}$$

是否存在类似的结果? 这里 $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 是连续函数, $g(t, u) : [1, T]_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为连续函数且在 $u = 0$ 处具有吸引型奇性, $s \in \mathbb{R}$ 是参数.

Ambrosetti-Prodi 问题是微分方程中的经典问题之一, 该问题由 Ambrosetti 和 Prodi [7] 在1972年研究半线性椭圆 Dirichlet 问题解的个数时提出. 此后这类问题受到许多学者的关注并对此进行了大量研究. 特别地, 1986年 Fabry 等人 [8] 讨论了二阶连续周期边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(u)u' + g(t, u) = s, \\ u(0) = u(2\pi), \ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases} \tag{1.6}$$

解的存在性, 其中 g 是连续的 T-周期函数且对 t 一致满足强制性条件, 并得到结论: 存在 $s_0 \in \mathbb{R}$, 使得问题 (1.6) 在 $s < s_0$ 时无解, 在 $s = s_0$ 时至少有一个解, 在 $s < s_0$ 时至少有两个解. 这一结果被称为A.P. 结果. 许多学者在强制性条件下获得了不同边值问题的A.P. 结果, 参见文献 [6, 9, 10]. 2019年, Feltrin 等人 [8] 运用拓扑度理论和上下解方法减弱了二阶连续周期边值问题 (1.6) 存在 A.P. 结果时非线性项对 t 的强制性条件. 2022年 Cheng 等人 [11] 推广到 $g(t, u)$ 有奇性的情形,

而带奇性的离散周期问题的 A.P. 结果尚未有研究成果.

受上述工作的启发 [3–11], 本文考虑了带有吸引型奇性周期边值问题

$$\begin{cases} \triangle^2 u(t-1) + f(u)\triangle u(t) + \varphi(t)u^m(t) + \frac{r(t)}{u^\mu(t)} = s, \quad t \in [1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = u(T), \triangle u(0) = \triangle u(T) \end{cases} \tag{1.7}$$

的多重正解的存在性, 其中 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 连续, $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ 和 $r:\mathbb{Z}\to(0,+\infty)$ 为 T-周期函数, $T>3$ 为给定的整数, m,μ 是两个正常数, 且 $0<m\le 1$, $s\in\mathbb{R}$ 是参数.

2. 预备知识

设 $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $a<b$, $[a,b]_{\mathbb{Z}}=\{a,a+1,\cdots,b\}$, 当 $b<a$ 时, $\sum\limits_{s=a}^{b}u(s)=0$.

令 $T\in\mathbb{Z}$ 且 $T>3$, $\triangle u(t)=u(t+1)-u(t)$ 为前向差分算子. 记 $E=\{u:[0,T+1]_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{R}|u(0)=u(T),\triangle u(0)=\triangle u(T)\}$, 不难验证 E 按范数 $\|u\|_\infty := \max\limits_{t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}}|u(t)|$ 构成 Banach 空间. 令 $X=\{u:[0,T+1]_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{R}\}$, 则 X 按范数 $\|u\|_1=\sum\limits_{t=1}^{T}|u(t)|$ 构成 Banach 空间.

对任意给定的 $u\in E$, 记 $\overline{u}=\frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T}u(t)$.

下面给出本文的一些定义和引理. 首先引入问题 (1.7) 的上下解的定义.

定义2.1 设 $\alpha,\beta\in X$, 若 α 满足

$$\begin{cases} \triangle^2\alpha(t-1) + f(\alpha(t))\triangle\alpha(t) + \varphi(t)\alpha^m(t) + \frac{r(t)}{\alpha^\mu(t)} \ge s, \\ \alpha(0)=\alpha(T), \triangle\alpha(0) \ge \triangle\alpha(T) \end{cases} \tag{2.1}$$

则称 α 为问题 (1.7) 的下解. 若 β 满足

$$\begin{cases} \triangle^2\beta(t-1) + f(\beta(t))\triangle\beta(t) + \varphi(t)\beta^m(t) + \frac{r(t)}{\beta^\mu(t)} \le s, \\ \beta(0)=\beta(T), \triangle\beta(0) \le \triangle\beta(T) \end{cases} \tag{2.2}$$

则称 β 为问题 (1.7) 的上解. 若条件 (2.1)、条件 (2.2) 中的第一个不等式严格成立, 则 α,β 分别称为问题 (1.7) 的严格下解和严格上解.

令 $F_s(u(t))=-f(u)\triangle u(t)-\varphi(t)u^m(t)-\frac{r(t)}{u^\mu(t)}+s$, 易知 $F_s:[1,T]_{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数.

定义

$$\Lambda := \{u\in E: \|\triangle u(t)\|_\infty < 1\}.$$

定义投影算子 $P:E\to E$,

$$Pu(t) := u(0)$$

和 $Q: E \to E$,

$$Qu(t) := \frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T} u(s), \ \ t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}$$

以及线性算子 $K: E \to E$,

$$Ku(t) := \sum_{s=1}^{t-1} u(s), \ \ t \in [1, T+1]_{\mathbb{Z}}.$$

令

$$\Xi := Pu + QF_s(u) + KF_s(u),$$

不难验证算子 $\Xi: E \to E$ 全连续.

类似 ([12],定理1]) 的证明过程可以建立如下结果.

引理2.1 设 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 分别是问题 (1.7) 的严格上解和严格下解, 使得对 $t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}$ 有 $\alpha(t) < \beta(t)$, 那么问题 (1.7) 存在一个正解 $u(t)$ 使得

$$\alpha(t) < u(t) < \beta(t), \ \ \forall t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}.$$

此外, Brouwer 度 [13] $\deg(I - \Xi_s, \Omega_{\alpha,\beta}, 0) = -1$, 其中

$$\Omega_{\alpha,\beta} := \{u \in \Lambda : \alpha(t) < u(t) < \beta(t), \ \ t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}\}.$$

证明 设 $\gamma(u(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}})$ 是连续函数且定义为

$$\gamma(u(t)) = \begin{cases} \beta(t), & u(t) > \beta(t), \\ u(t), & \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t), \\ \alpha(t), & u(t) < \alpha(t). \end{cases}$$

令 $F(t, u(t)) = f(\gamma(u(t))\triangle\gamma(u(t)) + \varphi(t)(\gamma(u(t)))^m + \frac{r(t)}{(\gamma(u(t)))^\mu} - s, \ \ t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}$.

下面考虑辅助问题

$$\begin{cases} \triangle^2 u(t-1) + F(t, u(t)) - [u(t) - \gamma(u(t))] = 0, & t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = u(T), \triangle u(0) = \triangle u(T) \end{cases}$$

解的存在性, 并证明如果 $u(t)$ 是辅助问题的解, 那么 $\alpha \le u(t) \le \beta(t)$, 且 $u(t)$ 是问题 (1.7) 的解.

反设 $\exists t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}$, 使得 $\alpha(t) - u(t) > 0$, 从而 $\exists t^* \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}$, 使得 $\alpha(t^*) - u(t^*) = \max\limits_{t \in [0,T+1]_{\mathbb{Z}}} (\alpha(t) - u(t)) > 0$.

当 $t^* = 0$ 时, $\alpha(t^*) - u(t^*) = \alpha(0) - u(0) = \alpha(T) - u(T)$, 因此, 当 $t^* = 0$ 和 $t^* = T$ 时所得结果一致.

当 $t^* = T+1$ 时,

$$\alpha(t^*)-u(t^*)=\alpha(T+1)-u(T+1)=\max_{t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}}(\alpha(t)-u(t)), \tag{2.3}$$

由周期边值条件 $u(0)=u(T)$、$\triangle u(0)=\triangle u(T)$ 和 $\alpha(0)=\alpha(T)$、$\triangle\alpha(0)\geq\triangle\alpha(T)$, 可知 $u(1)=u(T+1)$, $\alpha(1)\geq\alpha(T+1)$, 则得到 $\alpha(1)-u(1)\geq\alpha(T+1)-u(T+1)$, 这与 (2.3) 矛盾, 因此, $t^*\neq T+1$.

当 $t^*\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$ 时,

$$\alpha(t^*+1)-\alpha(t^*)\leq u(t^*+1)-u(t^*),\ \ \alpha(t^*)-\alpha(t^*-1)\geq u(t^*)-u(t^*-1).$$

即

$$\triangle\alpha(t^*)\leq\triangle u(t^*),\ \ \triangle\alpha(t^*-1)\geq\triangle u(t^*-1).$$

故

$$\begin{aligned}\triangle^2\alpha(t^*-1)&\leq\triangle^2u(t^*-1)\\&=-F(t^*,u(t^*))+[u(t^*)-\gamma(u(t^*))]\\&<-f(u(t^*))\triangle u(t^*)-\varphi(t^*)u^m(t^*)-\frac{r(t^*)}{u^\mu(t^*)}+s\\&\leq\triangle^2\alpha(t^*-1),\end{aligned}$$

矛盾. 因此对 $\forall t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$, 有 $\alpha(t)\leq u(t)$; 同理可证得对 $\forall t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$, 有 $u(t)\leq\beta(t)$. 当 α,β 满足的条件严格时, 有 $\alpha(t)<u(t)<\beta(t)$.

引理2.2 假设 $\overline{\varphi}=\frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T}\varphi(t)>0$, 并且 $\frac{f(u)}{u^m}$ 单调递减, 那么问题 (1.7) 有正解的必要条件为 $s>0$.

证明 设 $u(t)$ 是问题 (1.7) 的任意正解. 在 (1.7) 两边同除以 $u^m(t)$, 得到

$$\frac{\triangle^2u(t^*-1)}{u^m(t)}+\frac{f(u(t))\triangle u(t)}{u^m(t)}+\varphi(t)+\frac{r(t)}{u^{\mu+m}(t)}=\frac{s}{u^m(t)}. \tag{2.4}$$

对 (2.4) 从 1 到 T 求和分, 得到

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{\triangle^2u(t^*-1)}{u^m(t)}+\sum_{t=1}^{T}\frac{f(u(t))\triangle u(t)}{u^m(t)}+\sum_{t=1}^{T}\varphi(t)+\sum_{t=1}^{T}\frac{r(t)}{u^{\mu+m}(t)}=\sum_{t=1}^{T}\frac{s}{u^m(t)}. \tag{2.5}$$

进一步, 利用分部和分, 得到

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T}\frac{\triangle^2u(t^*-1)}{u^m(t)}&=-\sum_{t=1}^{T}\triangle u(t)\triangle(\frac{1}{u^m(t)})\\&=\sum_{t=1}^{T}\triangle u(t)\frac{\triangle u^m(t)}{u^m(t)u^m(t+1)}\\&=\sum_{t=1}^{T}(\triangle u(t))^2\frac{u^{m-1}(t+1)+u^{m-2}(t+1)u(t)+\cdots+u^{m-1}(t)}{u^m(t)u^m(t+1)}\\&\geq 0\end{aligned} \tag{2.6}$$

和

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{f(u(t))}{u^m(t)}\triangle u(t)=-\sum_{t=1}^{T}u(t+1)\triangle(\frac{f(u(t))}{u^m(t)})\geq 0,\ \sum_{t=1}^{T}\frac{r(t)}{u^{\mu+m}(t)}>0. \tag{2.7}$$

将 (2.6) 和 (2.7) 代入 (2.5), 我们得到

$$0<T\overline{\varphi}<\sum_{t=1}^{T}\frac{s}{u^m(t)}, \tag{2.8}$$

因此就得到 $s>0$.

接下来, 我们建立问题 (1.7) 正解的先验估计.

引理2.3 假设 $\overline{\varphi}>0$ 成立, 进一步, 假设以下条件成立:

(H_1) 存在常数 $\gamma_1>0$, 使得 $\inf\limits_{u\in(0,+\infty)}f(u)\geq\gamma_1>0$, 且 $\gamma_1>\frac{T}{2}\parallel\varphi\parallel_\infty+2$. 那么对问题 (1.7) 的任何一个正解 $u(t)$, 都存在两个常数 $0<d_{1,s}<d_{2,s}<+\infty$, 使得

$$d_{1,s}<u(t)<d_{2,s},\ \ \forall t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}. \tag{2.9}$$

证明 设 $u(t)$ 是问题 (1.7) 的一个正解. 由引理 (2.2) 可知 $s>0$. 假设 $t_1\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$, 使得 $u(t_1):=\min\{u(t):t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}\}$, 因此有 $\triangle u(t_1)\geq 0,\triangle u(t_1-1)\leq 0,\triangle^2u(t_1-1)\geq 0$. 从而

$$\triangle^2u(t-1)|_{t=t_1}=\triangle u(t_1)-\triangle u(t_1-1)\geq 0. \tag{2.10}$$

由 (1.9) 和 $f>0$ 得

$$\triangle^2u(t_1-1)=s-\varphi(t_1)u^m(t_1)-\frac{r(t_1)}{u^\mu(t_1)}-f(u(t_1))\triangle u(t_1)<s+|\varphi_{\min}|u^m(t_1)-\frac{r_{\min}}{u^\mu(t_1)}, \tag{2.11}$$

其中 $\varphi_{\min}:=\min\{\varphi(t):t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\}$, $r_{\min}:=\min\{r(t):t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\}$. 如果 $u(t_1)<(\frac{r_{\min}}{2|\varphi_{\min}|+1})^{\frac{1}{m+\mu}}$, 那么可以得到

$$|\varphi_{\min}|u^m(t_1)<\frac{r_{\min}}{2u^\mu(t_1)}. \tag{2.12}$$

将 (2.12) 代入 (2.11), 得到

$$0\leq\triangle^2u(t_1-1)<s+\frac{r_{\min}}{2u^\mu(t_1)}-\frac{r_{\min}}{u^\mu(t_1)}=s-\frac{r_{\min}}{2u^\mu(t_1)}.$$

这意味着

$$u(t_1)>(\frac{r_{\min}}{2s})^{\frac{1}{\mu}}.$$

从而,

$$u(t_1)\geq\min\{(\frac{r_{\min}}{2s})^{\frac{1}{\mu}},(\frac{r_{\min}}{2|\varphi_{\min}|+1})^{\frac{1}{m+\mu}}\}.$$

此外, 存在一个适当大的数 K 使得

$$(\frac{r_{\min}}{2s+K})^{\frac{1}{\mu}} < \min\{(\frac{r_{\min}}{2s})^{\frac{1}{\mu}}, (\frac{r_{\min}}{2|\varphi_{\min}|+1})^{\frac{1}{m+\mu}}\},\ \ \forall s \in (0,+\infty).$$

因此, 有

$$u(t_1) > (\frac{r_{\min}}{2s+K})^{\frac{1}{\mu}} := d_{1,s}. \tag{2.13}$$

那么, 对于所有 $t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}$, 问题 (1.7) 的每一个正解都满足 $u(t) > d_{1,s}$, 而且 $s \mapsto d_{1,s}$ 单调递减.

接下来, 估计问题 (1.7) 的正解的上界. 首先, 考虑 $\|u\|_\infty \geq 1$. 从 (2.8) 可知存在一个点 $\eta \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}$, 使得

$$T\overline{\varphi} < \frac{Ts}{u^m(\eta)},$$

即

$$u(\eta) < (\frac{s}{\overline{\varphi}})^{\frac{1}{m}} := A. \tag{2.14}$$

在 (1.7) 两边同时乘以 $\triangle u(t)$ 并从 1 到 T 上求和分, 得到

$$\sum_{t=1}^{T} \triangle^2 u(t-1)\triangle u(t) + \sum_{t=1}^{T} f(u(t))(\triangle u(t))^2 + \sum_{t=1}^{T} \varphi(t)u^m(t)\triangle u(t) + \sum_{t=1}^{T} \frac{r(t)}{u^\mu(t)}\triangle u(t) = \sum_{t=1}^{T} s\triangle u(t). \tag{2.15}$$

进一步, 得到

$$\sum_{t=1}^{T} s\triangle u(t) = \sum_{t=1}^{T} s(u(t+1)-u(t)) = 0. \tag{2.16}$$

由周期边值条件可得

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} \triangle^2 u(t-1)\triangle u(t) &= \sum_{t=1}^{T} (\triangle u(t) - \triangle u(t-1))\triangle u(t) \\
&= \sum_{t=1}^{T} ((\triangle u(t))^2 - \triangle u(t-1)\triangle u(t)) \\
&= \sum_{t=1}^{T} \frac{(\triangle u(t))^2 + (\triangle u(t-1))^2 - 2\triangle u(t-1)\triangle u(t)}{2} - \frac{(\triangle u(0))^2}{2} + \frac{(\triangle u(T))^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} (\triangle u(t) - \triangle u(t-1))^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} (|\triangle u(t)| + |\triangle u(t-1)|)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} (2\max_{t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}}\{|\triangle u(t)|, |\triangle u(t-1)|\})^2 \\
&= 2\sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

将 (2.16) 代入 (2.15), 得到

$$\sum_{t=1}^{T} f(u(t))(\triangle u(t))^2 = -\sum_{t=1}^{T} \triangle^2 u(t-1)\triangle u(t) - \sum_{t=1}^{T} \varphi(t)u^m(t)\triangle u(t) - \sum_{t=1}^{T} \frac{r(t)}{u^\mu(t)}\triangle u(t).$$

等式两边取绝对值有

$$|\sum_{t=1}^{T} f(u(t))(\triangle u(t))^2| = |-\sum_{t=1}^{T} \triangle^2 u(t-1)\triangle u(t) - \sum_{t=1}^{T} \varphi(t)u^m(t)\triangle u(t) - \sum_{t=1}^{T} \frac{r(t)}{u^\mu(t)}\triangle u(t)|,$$

即

$$|\sum_{t=1}^{T} f(u(t))(\triangle u(t))^2| \leq |\sum_{t=1}^{T} \triangle^2 u(t-1)\triangle u(t)| + |\sum_{t=1}^{T} \varphi(t)u^m(t)\triangle u(t)| + |\sum_{t=1}^{T} \frac{r(t)}{u^\mu(t)}\triangle u(t)|.$$

由(H_1)中 $\inf\limits_{u\in(0,+\infty)} f(u) \geq \gamma_1 > 0$ 可知

$$\gamma_1 \sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2 \leq |\sum_{t=1}^{T} \triangle^2 u(t-1)\triangle u(t)| + |\sum_{t=1}^{T} \varphi(t)u^m(t)\triangle u(t)| + |\sum_{t=1}^{T} \frac{r(t)}{u^\mu(t)}\triangle u(t)|.$$

通过应用 Hölder 不等式 (2.13), 和 (2.17), 可得

$$\begin{aligned}\gamma_1 \sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2 &\leq 2\sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2 + \|\varphi\|_\infty \|u\|_\infty^m |\sum_{t=1}^{T} \triangle u(t)| + \frac{\|r\|_\infty}{(d_{1,s})^\mu} |\sum_{t=1}^{T} \triangle u(t)| \\ &\leq 2\sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2 + \|\varphi\|_\infty \|u\|_\infty^m T^{\frac{1}{2}} (\sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\|r\|_\infty}{(d_{1,s})^\mu} T^{\frac{1}{2}} (\sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2 + \|\varphi\|_\infty \|u\|_\infty^m T^{\frac{1}{2}} (\sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(2s+K)\|r\|_\infty}{r_{\min}} T^{\frac{1}{2}} (\sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

注意有 $0 < m \leq 1$ 和 $\|u\|_\infty \geq 1$, 因此

$$\gamma_1 \sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2 \leq 2\sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2 + \|\varphi\|_\infty \|u\|_\infty T^{\frac{1}{2}} (\sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(2s+K)\|r\|_\infty}{r_{\min}} T^{\frac{1}{2}} (\sum_{t=1}^{T} |\triangle u(t)|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.18}$$

根据 (2.14) 及周期边值条件可知

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty &= \max_{t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}}|u(t)| \\ &= \max_{t\in[\eta,\eta+T+1]_{\mathbb{Z}}}|u(t)| \\ &= \frac{1}{2}\max_{t\in[\eta,\eta+T+1]_{\mathbb{Z}}}(|u(t)|+|u(t-T)|) \\ &= \frac{1}{2}\max_{t\in[\eta,\eta+T+1]_{\mathbb{Z}}}(|u(\eta)+\sum_{s=\eta}^{t-1}\triangle u(s)|+|u(\eta)-\sum_{s=t-T}^{\eta-1}\triangle u(s)|) \\ &\le A+\frac{1}{2}(\sum_{s=\eta}^{t-1}|\triangle u(s)|+\sum_{s=t-T}^{\eta-1}|\triangle u(s)|) \\ &\le A+\frac{1}{2}\sum_{s=t-T}^{t-1}|\triangle u(t)| \\ &\le A+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\triangle u(t)| \\ &\le A+\frac{T^{\frac{1}{2}}}{2}(\sum_{t=1}^{T}|\triangle u(t)|^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

应用 (2.18) 和 (2.19), 可推导

$$\begin{aligned}\gamma_1\sum_{t=1}^{T}|\triangle u(t)|^2 &\le 2\sum_{t=1}^{T}|\triangle u(t)|^2+\|\varphi\|_\infty(A+\frac{T^{\frac{1}{2}}}{2}(\sum_{t=1}^{T}|\triangle u(t)|^2)^{\frac{1}{2}})T^{\frac{1}{2}}(\sum_{t=1}^{T}|\triangle u(t)|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &+\frac{(2s+K)\|r\|_\infty}{r_{\min}}T^{\frac{1}{2}}(\sum_{t=1}^{T}|\triangle u(t)|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &=2\sum_{t=1}^{T}|\triangle u(t)|^2+\frac{T}{2}\|\varphi\|_\infty\sum_{t=1}^{T}|\triangle u(t)|^2 \\ &+\frac{T^{\frac{1}{2}}(\|\varphi\|_\infty A r_{\min}+(2s+K)\|r\|_\infty)}{r_{\min}}(\sum_{t=1}^{T}|\triangle u(t)|^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

由(H_1)中定义的 $\gamma_1>\frac{T}{2}\|\varphi\|_\infty+2$，可得

$$(\sum_{t=1}^{T}|\triangle u(t)|^2)^{\frac{1}{2}}\le\frac{T^{\frac{1}{2}}(\|\varphi\|_\infty A r_{\min}+(2s+K)\|r\|_\infty)}{r_{\min}(\gamma_1-\frac{T}{2}\|\varphi\|_\infty-2)}. \tag{2.20}$$

由 (2.19) 和 (2.20) 可知当 $B:=\gamma_1-\frac{T}{2}\|\varphi\|_\infty-2$，有

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty &\le A+\frac{T\|\varphi\|_\infty A r_{\min}+T(2s+K)\|r\|_\infty}{2r_{\min}(\gamma_1-\frac{T}{2}\|\varphi\|_\infty-2)} \\ &=\frac{2AB+\|\varphi\|_\infty A+T(2s+K)\frac{\|r\|_\infty}{r_{\min}}}{2B}:=W.\end{aligned} \tag{2.21}$$

由 (2.21) 可知 $W \in (0, +\infty)$. 注意当 $s \in (0, 1]$ 时,

$$\|u\|_\infty < W.$$

当 $s > 1$ 时,

$$\|u\|_\infty < W s^{\frac{1}{m}}.$$

因此, 对所有 $s \in (0, +\infty)$ 不等式

$$W(s+1)^{\frac{1}{m}} > \max\{W s^{\frac{1}{m}}, W\}$$

都成立.

令

$$d_{2,s} := W(s+1)^{\frac{1}{m}},$$

那么对于所有 $t \in [1, T+1]_{\mathbb{Z}}$, 问题 (1.7) 的每个正解都满足 $u(t) < d_{2,s}$.

如果 $\|u\|_\infty \leq 1$, 那么对所有 $t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}$, $u(t) < d_{2,s}$ 都成立. 因此, 在 $\|u\|_\infty \leq 1$ 或 $\|u\|_\infty \geq 1$ 的情况下, 有

$$u(t) < d_{2,s}, \ \ \forall t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}},$$

并且 $s \mapsto d_{2,s}$ 是递增的.

综上所述, 对于问题 (1.7) 的每个正解 $u(t)$, 都存在两个常数 $d_{1,s}$ 和 $d_{2,s}$, 使得

$$d_{1,s} < u(t) < d_{2,s}, \ \ \forall t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}},$$

其中 $s \mapsto d_{1,s}$ 单调递减, $s \mapsto d_{2,s}$ 单调递增.

3. 主要结果

下面给出本文的主要结果. 首先, 给出一些假设:

(A$_1$) $\varphi_{\min} < 0$, $0 < W < (\frac{r_{\min}}{|\varphi_{\min}|})^{\frac{1}{m+\mu}}$;

(A$_2$) $\overline{\varphi} > 0$ 且 $\gamma_1 > \frac{T}{2}\|\varphi\|_\infty + 2$, 其中 γ_1 在引理 2.3 的(H$_1$)中已定义;

(A$_3$) $\varphi_{\min} = 0$ 且 $0 < \overline{\varphi} < \frac{2\gamma_1}{T}$.

如果 $\overline{\varphi} > 0$ 且 $0 < W < (\frac{r_{\min}}{|\varphi_{\min}|})^{\frac{1}{m+\mu}}$, 那么由引理 2.3 可知问题 (1.7) 的每个正解 $u(t)$ 满足

$$(\frac{r_{\min}}{2s+K})^{\frac{1}{\mu}} < u(t) < W(s+1)^{\frac{1}{m}}, \ \ \forall t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}.$$

令

$$h_{0,s} := \min\{\varphi(t)u^m(t) + \frac{r(t)}{u^\mu(t)}\}, \ \ \forall (t, u) \in [1, T]_{\mathbb{Z}} \times [d_{1,s}, d_{2,s}]. \tag{3.1}$$

由于 $s \longmapsto h_{0,s}$ 非增且 $\overline{\varphi} > 0$, 得到

$$h_{0,s} \geq -|\varphi_{\min}|d_{2,s}^m + \frac{r_{\min}}{d_{2,s}^\mu} = -|\varphi_{\min}|W^m(s+1) + \frac{r_{\min}}{W^\mu(s+1)^{\frac{\mu}{m}}}.$$

考虑不等式

$$-|\varphi_{\min}|W^m(s+1) + \frac{r_{\min}}{W^\mu(s+1)^{\frac{\mu}{m}}} > s,$$

即

$$|\varphi_{\min}|W^{m+\mu}(s+1)^{\frac{m+\mu}{m}} + W^\mu(s+1)^{\frac{\mu}{m}}s < r_{\min}. \tag{3.2}$$

如果假设(A_1)成立或$\varphi_{\min} = 0$, 那么对于 $s = 0$, (3.2) 成立. 根据函数的有界性, 可知存在一个常数ω, 使得对每个 $s \in [0, \omega)$, (3.2) 成立. 事实上, 对每个 $s \in [0, \omega)$, 都有 $h_{0,s} > s$. 结合 (3.1) 得到

$$\varphi(t)u^m(t) + \frac{r(t)}{u^\mu(t)} \geq h_0(s) > s, \forall (t, s, u) \in [1, T]_{\mathbb{Z}} \times [0, \omega) \times [d_{1,s}, d_{2,s}]. \tag{3.3}$$

由条件 $r(t) > 0$, $t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}$ 知

$$\lim_{u\to 0}(\varphi(t)u^m(t) + \frac{r(t)}{u^\mu}(t)) = +\infty, \ \ \forall t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}.$$

因此可知对每个 $s \in (0, +\infty)$, 存在常数

$$\gamma_s := \min\{1, (\frac{r_{\min}}{\|\varphi\|_\infty + s})^{\frac{1}{\mu}}\}, \tag{3.4}$$

使得

$$\varphi(t)u^m(t) + \frac{r(t)}{u^\mu(t)} > s, \quad \forall (t, u) \in [1, T]_{\mathbb{Z}} \times (0, \gamma_s). \tag{3.5}$$

显然 $s \mapsto \gamma_s$ 单调递减.

综上, 本文的主要结果如下:

定理3.1 设假设(A_1)-(A_2)成立或假设(A_3)成立, 那么存在一个常数 $s_0 \in (0, +\infty)$ 使得

(i) 当 $s < s_0$ 时, 问题 (1.7) 没有正解;

(ii) 当 $s = s_0$ 时, 问题 (1.7) 至少有一个正解;

(iii) 当 $s > s_0$ 时, 问题 (1.7) 至少有两个正解.

下面证明定理 3.1, 我们通过几个辅助命题来完成. 下面要求假设(A_1)-(A_2)成立或假设(A_3)成立.

引理3.1 设存在一个常数 $s_0 \in (0, +\infty)$, 使得对每个 $s < s_0$, 问题 (1.7) 没有正解.

证明 设 $u(t)$ 是问题 (1.7) 的任意一个正解, 由引理 2.3 知

$$d_{1,s} < u(t) < d_{2,s},$$

其中 $d_{1,s}, d_{2,s}$ 在引理 2.3 的证明过程中已定义. 记 $u(t_1) = \min\limits_{t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}} u(t)$, 则由 (3.3) 式得

$$\triangle^2 u(t-1)|_{t=t_1} = s - [\varphi(t_1)u^m(t_1) + \frac{r(t_1)}{u^\mu(t_1)}] - f(u(t_1))\triangle u(t_1) \leq s - h_0(s) < 0, \quad \forall s \in [0,\omega),$$

这与式 (2.10) 中 $\triangle^2 u(t-1)|_{t=t_1} \geq 0$ 矛盾. 这就意味着对所有的 $s \in [0,\omega)$, 问题 (1.7) 没有正解.

通过引理 2.2 可知 $s > 0$ 是问题 (1.7) 有正解的必要条件, 即对每一个 $s < 0$, 问题 (1.7) 没有正解. 因此, 对每个 $s < \omega$, 问题 (1.7) 没有正解.

取常数 $\zeta \in (d_{1,0}, d_{2,0})$, 定义

$$h_1 := \max\{\varphi(t)\zeta^m + \frac{r(t)}{\zeta^\mu} : t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}\}.$$

由引理 2.3 知, $s \mapsto d_{1,s}$ 单调减, $s \mapsto d_{2,s}$ 单调增, 故对 $s \in (0, +\infty)$, 有 $(d_{1,0}, d_{2,0}) \subset (d_{1,s}, d_{2,s})$ 且 $h_1 > h_{0,s}$. 结合 (3.4) 和 (3.5), 可知存在常数 $0 < \rho < \min\{d_{1,s}, d_{2,s}\}$ 使得

$$\varphi(t)\rho^m + \frac{r(t)}{\rho^\mu} > s, \ \ t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}.$$

因此, $\alpha(t) \equiv \rho$ 是问题 (1.7) 的严格下解, 并且对每个 $s > h_1$, 有

$$\varphi(t)\zeta^m + \frac{r(t)}{\zeta^\mu} \leq h_1 < s, \ \ t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}.$$

那么, 对于每个 $s \in (h_1, +\infty)$, $\beta \equiv \zeta(t)$ 是问题 (1.7) 的严格上解. 通过引理 2.1 可知, 问题 (1.7) 至少存在一个正解 $u(t)$, 对 $\forall s \in (h_1, +\infty)$ 满足

$$\rho < u(t) < \zeta, \ \ \forall t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}.$$

现在, 定义集合

$$S := \{s \in \mathbb{R} | \text{问题}(1.7)\text{至少有一个正解}\}.$$

显然, S 是一个非空集合. 令

$$s_0 = \inf S. \tag{3.6}$$

由上述证明得到 $\omega \leq s_0 \leq h_1$. 结论得证.

引理3.2 对每个 $s > s_0$, 问题 (1.7) 至少有一个正解.

证明 由式 (3.6) 和下确界的定义可知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\sigma \in S$ 使得 $\sigma - s_0 < \varepsilon$. 因此, 对于任意 $s > s_0$, 存在 $\sigma \in [s_0, s)$ 使得问题 (1.7) 有一个正解 $u_\sigma(t)$, 满足

$$\triangle^2 u_\sigma(t-1) + f(u_\sigma(t))\triangle u_\sigma(t) + \varphi(t)u_\sigma^m(t) + \frac{r(t)}{u_\sigma^\mu(t)} = \sigma < s.$$

显然 $u_\sigma(t)$ 是 (1.7) 的一个严格上解.

进一步, 对于 $t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}$, 令常数 $0 < \alpha_\sigma < \min\{d_{1,s}, d_{2,s}\}$ 且 $\alpha_\sigma < \min u_\sigma(t)$, 则得到

$$\varphi(t)\alpha_\sigma^m(t) + \frac{r(t)}{\alpha_\sigma^\mu}(t) > s,\ t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}.$$

不难看出 α_σ 是问题 (1.7) 的一个严格下解. 由引理 2.1, 问题 (1.7) 至少有一个正解 $u_s(t)$ 满足

$$\alpha_\sigma < u_s(t) < u_\sigma(t),\ \forall t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}.$$

因此, 对任意给定的 $s > s_0$, 问题 (1.7) 至少有一个正解.

接下来, 当 s 在一个闭区间内变化时, 建立问题 (1.7) 所有正解的先验估计.

引理3.3 对每个 $\overline{s} > s_0$, 存在两个常数 $0 < \widehat{d}_{1,\overline{s}} < \widehat{d}_{2,\overline{s}} < +\infty$, 使得对于 $s \in [s_0, \overline{s}]$, 问题 (1.7) 的每个正解 $u(t)$, 满足

$$\widehat{d}_{1,\overline{s}} < u(t) < \widehat{d}_{2,\overline{s}},\ \ \forall t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}.$$

证明 设对任意给定的 $s \in [s_0, \overline{s}]$, $u(t)$ 是问题 (1.7) 的一个解, 则由引理 2.3 知

$$\min\{u(t) : t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}\} > d_{1,s},\ \max\{u(t) : t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}\} < d_{2,s}.$$

此外, 由于 $s \mapsto d_{1,s}$ 单调减且 $s \mapsto d_{2,s}$ 单调增, 从而, 有

$$d_{1,\overline{s}} < u(t) < d_{2,\overline{s}},\ \ \forall t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}.$$

从而, 如果令集合 $\widehat{d}_{1,\overline{s}} := d_{1,\overline{s}}$ 和 $\widehat{d}_{2,\overline{s}} := d_{2,\overline{s}}$, 那么对每个 $s \in [s_0, \overline{s}]$, 有

$$\widehat{d}_{1,\overline{s}} < d_{1,s} < u(t) < d_{2,s} < \widehat{d}_{2,\overline{s}},\ \ \forall t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}.$$

$s \mapsto \widehat{d}_{1,\overline{s}}$ 单调减且 $s \mapsto \widehat{d}_{2,\overline{s}}$ 单调增.

引理3.4 对于每个 $s > s_0$, 问题 (1.7) 至少存在两个正解.

证明 通过引理 3.1, 对于每个 $s < s_0$, 问题 (1.7) 没有正解.

令 $\overline{s} > s_0$ 并且定义以下集合

$$\Sigma_{\overline{s}} := \{u \in \Lambda : \min\{\gamma_{\overline{s}}, \widehat{d}_{1,\overline{s}}\} < u(t) < \widehat{d}_{2,\overline{s}}, |\triangle u(t)| < 1,\ \ \forall t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}\}.$$

由拓扑度的定义可得:

$$\deg(I - \Xi_s, \Sigma_{\overline{s}}, 0) = 0,\ \ \forall s < s_0. \tag{3.7}$$

由于算子 $I - \Xi_s$ 在有界开集 $\Sigma_{\overline{s}} \subseteq \Lambda$ 上定义良好, 对于每个 $s < \overline{s}$, 运用度理论的同伦不变性以及式 (3.7), 可得

$$\deg(I - \Xi_s, \Sigma_{\overline{s}}, 0) = 0,\ \ \forall s \le \overline{s}.$$

对每个 $\varepsilon > 0$ 在条件 $s = s_0 + \varepsilon$ 下, 考虑问题 (1.7) 的一个正解 $\beta_\varepsilon(t)$, 其存在性由引理 3.2 已证. 如

果 $s_0+\varepsilon<s<\overline{s}$, 那么 $\alpha_\varepsilon(t)\equiv\min\{\gamma_{\overline{s}},\widehat{d}_{1,\overline{s}}\}$ 和 $\beta_\varepsilon(t)$ 分别是问题 (1.7) 的严格下解和严格上解, 并且对于所有 $t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$, 有 $\alpha_\varepsilon(t)<\beta_\varepsilon(t)$. 由引理 3.3 可知

$$\Omega_\varepsilon^1:=\{u\in\Lambda:\alpha_\varepsilon(t)<u(t)<\beta_\varepsilon(t),\ |\triangle u(t)|<a,\ \forall t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}\},$$

是 $\Sigma_{\overline{s}}$ 的子集. 因此有 $\overline{\Omega_\varepsilon^1}\subseteq\Sigma_{\overline{s}}\subseteq\Lambda$.

此外,对于 $s\in(s_0+\varepsilon,\overline{s}]$, Brouwer 度 $\deg(I-\Xi_s,\Sigma_{\overline{s}},0)$ 和 $\deg(I-\Xi_s,\overline{\Omega_\varepsilon^1},0)$ 都是定义良好的. 根据引理 2.1 有

$$\deg(I-\Xi_s,\overline{\Omega_\varepsilon^1},0)=-1,\ \ \forall s\in(s_0+\varepsilon,\overline{s}].$$

令 $\Omega_2:=\Sigma_{\overline{s}}\backslash\overline{\Omega_\varepsilon^1}$. 由度理论的切除性, 得到

$$\deg(I-\Xi_s,\Omega_2,0)=\deg(I-\Xi_s,\Sigma_{\overline{s}},0)-\deg(I-\Xi_s,\overline{\Omega_\varepsilon^1},0)=1,\ \ \forall s\in(s_0+\varepsilon,\overline{s}].$$

由 ε 的任意性知, 对于 $\forall s\in(s_0+\varepsilon,\overline{s}]$, 问题 (1.7) 至少存在两个正解.

定理3.1的证明 应用引理 3.1, 可证得定理 3.1 的(i);

下证当 $s=s_0$ 时, 问题 (1.7) 至少有一个正解. 取 $\omega<s_0<\sigma$, 设 $\{s_n\}$ 是区间 (s_0,σ) 上单调递减且趋于 s_0 的数列. 对任意的正整数 n, 至少存在一个正 T-周期解 u_{s_n}, 使得

$$\triangle^2u_{s_n}(t-1)+f(u_{s_n}(t))\triangle u_{s_n}(t)+\varphi(t)u_{s_n}^m(t)+\frac{r(t)}{u_{s_n}^\mu(t)}=s_n,$$

显然, $\|\triangle u_{s_n}\|_\infty\leq 1$. 令 $n\to\infty$, 根据 Arzela-Ascoli 定理, 问题 (1.7) 在 $s=s_0$ 处至少有一个正解. 即定理 3.1 的(ii)满足;

通过引理 3.4, 定理 3.1 的 (iii) 很显然成立.

4. 总结与展望

本文的创新性在于讨论了 $g(t,u)$ 有奇性时, 二阶离散周期边值问题的 A.P. 结果, 得到了如下结论: 在假设条件

(A_1) $\varphi_{\min}<0,\ 0<W<\left(\frac{r_{\min}}{|\varphi_{\min}|}\right)^{\frac{1}{m+\mu}}$;

(A_2) $\overline{\varphi}>0$ 且 $\gamma_1>\frac{T}{2}\|\varphi\|_\infty+2$, 其中 γ_1 在引理 2.3 的(H_1)中已定义;

(A_3) $\varphi_{\min}=0$ 且 $0<\overline{\varphi}<\frac{2\gamma_1}{T}$

下, 存在一个常数 $s_0\in(0,+\infty)$, 使得问题 (1.7) 分别在 $s<s_0$, $s=s_0$ 或 $s>s_0$ 时, 没有正解、 至少有一个正解或至少有两个正解. 本文的局限性在于对 f 和 $\frac{f(u)}{u^m}$ 的限制, 这里 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, 且 $\frac{f(u)}{u^m}$ 单调递减, 缩小了讨论范围. 在此基础上, 今后的研究方向是讨论当 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 时问题 (1.7) 的 A.P. 结果.

例1 考虑下列周期边值问题

$$\begin{cases} \triangle^2 u(t-1) + 8u\triangle u(t) + \frac{1}{8}\cos t u^{\frac{1}{2}}(t) + \frac{t}{u^{\frac{1}{2}}(t)} = s, & t \in [1,7]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = u(7), \triangle u(0) = \triangle u(7) \end{cases}$$

其中$T = 7, f(u) = 8u, \varphi(t) = \frac{1}{8}\cos t, r(t) = t, m = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$.
满足条件(A_1), 即$\varphi_{\min} = -\frac{1}{8}\cos 3 = 0.12375 < 0, 0 < W < (\frac{r_{\min}}{|\varphi_{\min}|})^{\frac{1}{m+\mu}} = (\frac{1}{|-\frac{1}{8}\cos 3|})^{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = 8.08087$.
满足条件(A_2), 即 $\overline{\varphi} = \frac{1}{7}\sum_{t=1}^{7}\frac{1}{8}\cos 3 = 0.00854 > 0, \gamma_1 > \frac{7}{2}\cos 6 + 2 = 5.36060$.

例2 考虑下列周期边值问题

$$\begin{cases} \triangle^2 u(t-1) + 5u\triangle u(t) + |\cos\frac{\pi}{4}t| u^{\frac{1}{2}}(t) + \frac{t}{u^2(t)} = s, & t \in [1,4]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = u(4), \triangle u(0) = \triangle u(4) \end{cases}$$

其中$T = 4, f(u) = 5u, \varphi(t) = |\cos\frac{\pi}{4}t|, r(t) = t, m = \frac{1}{2}, \mu = 2$.
满足条件(A_3). $\varphi_{\min} = |\cos\frac{\pi}{4}\cdot 2| = 0$.
由于$\gamma_1 > \frac{T}{2}\|\varphi\|_\infty + 2$, 故$\frac{2\gamma_1}{T} = \frac{2\gamma_1}{4} > \frac{1}{2}\cdot(2\|\varphi\|_\infty + 2) = \|\varphi\|_\infty + 1 = 2$, 而$\overline{\varphi} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varphi(t) = \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{4}|\cos\frac{\pi}{4}t| = \frac{1+\sqrt{2}}{4} < 2$, 从而满足$0 < \overline{\varphi} < \frac{2\gamma_1}{T}$.

基金项目

国家自然科学基金青年基金(No12361040)，西北师范大学青年教师科研能力提升计划一般项目(NWNU-LKQN2020-20)。

参考文献

[1] Kelley, W.G. and Peterson, A.C. (2001) Difference Equations. An Introduction with Applications. Academic Press, San Diego, CA.

[2] 马如云, 高承华, 马慧莉, 等. 差分方程理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2019.

[3] Ma, R.Y., Lu, Y.Q. and Chen, T.L. (2012) Existence of One-Signed Solutions of Discrete Second-Order Periodic Boundary Value Problems. *Abstract and Applied Analysis*, **2012**, Article ID: 437912. https://doi.org/10.1155/2012/437912

[4] He, T.S., Zhou, Y.W., Xu, Y.T. and Chen, C.Y. (2015) Sign-Changing Solutions for Discrete Second-Order Periodic Boundary Value Problems. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **38**, 181-195. https://doi.org/10.1007/s40840-014-0012-1

[5] Bereanu, C. and Mawhin, J. (2006) Existence and Multiplicity Results for Periodic Solutions of Nonlinear Difference Questions. *Journal of Difference Equations and Applications*, **12**, 677-695. https://doi.org/10.1080/10236190600654689

[6] 王瑞, 路艳琼, 杨晓梅. 二阶离散周期边值问题的Ambrosetti-Prodi结果[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2021(6): 47-57.

[7] Ambrosetti, A. and Prodi, G. (1972) On the Inversion of Some Differentiable Mappings with Singularities between Banach Spaces. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **93**, 231-246. https://doi.org/10.1007/BF02412022

[8] Feltrin, G., Elisa, S. and Zanolin, F. (2019) Periodic Solutions to Parameter-Dependent Equations with a $_\phi$-Laplacian Type Operator. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **26**, Article No. 38. https://doi.org/10.1007/s00030-019-0585-3

[9] Lu, Y.Q. and Ma, R.Y. (2014) Existence and Multiplicity of Solutions of Second-Order Discrete Neumann Problem with Singular ϕ-Laplacian Operator. *Advances in Continuous and Discrete Models*, **2014**, Article No. 227. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-227

[10] Chen, T.L., Ma, R.Y. and Liang, Y.W. (2019) Multiple Positive Solutions of Second-Order Nonlinear Difference Equations with Discrete Singular ϕ-Laplacian. *Journal of Difference Equations Applications*, **25**, 38-55. https://doi.org/10.1080/10236198.2018.1554064

[11] Chen, Z.B., Kong, C. and Xia, C.Y. (2022) Multiple Positive Periodic Solutions to Minkowski-Curvature Equations with a Singularity of Attractive Type. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, **21**, Article No. 146. https://doi.org/10.1007/s12346-022-00680-0

[12] Bereanu, C. and Mawin, J. (2007) Existence and Multiplicity Results for Some Nonlinear Problems with Singular ϕ-Laplacian. *Journal of Differential Equations*, **243**, 536-557. https://doi.org/10.1016/j.jde.2007.05.014

[13] Guo, D.J. (1985) Nonlinear Functional Analysis. Shandong Science and Technology Press, Jinan.