Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(1), 244-254
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.131027

Hans汉斯

算子代数上保持ξ-Lie积的c-数值域的映射

田　茹，张艳芳*

太原理工大学数学学院，山西 太原

收稿日期：2023年12月19日；录用日期：2024年1月13日；发布日期：2024年1月22日

摘　要

令$B(H)$是复Hilbert空间H上有界线性算子全体组成的代数，对于$c=(c_1,\cdots,c_k)\in\mathbb{R}^k$，$W_c(A)$表示算子$A\in B(H)$的c-数值域。本文主要研究了在$H$是有限维的情形下，$B(H)$上一类映射保持算子$\xi$-Lie积的数值域的刻画。具体说来，若$\dim H=n<\infty$且$c$满足一定条件时，若$\phi:B(H)\to B(H)$是满射，满足$W_c(AB-\xi BA)=W_c(\phi(A)\phi(B)-\xi\phi(A)\phi(B))$ ($\xi\in\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$)对任意的$A,B\in B(H)$成立，当且仅当存在$H$上的酉算子$U$以及常数$\eta\in\{-1,1\}$使得$\phi(T)=\eta UTU^*$对所有$T\in B(H)$成立。

关键词

c-数值域，ξ-Lie积，保持问题

Maps Preserving the c-Numerical Range of ξ-Lie Product on Operator Algebras

Ru Tian, Yanfang Zhang*

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Dec. 19th, 2023; accepted: Jan. 13th, 2024; published: Jan. 22nd, 2024

Abstract

Let $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on an complex Hilbert space H. For $c=(c_1,\cdots,c_k)\in\mathbb{R}^k$, $W_c(A)$ denotes the c-numerical range of an operator A in $B(H)$. In this paper, we consider maps on $B(H)$ prserving the c-numerical range of ξ-Lie Product. When the dimen-

*通讯作者。

文章引用: 田茹, 张艳芳. 算子代数上保持 ξ-Lie 积的 c-数值域的映射[J]. 应用数学进展, 2024, 13(1): 244-254.
DOI: 10.12677/aam.2024.131027

sion of H is finite and $c=(c_1,\cdots,c_k)\in\mathbb{R}^k$ belongs to a certain kind, it is shown that $\phi: B(H)\to B(H)$ is surjective maps satisfying $\mathrm{W}_c(AB-\xi BA)=\mathrm{W}_c(\phi(A)\phi(B)-\xi\phi(A)\phi(B))$ for any $A,B\in B(H)$, $\xi\in\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$ if and only if there exist a unitary operator U on H such that $\phi(T)=\eta UTU^*$ holds for all $T\in B(H)$, where $\eta\in\{-1,1\}$ is a scalar.

Keywords

c-Numerical Range, ξ-Lie Product, Preserving Problems

1. 引言

令 $B(H)$ 是复 Hilbert 空间 H 上有界线性算子全体组成的代数，$c=(c_1,\cdots,c_k)\in\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$ 且 c_i 不全相等，其中 k 是正整数且不大于 H 的维数，算子 $A\in B(H)$ 的 c-数值域和 c-数值半径分别定义为

$$\mathrm{W}_c(A)=\left\{\sum_{i=1}^{k}c_i\langle Ax_i,x_i\rangle : x_1,\cdots,x_k \text{ 是}H\text{的一组正交单位向量}\right\}$$

和

$$\mathrm{w}_c(A)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\mathrm{W}_c(A)\}。$$

特别地，当 $k=1$ 且 $c=1$ 时，就得到算子 A 的数值域 $\mathrm{W}(A)$ 和数值半径 $\mathrm{w}(A)$；当 $(c_1,\cdots,c_k)=(1,\cdots,1)$ 时，$\mathrm{W}_c(A)$ 和 $\mathrm{w}_c(A)$ 分别表示 A 的 k-数值域 $\mathrm{W}_k(A)$ 和 k-数值半径 $\mathrm{w}_k(A)$。不难看到，将 c 的所有分量按照降序排列后并不改变算子的 c-数值域和 c-数值半径，因此在本文中总假设 $c_1\ge\cdots\ge c_k$。算子代数上映射结构的研究是算子理论，算子代数方向的主要研究课题之一，对刻画算子代数的刚性结构具有重要意义。其中一个方面就是对算子代数上保持某些不变量的映射刻画和分类问题的研究，这类问题称为算子代数上的保持问题。算子的数值域起源于对二次型的研究，与算子的谱有密切关系，并在算子结构，工程技术等方面都有应用。有关数值域及其保持问题的研究已经有了丰富的成果[1]-[7]。后来，算子的数值域有多种推广，如 c-数值域，k-数值域，高维数值域，联合数值域等。其中，c-数值域由 R. Westwick 引入，并且他证明算子的 c-数值域是凸集，至此开始了对于 c-数值域的研究。近年来，算子代数上保持各种乘积 c-数值域映射问题的研究受到了国内外许多学者的关注见文献[8]-[11]。记 $\boldsymbol{A}=B(H)$ 或者 $B_s(H)$ (复希尔伯特空间 H 上所有有界自伴算子组成的 Jordan 代数)，映射 $\phi:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$ 满足

$$\mathrm{W}_c(A\circ B)=\mathrm{W}_c(\phi(A)\circ\phi(B))\ \ (\text{或 } \mathrm{w}_c(A\circ B)=\mathrm{w}_c(\phi(A)\circ\phi(B)))\ (A,B\in\boldsymbol{A})$$

其中 $\circ$ 代表算子的某种乘积关系，若对任意的 $A,B\in\boldsymbol{A}$，(如普通的乘积 $A\circ B=AB$，Jordan 乘积 $A\circ B=AB+BA$，Jordan 半三重积 $A\circ B=ABA$，Lie 积 $A\circ B=AB-BA$，斜 Lie 积 $A\circ B=AB-BA^*$ 等)，则称映射 $\phi:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$ 保持算子 $\circ$ 乘积的 c-数值域(或 c-数值半径)。文献[12]刻画了算子代数上保持算子乘积的 c-数值域的满射，并且刻画了 $B_s(H)$ 上保持算子乘积 $A\circ B=AB$ c-数值半径的满射和对于某一类特殊的 c 在 $B_s(H)$ 上保持算子乘积 $A\circ B=AB$ c-数值域的满射。在[13]中，$B(H)$ 和 $B_s(H)$ 上保持 Jordan 乘积的数值域的映射分别得到了刻画。文献[14]研究了 $B(H)$ 上保持 Jordan 乘积的 c-数值域的映射。文献[15]

得到了保持 Lie 积数值域的映射形式。显然，对于复数ξ，当$\xi=1$和-1 时，算子A,B的ξ-Lie 积分别表示 Lie 积和 Jordan 积，所以我们关注$\xi\in\mathbb{C}/\{1,-1\}$时，算子代数上保持$\xi$-Lie 积的 c-数值域的映射。其中对于$(c_1,\cdots,c_k)=(1,\cdots,1)$即为 k-数值域时，文献[16] [17]给出了在$B(H)$上保持ξ-Lie 积的 k-数值域的映射刻画。

本文的主要目的是研究在H是有限维的情形下，算子代数上保持ξ-Lie 积的 c-数值域的满射的形式，即刻画了$A,B\in B(H)$满足$\mathrm{W}_c\left([A,B]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left([\phi(A),\phi(B)]_\xi\right)$的满射$\phi$的形式。本文的主要结构如下：第二部分给出复 Hilbert 空间上的有界线性算子 c-数值域的相关性质，在第三部分中给出了H是有限维的情形下，$B(H)$上一类映射保持算子ξ-Lie 积的数值域的刻画及其证明。

最后介绍本文中出现的符号含义和陈述假设。用$\mathbb{R}$和$\mathbb{C}$分别表示实数域和复数域，如果$\dim H=n<\infty$时，我们就约定$B(H)$为$M_n(\mathbb{C})$，其中$M_n(\mathbb{C})$是n阶复矩阵全体组成的集合。在H是有限维的情形时，我们可以总假设$k=n$。因为若$k<n$，可以给c补充$n-k$个分量 0，并将补充分量之后的向量c记为c'，显然$c'\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，且对于$M_n(\mathbb{C})$中的矩阵$A$，$\mathrm{W}_c(A)=\mathrm{W}_{c'}(A)$。对于$B(H)$中的算子$A$，记号$\operatorname{Re}A,\operatorname{Im}A$分别表示$A$的实部$\dfrac{A+A^*}{2}$和$A$的虚部$\dfrac{A-A^*}{2i}$。假设$M$是$H$的子集，$A|_M$表示算子$A$在$M$上的限制；$[M]$表示由$M$张成的子空间；$M^\perp$表示$M$在$H$中的正交补空间；对任意集合$M$，$\overline{M}$，$\mathrm{conv}M$分别表示$M$的闭包以及凸包。此外，若$A$是有限秩，则$\mathrm{tr}A$表示$A$的迹。

2. 算子 c-数值域的性质

本节给出复 Hilbert 空间上的有界线性算子 c-数值域的相关性质。

命题 2.1 [6]对于$B(H)$中的有界线性算子A，有

1) 对于任意酉算子$U\in B(H)$，有$\mathrm{W}_c\left(UAU^*\right)=\mathrm{W}_c(A)$；
2) 对于任意$\lambda\in\mathbb{C}$，有$\mathrm{W}_c(\lambda A)=\lambda\mathrm{W}_c(A)$；
3) 对于任意$\lambda\in\mathbb{C}$，有$\mathrm{W}_c(\lambda I+A)=\lambda\sum_{i=1}^k c_i+\mathrm{W}_c(A)$；
4) 假设c_i不全相等，则$\mathrm{W}_c(A)$是一个实数当且仅当A是恒等映射的常数倍；
5) 假设c_i不全相等，则$\mathrm{W}_c(A)$是一个实数当且仅当A是自伴算子；
6) 假设c_i不全相等，当$\sum_{i=1}^k c_i\neq 0$时，$\mathrm{w}_c(A)$是一个范数。当$\sum_{i=1}^k c_i=0$时，$\mathrm{w}_c(A)$是一个半范数。
7) $\mathrm{W}_c\left(\dfrac{A+A^*}{2}\right)=\operatorname{Re}\left(\mathrm{W}_c(A)\right)\equiv\left\{\operatorname{Re}z:z\in\mathrm{W}_c(A)\right\}$，$\mathrm{W}_c\left(\dfrac{A-A^*}{2i}\right)=\operatorname{Im}\left(\mathrm{W}_c(A)\right)\equiv\left\{\operatorname{Im}z:z\in\mathrm{W}_c(A)\right\}$；
8) [18] $\mathrm{W}_c(A)$是一个凸集。

命题 2.2 [19]设A是$B(H)$上的一个自伴算子，则

1) 如果$\dim H=k$，有$\mathrm{W}_c(A)=\left[\sum_{j=1}^k c_j\lambda_{k+1-j}(A),\sum_{j=1}^k c_j\lambda_j(A)\right]$。
2) 如果H是无限维复 Hilbert 空间，有

$$cl\left(\mathrm{W}_c(A)\right)=\left[m_c(A),M_c(A)\right]。$$

这里$m_c(A)=\inf\left\{\sum_{j=1}^l c_j\lambda_j(-A)+\sum_{j=1}^{k-l}c_{k-j+1}\lambda_j(A):0\le l\le k\right\}$，
$M_c(A)=\sup\left\{\sum_{j=1}^l c_j\lambda_j(A)-\sum_{j=1}^{k-l}c_{k-j+1}\lambda_j(-A):0\le l\le k\right\}$。

命题 2.3 若A是$B(H)$上的秩一算子，则$\mathrm{W}_c(A)$是一个焦点为$\bar{c}_1\mathrm{tr}(A)$和$\tilde{c}_k\mathrm{tr}(A)$，短轴为$(\bar{c}_1-\tilde{c}_k)\sqrt{\|A\|^2-|\mathrm{tr}(A)|^2}$的椭圆盘或者是线段$\left[\tilde{c}_k\mathrm{tr}(A),\bar{c}_1\mathrm{tr}(A)\right]$。其中

$$\bar{c}_j=\begin{cases}c_j, & 若\dim H=k\\ \max\{c_j,0\}, & 若\dim H>k\end{cases},\quad \tilde{c}_j=\begin{cases}c_j, & 若\dim H=k\\ \min\{c_j,0\}, & 若\dim H>k\end{cases},$$

当 $j=1,\cdots,k$ 。

下面介绍二次算子的概念。称 A 是 $B(H)$ 上的二次算子，若存在 $a,b\in\mathbb{C}$ 使得 $(A-aI)(A-bI)=0$ 成立。由文献[19]，复 Hilbert 空间 H 上存在空间分解 $H_1\oplus H_1\oplus H_2$ 使得二次算子 A 有如下形式

$$\begin{pmatrix}aI_r & P\\ 0 & bI_r\end{pmatrix}\oplus\gamma I_s, \tag{1}$$

这里 $\gamma\in\{a,b\}$， $\dim H_1=r$， $\dim H_2=s$， $P:H_1\to H_1$ 是一个半正定算子，即等价于 $\langle Px,x\rangle\geq 0$ 对于所有 $x\in H_1$ 成立。在这个空间分解形式下，如果 $a=b$，则对于 H_1 上所有的非零向量 x 都有 $\langle Px,x\rangle\neq 0$ 。由于二次算子 c-数值域描述的需要，首先给出记号 p 的形式，若 $\dim H=\infty$，则可以通过对 c 的分量补充 0 使得 c 成为 $c'\in\mathbb{R}^{k'}$，而且 c' 的第 $p+1$ 个分量 $c'_{p+1}=0$ 且 $k'=2p$ 。若 $\dim H<\infty$，即 $\dim H=k$，令 p 满足 $k\in\{2p,2p+1\}$，记 $\hat{c}=c-c_{p+1}(1,\cdots,1)$，则 $\hat{c}$ 的第 $p+1$ 个分量 $\hat{c}_{p+1}=0$ 且对于二次算子 A 来说，$\mathrm{W}_c(A)=\mathrm{W}_{\hat{c}}(A)+c_{p+1}\mathrm{tr}A$，从而通过平移 $\mathrm{W}_{\hat{c}}(A)$ 可以得到 $\mathrm{W}_c(A)$ 。综上，可以假设 c 的分量 $c_1,\cdots,c_k$ 满足

$$c_{p+1}=0，其中 \dim H=\infty>k=2p 或 \dim H=k\in\{2p,2p+1\}, \tag{2}$$

对于自伴算子 $P\in B(H)$，记

$$\lambda_m(P)=\begin{cases}\sup\{\lambda_m(X^*PX):X^*X=I_m\}, & 若\dim H=\infty\\ P 的特征值降序排列后的第 m 个特征值, & 若\dim H=n\end{cases}。$$

如下结论是关于二次算子的 c-数值域。

命题 2.4 [19]令 $A\in B(H)$ 是二次算子且有如(1)的算子矩阵的形式，假设 $c\in\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$ 满足(2)，记 $t=\min\{p,r\}$，

$$B_j=(c_j-c_{k-j+1})\begin{pmatrix}a & \lambda_j(P)\\ 0 & b\end{pmatrix}+c_{k-j+1}(a+b)I_2,$$

$j=1,\cdots,t$，则 $\mathrm{W}_c(A)=\varepsilon$ 或者 $\mathrm{int}(\varepsilon)$，

$$\varepsilon=\mathrm{W}(B_1)+\cdots+\mathrm{W}(B_t)+\gamma\sum_{j=t+1}^{k-t}c_j,$$

其中等式 $\mathrm{W}_c(A)=\varepsilon$ 成立的充分必要条件是 $P:H_1\to H_1$ 有一个对角形式 $\mathrm{diag}(\lambda_1(P),\cdots,\lambda_t(P))$ 。

命题 2.5 [19]对于二阶复矩阵 $C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$，它的特征值为 λ_1,λ_2，那么

1) $\mathrm{W}(C)$ 是一个焦点为特征值 λ_1,λ_2，短轴为 $\left(\sum_{i,j=1,2}|c_{ij}|^2-|\lambda_1|^2-|\lambda_2|^2\right)$ 的椭圆。

2) 当 $c=(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 时，则 $\mathrm{W}_c(A)=(c_1-c_2)\mathrm{W}(A)+c_2\mathrm{tr}A=\mathrm{W}((c_1-c_2)A+(c_2\mathrm{tr}A)I_2)$ 是一个焦点为 $c_1\lambda_1+c_2\lambda_2$ 和 $c_1\lambda_2+c_2\lambda_1$，短轴长为 $\left|(c_1-c_2)\left(\sum_{i,j=1,2}|c_{ij}|^2-|\lambda_1|^2-|\lambda_2|^2\right)\right|$ 的椭圆盘。

下列命题来自文献[20]，它对于定理的证明起着重要作用。

命题 2.6 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 且酉相似于 $A_1\oplus A_2$，则

$$\mathrm{W}_c(A)=\mathrm{conv}\bigcup\left\{\mathrm{W}_{c_1}(A_1)+\mathrm{W}_{c_2}(A_2):(c_1^t,c_2^t)=c^tP, P 是一个置换矩阵\right\}。$$

引理 2.7 设 $A\in B(H)$，$c=(c_1,\cdots,c_k)\in\mathbb{R}^k$ 满足 $c_1+c_k\neq 0$，则 $\mathrm{W}_c([A,x\otimes x]_\xi)$ 的水平和垂直支撑线形

成的矩形中心是$\dfrac{\overline{c}_1+\tilde{c}_k}{2}(1-\xi)\langle Ax,x\rangle$。

证明：取 H 中的单位向量 x，即 $\|x\|=1$，令 $T=[A,x\otimes x]_\xi=Ax\otimes x-\xi x\otimes A^*x$。

如果 $\dim H=2$，此时设 T 的两个特征值为 λ_1,λ_2，则 $\mathrm{W}_c(T)$ 是以 $\dfrac{(c_1+c_2)(\lambda_1+\lambda_2)}{2}$ 为中心的椭圆，因此 $\mathrm{W}_c(T)$ 的中心是 $\dfrac{c_1+c_2}{2}(1-\xi)\langle Ax,x\rangle$。

如果 $\dim H>2$，令 $Ax=\alpha x+\beta y$，$A^*x=\overline{\alpha}x+\gamma y+\mu z$，$x,y,z$ 是两两正交的单位向量，$\alpha,\beta,\gamma,\mu\in\mathbb{C}$，则在空间分解 $H=[x,y,z]\oplus[x,y,z]^\perp$ 下，有

$$T=\begin{pmatrix}(1-\xi)\alpha & -\xi\overline{\gamma} & -\xi\overline{\mu}\\ \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\oplus 0,$$

因此，

$$\mathrm{Re}\,T=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}T+\mathrm{e}^{-i\theta}T^*}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}(1-\xi)\alpha\right) & -\mathrm{e}^{i\theta}\xi\overline{\gamma}+\mathrm{e}^{-i\theta}\overline{\beta} & -\mathrm{e}^{i\theta}\xi\overline{\mu}\\ \mathrm{e}^{i\theta}\beta-\mathrm{e}^{-i\theta}\overline{\xi}\gamma & 0 & 0\\ -\mathrm{e}^{-i\theta}\overline{\xi}\mu & 0 & 0\end{pmatrix}\oplus 0。$$

就有 $\sigma(\mathrm{Re}\,T)=\{\lambda_+,\lambda_-,0\}$，其中

$\lambda_\pm=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}(1-\xi)\alpha\right)\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}(1-\xi)\alpha\right)\right)^2+\left|\mathrm{e}^{i\theta}\beta-\mathrm{e}^{-i\theta}\overline{\xi}\gamma\right|^2+\left|\mathrm{e}^{i\theta}\xi\overline{\mu}\right|^2}$。则

$\mathrm{W}_c(\mathrm{Re}\,T)=[\tilde{c}_k\lambda_++\overline{c}_1\lambda_-,\overline{c}_1\lambda_++\tilde{c}_k\lambda_-]$，会有 $\mathrm{W}_c(\mathrm{Re}\,T)$ 的中心是 $\dfrac{1}{2}(\overline{c}_1+\tilde{c}_k)\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}(1-\xi)\alpha\right)$。同理，也有 $\mathrm{W}_c(\mathrm{Im}\,T)$ 的中心是 $\dfrac{1}{2}(\overline{c}_1+\tilde{c}_k)\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i\theta}(1-\xi)\alpha\right)$。由命题 2.1(7)，我们可以得到 $\mathrm{W}_c\left([A,x\otimes x]_\xi\right)$ 的中心是 $\dfrac{\overline{c}_1+\tilde{c}_k}{2}(1-\xi)\langle Ax,x\rangle$。

引理 2.8 令 $M_2(\mathbb{C})$ 表示二阶复矩阵全体，$c=(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 且 $|c_1|\neq|c_2|$，则存在矩阵 $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ 使得 $\mathrm{W}_c\left([A,B]_\xi\right)\neq\mathrm{W}_c\left([B,A]_\xi\right)$。

证明：反证法。假设对于任意 $A,B\in M_2(\mathbb{C})$，$\mathrm{W}_c\left([A,B]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left([B,A]_\xi\right)$ 均成立。取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$，则

$$[A,B]_\xi=\begin{pmatrix}3-2\xi & 1-2\xi\\ 1-\xi & 1-2\xi\end{pmatrix},\quad [B,A]_\xi=\begin{pmatrix}2-3\xi & 2-\xi\\ 1-\xi & 2-\xi\end{pmatrix}。$$

由假设知 $\mathrm{W}_c\left([A,B]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left([B,A]_\xi\right)$ 和命题 2.4 知二者的短轴长相等，故

$$|3-2\xi|^2+2|1-2\xi|^2+|1-\xi|^2=|2-3\xi|^2+2|2-\xi|^2+|1-\xi|^2,$$

该式蕴涵 $|\xi|=1$。

另一方面，取 $A'=\begin{pmatrix}i&1\\0&1\end{pmatrix}$，由于

$$[A,B]_\xi=\begin{pmatrix}2i+1-2i\xi & 1-2\xi\\ 1-i\xi & 1-2\xi\end{pmatrix},\quad [B,A]_\xi=\begin{pmatrix}2i-(2i+1)\xi & 2-\xi\\ i-\xi & 2-\xi\end{pmatrix},$$

利用假设 $\mathrm{W}_c([A',B]_\xi)=\mathrm{W}_c([B,A']_\xi)$，同理可得

$$|2i+1-2i\xi|^2+2|1-2\xi|^2+|1-i\xi|^2=|2i-(2i+1)\xi|^2+2|2-\xi|^2+|i-\xi|^2,$$

该式结合事实 $|\xi|=1$，即蕴涵 $\xi\in\mathbb{R}$，进而得到 $\xi\in\{-1,1\}$，这与命题假设矛盾。因此定存在 $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ 使得 $\mathrm{W}_c([A,B]_\xi)\neq\mathrm{W}_c([B,A]_\xi)$。

3. 保持 ξ-Lie 积的 c-数值域的映射刻画

下面给出本文主要定理。

定理 若 $c=(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 满足 $c_1+c_n\neq0$，非零分量 c_i 全不相等且 $\sum_{i=1}^n c_i\neq0$，假设 $\phi:M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$ 是满射，则 ϕ 保持算子 ξ-Lie 积的 c-数值域，即满足

$$\mathrm{W}_c([A,B]_\xi)=\mathrm{W}_c([\phi(A),\phi(B)]_\xi),\quad (A,B\in M_n(\mathbb{C}))$$

的充分必要条件是存在酉矩阵 $U\in M_n(\mathbb{C})$ 以及常数 $\eta\in\{-1,1\}$ 使得 $\phi(T)=\eta UTU^*$ 对所有 $T\in M_n(\mathbb{C})$ 成立。可以看到，当 $c=(1,0,\cdots,0)$ 时，可以得到保持算子 ξ-Lie 积的数值域的形式，有以下结论。

推论 若 $\phi:M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$ 是满射，则 ϕ 保持算子 ξ-Lie 积的数值域，即满足

$$\mathrm{W}(AB-\xi BA)=\mathrm{W}(\phi(A)\phi(B)-\xi\phi(B)\phi(A)),\quad (A,B\in M_n(\mathbb{C}))$$

的充分必要条件是存在酉算子 $U\in M_n(\mathbb{C})$ 以及常数 $\eta\in\{-1,1\}$ 使得 $\phi(T)=\eta UTU^*$ 对所有 $T\in M_n(\mathbb{C})$ 成立。

下面给出定理的证明。

证明： 显然充分性成立，我们仅需要证明必要性，我们由以下 4 个断言完成必要性的证明。假设 $\phi:M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$ 是满射满足 $\mathrm{W}_c([A,B]_\xi)=\mathrm{W}_c([\phi(A),\phi(B)]_\xi)$ 对于任意 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ 成立。

断言 1 ϕ 是单射。

若 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $\phi(A)=\phi(B)$，则有

$$\mathrm{W}_c([A,x\otimes x]_\xi)=\mathrm{W}_c([\phi(A),\phi(x\otimes x)]_\xi)=\mathrm{W}_c([\phi(B),\phi(x\otimes x)]_\xi)=\mathrm{W}_c([B,x\otimes x]_\xi),$$

对于任意向量 $x\in\mathbb{C}^n$ 成立。

由命题 2.1(7)和引理 2.7，有 $\frac{c_1+c_n}{2}(1-\xi)\langle Ax,x\rangle=\frac{c_1+c_n}{2}(1-\xi)\langle Bx,x\rangle$，因此，可以得到 $\langle Ax,x\rangle=\langle Bx,x\rangle$ 成立对于所有 $x\in\mathbb{C}^n$，那么得 $A=B$。

断言 2 存在空间分解 $M_n(\mathbb{C})=E+F$ 使得 $\phi(I)=I_2+(-I_3)$。

由定义，我们有

$$(1-\xi)\sum_{i=1}^n c_i=\mathrm{W}_c([I,I]_\xi)=\mathrm{W}_c([\phi(I),\phi(I)]_\xi)=(1-\xi)\mathrm{W}_c(\phi(I)^2),$$

由于 $\sum_{i=1}^n c_i\neq0$，可以得到 $\phi(I)^2=I$。由[16]定理 1.1，存在空间分解 $M_n(\mathbb{C})=(N\oplus N)\oplus E\oplus F$ 使得 $\phi(I)=\begin{pmatrix}I_1 & R\\ 0 & -I_1\end{pmatrix}\oplus I_2\oplus(-I_3)$，其中 $R:N\to N,\langle Rx,x\rangle>0$ 对于任意向量 $x\in N$ 成立。

如果 $\dim N\geq2$，令 $Rx_1=ax_1+bx_2$，其中 x_1,x_2 是 N 中相互正交的单位向量，则 $a>0,b\geq0$。如果 $N=[x_1,x_2]\oplus[N\setminus[x_1,x_2]]$，则在空间分解 $M_n(\mathbb{C})=[x_1,x_2]\oplus[x_1,x_2]\oplus[x_1,x_2]^\perp\oplus[x_1,x_2]^\perp\oplus E\oplus F$ 下，有

$$\phi(I)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & * & 0 & * \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & -I_1' & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_1' \end{pmatrix}\oplus I_2\oplus(-I_3),$$

其中 $I_1'=I_1|_{N\setminus[x_1,x_2]}$。令 $Y=\begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\oplus 0\oplus 0$，其中 $Y_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$b_1,b_2\in\mathbb{C}$。由于 ϕ 是满射，则存在 $X\in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\phi(X)=Y$，因此

$$\mathrm{W}_c(A)=\mathrm{W}_c\left(\left[\phi(I),Y\right]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left(\left[I,X\right]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left(\left[X,I\right]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left(\left[Y,\phi(I)_\xi\right]\right)=\mathrm{W}_c(B),\tag{3}$$

通过计算可得

$$A=\left[\phi(I),Y\right]_\xi=\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\oplus 0\oplus 0, T_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-\xi)b_1 & 0 & (1+\xi)b_2-\xi ab_1 & -\xi bb_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B=\left[Y,\phi(I)\right]_\xi=\begin{pmatrix} T_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\oplus 0\oplus 0, T_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-\xi)b_1 & 0 & ab_1-(1+\xi)b_2 & bb_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

显然 T_1 和 T_2 都是秩一矩阵。由命题 2.3 和等式(3)可知 $\mathrm{W}_c(A)$ 是一个中心为原点，短轴长为 $\frac{(c_1-c_n)\|A\|}{2}$ 的椭圆，同理 $\mathrm{W}_c(B)$ 也是一个中心为原点，短轴长为 $\frac{(c_1-c_n)\|B\|}{2}$ 的椭圆，所以

$$\|A\|=\|B\|。$$

即

$$\sqrt{\left|(1-\xi)b_1\right|^2+\left|(1+\xi)b_2-\xi ab_1\right|^2+\left|\xi bb_1\right|^2}=\sqrt{\left|(1-\xi)b_1\right|^2+\left|ab_1-(1+\xi)b_2\right|^2+\left|bb_1\right|^2},$$

意味着有

$$\left|(1+\xi)b_2-\xi ab_1\right|^2+\left|\xi bb_1\right|^2=\left|ab_1-(1+\xi)b_2\right|^2+\left|bb_1\right|^2$$

成立对于任意 $b_1,b_2\in\mathbb{C}$。

由于 $\xi\neq-1$，令 $b_2=\frac{\xi ab_1}{1+\xi}, b_1\neq 0$，就有

$$|\xi b|^2=|1-\xi|^2|a|^2+|b|^2,\tag{4}$$

令 $b_2=\frac{ab_1}{1+\xi}, b_1\neq 0$，有

$$\left|1-\xi\right|^2\left|a\right|^2+\left|\xi b\right|^2=\left|b\right|^2, \tag{5}$$

合并等式(4)和等式(5)，我们有 $\left|1-\xi\right|^2\left|a\right|^2=0$，与 $a>0$ 和 $\xi\neq1$ 矛盾，因此 $\dim N\leq1$。

如果 $\dim N=1$，令 $\phi(I)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}\oplus I_2\oplus(-I_3), a>0$，取 $Y=\begin{pmatrix}b_1 & 0\\ b_3 & 0\end{pmatrix}\oplus0\oplus0\in M_n(\mathbb{C})$，由于 ϕ 是满射，存在 $X\in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\phi(X)=Y$ 和 $\mathrm{W}_c\left(\left[\phi(I),Y\right]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left(\left[Y,\phi(I)\right]_\xi\right)$，记

$$A=\left[\phi(I),Y\right]_\xi=\begin{pmatrix}(1-\xi)b_1+ab_3 & -\xi ab_1\\ -(1+\xi)b_3 & -\xi ab_3\end{pmatrix}\oplus0=S_1\oplus0,$$

和

$$B=\left[Y,\phi(I)\right]_\xi=\begin{pmatrix}(1-\xi)b_1-\xi ab_3 & ab_1\\ (1+\xi)b_3 & ab_3\end{pmatrix}\oplus0=S_2\oplus0。$$

注意到对于任意 $T\in M_n(\mathbb{C})$，若 $T=T_1\oplus0, T_1\in M_2(\mathbb{C})$，由命题 2.5 和命题 2.6 知，存在 $c^1\in\mathbb{R}^2$，$c^2\in\mathbb{R}^{n-2}$ 和置换矩阵 P 满足 $\left(c^1,c^2\right)^tP=c^tP$ 使得 $\mathrm{W}_c(T)=\mathrm{conv}\bigcup\left\{\mathrm{W}_{c^1}(T_1)+\mathrm{W}_{c^2}(0)\right\}=\mathrm{W}_{c^1}(T_1)$。应用该结论到矩阵 A,B 中，则存在 $c^{1A},c^{1B}\in\mathbb{R}^2$ 使得 $\mathrm{W}_c(A)=\mathrm{W}_{c^{1A}}(S_1), \mathrm{W}_c(B)=\mathrm{W}_{c^{1B}}(S_2)$，其中 $c^{1A}=\left(c_1^A,c_2^A\right)$ 和 $c^{1B}=\left(c_1^B,c_2^B\right)$ 的分量来自 c 的分量 $c_1,\cdots,c_n$。矩阵 S_1 和 S_2 的特征方程都为

$$\lambda^2-(1-\xi)(b_1+ab_3)\lambda-\xi ab_3(2b_1+ab_3)=0,$$

由命题 2.5 有，设 S_1 和 S_2 的特征值为 λ_1,λ_2，$\mathrm{W}_c(A)=\mathrm{W}_{c^{1A}}(S_1)$ 是以 $c_1^A\lambda_1+c_2^A\lambda_2$ 和 $c_1^A\lambda_2+c_2^A\lambda_1$ 为焦点的椭圆，$\mathrm{W}_c(B)=\mathrm{W}_{c^{1B}}(S_2)$ 是以 $c_1^B\lambda_1+c_2^B\lambda_2$ 和 $c_1^B\lambda_2+c_2^B\lambda_1$ 为焦点的椭圆。由于 $\mathrm{W}_c(A)=\mathrm{W}_c(B)$，我们可以得到 $c_1^A=c_1^B, c_2^A=c_2^B$，记作 c_1',c_2'。由命题 2.5，有下面等式

$$\left|(1-\xi)b_1+ab_3\right|^2+\left|\xi ab_1\right|^2+\left|(1+\xi)b_3\right|^2+\left|\xi ab_3\right|^2=\left|(1-\xi)b_1-\xi ab_3\right|^2+\left|ab_1\right|^2+\left|(1+\xi)b_3\right|^2+\left|ab_3\right|^2,$$

化简得

$$2\,\mathrm{Re}\left((1-\xi)ab_1\bar{b}_3\right)+a^2\left|\xi b_1\right|^2=-2\,\mathrm{Re}\left((1-\xi)\bar{\xi}ab_1\bar{b}_3\right)+a^2\left|b_1\right|^2,$$

其中 $b_1,b_3\in\mathbb{C}$。特别地，取 $b_1=\dfrac{1}{a}, b_3=1$，有 $|\xi|=1$；取 $b_1=\dfrac{1}{a}, b_3=\dfrac{1}{\xi}$，再结合 $|\xi|=1$，可得 $\xi=1$，矛盾。

因此 $\dim N=0$，进而存在空间分解 $M_n(\mathbb{C})=E+F$ 使得 $\phi(I)=I_2\oplus(-I_3)$。

断言 3 ϕ 双边保厄米特。

由断言 2，存在空间分解 $M_n(\mathbb{C})=E+F$ 使得 $\phi(I)=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_3\end{pmatrix}$，如果 $\dim E=0$ 或者 $\dim F=0$，则 $\phi(I)=\pm I$。取 X 是厄米特矩阵满足 $\phi(X)=Y$ 也是厄米特矩阵，因此

$$(1-\xi)\mathrm{W}_c(X)=\mathrm{W}_c\left(\left[X,I\right]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left(\left[Y,\pm I\right]_\xi\right)=\pm(1-\xi)\mathrm{W}_c(Y),$$

可以得到 $\mathrm{W}_c(X)=\pm\mathrm{W}_c(Y)$。由命题 2.1(5)知 Y 是厄米特矩阵，因此，ϕ 保持厄米特。由于 ϕ 是双射，所以 ϕ 双边保厄米特。

现在假设 $\dim E\geq1$ 且 $\dim F\geq1$，取 S 是厄米特矩阵满足 $\phi(S)=R=\begin{pmatrix}R_1 & R_2\\ R_3 & R_4\end{pmatrix}$，由

$\mathrm{W}_c\left(\left[S,I\right]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left(\left[R,\phi(I)\right]_\xi\right)$ 得

$$\mathrm{W}_c(S)=\mathrm{W}_c\begin{pmatrix} R_1 & -\frac{1+\xi}{1-\xi}R_2 \\ \frac{1+\xi}{1-\xi}R_3 & -R_4 \end{pmatrix},$$

由命题 2.1(5)，知 $\begin{pmatrix} R_1 & -\frac{1+\xi}{1-\xi}R_2 \\ \frac{1+\xi}{1-\xi}R_3 & -R_4 \end{pmatrix}$ 是厄米特矩阵，因此 $R_1=R_1^*, R_4=R_4^*, -\frac{1+\xi}{1-\xi}R_2=\frac{1+\overline{\xi}}{1-\overline{\xi}}R_3^*$。

另一方面，存在矩阵空间分解 $M_n(\mathbb{C})=[e_1,e_2]\oplus[e_1,e_2]^\perp$ 成立对于任意单位向量 $e_1\in E, e_2\in F$。在该分解下，$\phi(I)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\oplus T$，其中 $T^2=I|_{[e_1,e_2]^\perp}$。令 $Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\oplus T$，由于 ϕ 是满射，那么存在矩阵 X 使得 $\phi(X)=Y$，利用 $\mathrm{W}_c\left([X,X]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left([Y,Y]_\xi\right)$，可以得到 $\mathrm{W}_c\left(X^2\right)=\mathrm{W}_c\left(Y^2\right)=\left\{\sum_{i=1}^n c_i\right\}$。由于 $\sum_{i=1}^n c_i\neq 0$，有 $X^2=pI$，那么 X 就是二次算子，它的特征值为 $\frac{1}{p}$ 和 $-\frac{1}{p}$。沿用命题 2.4 的记号此时有 $a=\frac{1}{p}, b=-\frac{1}{p}$，由此得出对于任意 $j\in\{1,\cdots,t\}$，由命题 2.5 $\mathrm{W}_c(X)$ 是 t 个焦点为 $\left\{c_1'\frac{1}{p}\left(c_j-c_{n-j+1}\right)-c_2'\frac{1}{p}\left(c_j-c_{n-j+1}\right)\right\}$ 的椭圆盘以及单点集 $\left\{\sum_{j=t+1}^{n-t}c_j\right\}$ 的实数倍的和 $\left(j\in\{1,\cdots,t\}\right)$。

此外，利用 $\mathrm{W}_c\left([X,I]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left([Y,\phi(I)]_\xi\right)$，有

$$\mathrm{W}_c(X)=\mathrm{W}_c(T), \tag{6}$$

其中，$T=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+\xi}{1-\xi} \\ \frac{1+\xi}{1-\xi} & 0 \end{pmatrix}\oplus I|_{[e_1,e_2]^\perp}=T_1\oplus T_2, T_1\in M_2(\mathbb{C})$。

由命题 2.5 和命题 2.6，有 $\mathrm{W}_c(T)=\mathrm{W}_{c^1}(T_1)+\mathrm{W}_{c^2}(T_2)=\mathrm{W}_{c^1}(T_1)+\sum_{i=1}^{n-2}e_i$，其中 $c^1=(c_1',c_2')\in\mathbb{R}^2$，$c^2=(c_1'',\cdots,c_{n-2}'')\in\mathbb{R}^{n-2}$，$(c^1,c^2)=c^tP$，$P$ 是置换矩阵。易得 $\mathrm{W}_{c^1}(T_1)$ 是以 $\pm(c_1'-c_2')i\frac{1+\xi}{1-\xi}$ 为端点的线段。进而，利用命题 2.1(3)知，$\mathrm{W}_c(T)$ 也是包含端点为 $\pm\left(i\frac{1+\xi}{1-\xi}+\sum_{i=1}^{n-2}c_i''\right)$ 的线段。结合(6)得，$\mathrm{W}_c(X)$ 退化为实轴上的一条线段，从而使得 $\frac{1+\xi}{1-\xi}\in i\mathbb{R}$。再由 $-\frac{1+\xi}{1-\xi}R_2=\frac{1+\xi}{1-\xi}R_3^*$，我们可以得到 $R_2=R_3^*$，因而 ϕ 是双边保厄米特的。

断言 4 存在酉矩阵 $U\in M_n(\mathbb{C})$ 和常数 $\eta\in\{-1,1\}$ 使得 $\phi(A)=\eta UAU^*$ 对于任意 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 成立。

用 H_n 表示 n 阶厄米特矩阵全体组成的集合，由断言 3 可知，$\phi: H_n\to H_n$ 是满射且对于任意 $A,B\in H_n$ 有 $\mathrm{W}_c\left([A,B]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left([\phi(A),\phi(B)]_\xi\right)$ 成立，可得存在一个 n 阶酉矩阵或共轭酉矩阵 $U\in M_n(\mathbb{C})$ 和常数 $\eta\in\{-1,1\}$ 使得

$$\phi(A)=\eta UAU^* \tag{7}$$

对于任意 $A\in H_n$ 成立。其中共轭酉矩阵的情形只出现在 $\dim H=2$ 的情形。现取 $A\in M_n(\mathbb{C})$，若 U 是酉矩阵，由命题 2.1(1)可得，对于任意向量 $x\in\mathbb{C}^n$，都有

$$\mathrm{W}_c\left(\left[A, x\otimes x\right]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left(\left[\phi(A),\eta Ux\otimes xU^*\right]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left(\left[\eta U^*\phi(A)U, x\otimes x\right]_\xi\right)$$

成立。再由引理 2.7 和 $\xi\neq 1$，可以得到 $\langle Ax,x\rangle=\langle \eta U^*\phi(A)Ux,x\rangle$ 对于任意向量 $x\in\mathbb{C}^n$ 成立，意味着 $A=\eta U^*\phi(A)U$，因此 $\phi(A)=\eta UAU^*$ 对于任意 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 成立。

为了证明定理成立，仍需验证 U 是共轭酉矩阵的情形不发生。此时，$\dim H=2$。此外，对任意 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 及任意向量 $x\in\mathbb{C}^n$，再次利用命题 2.1(1)与等式(7)，得

$$\mathrm{W}_c\left(\left[A, x\otimes x\right]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left(\left[\phi(A),\eta Ux\otimes xU^*\right]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left(\left[x\otimes x,\eta U^*\phi(A)^*U\right]_\xi\right)。$$

注意到任意二阶矩阵 X 的数值域中心是 $\frac{c_1+c_2}{2}(1-\xi)\langle Ax,x\rangle$，计算上面等式两边的数值域中心，可得

$$\frac{c_1+c_2}{2}(1-\xi)\langle Ax,x\rangle=\frac{c_1+c_2}{2}(1-\xi)\left\langle \eta U^*\phi(A)^*Ux,x\right\rangle$$

对任意 $x\in\mathbb{C}^n$ 成立。此式蕴涵 $A=\eta U^*\phi(A)^*U$，即 $\phi(A)=\eta UA^*U^*$ 对任意 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 成立。进而得到

$$\mathrm{W}_c\left(\left[A,B\right]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left(\left[\eta UA^*U^*,\eta UB^*U^*\right]_\xi\right)=\mathrm{W}_c\left(\left[B,A\right]_\xi\right)$$

对任意 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ 成立。这与引理 2.8 矛盾，故此情形不发生，证毕。 □

4. 总结

本文所研究的问题属于算子代数上的保持问题，具体说来是对保持数值域以及广义数值域的各类映射的刻画。本文主要结果是给出有限维 Hilbert 空间上有界线性算子全体组成的代数上一类保持算子 ξ-Lie 积的 c-数值域的满射形式。在主要定理的证明过程中，命题 2.6 起着非常重要的作用，但是在无限维情形下，该定理是不成立的，因而本文只考虑有限维的情形。此外由于 c-数值域中 c 向量取值的任意性，所以对于全部的 c，给出保持算子 ξ-Lie 积的 c-数值域的满射的完全刻画是很不容易的，而且猜想对于不同类型的 c，映射形式也是不统一的。所以在定理结论中对 c 向量加了一定的条件，这也是后面研究中考虑改进的方面。之后我们会对无限维 Hilbert 空间上的算子的 c 数值域进行更多研究，获得更多的有关性质，同时改进证明的方法，争取给出无限维情形下，相关保持问题的结论。

参考文献

[1] Gustanfson, K. and Rao, D. (1997) Numercial Range: The Field Values of Linear Operators and Matrices. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8498-4_1

[2] Bourhim, A., Burgos, M. and Shulman, V.S. (2010) Linear Maps Preserving the Minimum and Reduced Minimim Moduli. *Journal of Functional Analysis*, **258**, 50-66. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2009.10.003

[3] 侯晋川, 崔建莲. 算子代数上线性映射引论[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[4] Chien, M.T., Nakazatob, H. and Meng, J. (2019) The Diameter and Width of Numerical Ranges. *Linear Algebra and Its Applications*, **582**, 76-98. https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.07.036

[5] Bendaoud, M., Benyouness, A., Sarih, M. and Sekkat, S. (2017) Preservers of Radial Unitary Similarity Functions on Products of Operators. *Linear Algebra and Its Applications*, **542**, 484-500. https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.07.011

[6] Abdelali, Z.E.A. and Nkhaylia, H. (2020) Condition Spectrum of Rank One Operators and Preservers of the Condition Spectrum of Skew Product of Operators. *Complex Analysis and Operator Theory*, **14**, Article No. 69. https://doi.org/10.1007/s11785-020-01028-9

[7] Nirmal, C.R., Krushnachandra, P. and Debasisha, M. (2023) A Note on Numerical Ranges of Tensors. *Linear and Multilinear Algebra*, **71**, 2645-2669. https://doi.org/10.1080/03081087.2022.2117771

[8] Li, C.K. and Tsing, N.K. (1988) Linear Operators That Preserve the c-Numerical Range or Radius of Matrices. *Linear*

and Multilinear Algebra*, **23**, 27-46. https://doi.org/10.1080/03081088808817854

[9] Chan, K. (2015) c-Numerical Radius Isometries on Matrix Algebra and Triangular Matrix Algebras. *Linear Algebra and Its Applications*, **466**, 160-181. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.10.012

[10] Thomas, S.H., Gunther, D., Uweand, H. and Steffenm, J. (1988) The Significance of the C-Numerical Range and the Local C-Numerical Range in Quantum Control and Quantum Information. *Linear and Multilinear Algebra*, **23**, 27-46.

[11] Li, C.K. (2023) The C-Numerical Range and Unitary Dilations. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **89**, 437-448. https://doi.org/10.1007/s44146-023-00071-0

[12] Zhang, Y.F. and Fang, X.C. (2020) The c-Numerical Range of Operator Products on $B(H)$. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, **14**, 163-180. https://doi.org/10.1007/s43037-019-00022-4

[13] Gau, H.L. and Li, C.K. (2007) C^*-Isomorphisms, Jordan Isomorphisms, and Numerical Range Preserving Maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **135**, 2907-2914. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-07-08807-7

[14] Cui, J.L. and Hou, J.C. (2008) Maps Leaving Functional Values of Operator Productor Invariant. *Linear Algebra and Its Applications*, **428**, 1649-1663. https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.10.010

[15] Hou, J.C., Li, C.K. and Qi, X.F. (2015) Numerical Range of Lie Product of Operators. *Integral Equations and Operator Theory*, **83**, 497-516. https://doi.org/10.1007/s00020-015-2261-2

[16] Sun, S.X. and Qi, X.F. (2023) Higher Dimensional Numerical Range of ξ-Lie Products on Bound Self-Adjoint Operators. *Complex Analysis and Operator Theory*, **17**, Article No. 20. https://doi.org/10.1007/s11785-022-01310-y

[17] 齐霄霏, 孙少星, 胥兵, 陈少波. 算子代数上保持高维数值域的映射[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2022, 45(3): 555-567.

[18] Westwick, R. (1975) A Theorem on Numerical Range. *Linear and Multilinear Algebra*, **2**, 311-315. https://doi.org/10.1080/03081087508817074

[19] Li, C.K., Poon, Y.T. and Sze, N.S. (2011) Elliptical Range Theorems for Generalized Numerical Ranges of Quadratic Operators. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **41**, 813-832. https://doi.org/10.1216/RMJ-2011-41-3-813

[20] Li, C.K. (1994) C-Numerical Ranges and C-Numerical Radii. *Linear and Multilinear Algebra*, **37**, 51-82. https://doi.org/10.1080/03081089408818312