Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(1), 127-132**
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.131015

Hans汉斯

基于概率统计方法证明若干组合恒等式

徐　晨，常桂松

东北大学理学院数学系，辽宁 沈阳

收稿日期：2023年12月15日；录用日期：2024年1月9日；发布日期：2024年1月15日

摘　要

组合恒等式的发现与证明一直是组合数学的一个主要分支，一些组合等式因其复杂性难以直接证明，如何给出组合恒等式的简洁证明是组合数学的重要研究方向。本文应用负二项分布卷积的不同表达形式，与负二项分布的可加性等性质，发现并证明了若干组合恒等式。

关键词

组合等式，负二项分布，**Bell**多项式

Proofs of Several Combinatorial Identities Based on Probability Statistics Method

Chen Xu, Guisong Chang

Departement of Mathematics, College of Sciences, Northeastern University, Shenyang Liaoning

Received: Dec. 15th, 2023; accepted: Jan. 9th, 2024; published: Jan. 15th, 2024

Abstract

Finding and proving combinatorial identities is an important part of combinatorial mathematics. However, some combinatorial identities contain computational complexity, which hinders the direct proofs. So it is an important research direction in combinatorial mathematics to give concise proofs of combinatorial identities. In this paper, some combinatorial identities are found and proved by using different expressions of convolution of negative binomial distribution and the additivity of negative binomial distribution.

Keywords

Combinatorial Identity, Negative Binomial Distribution, Bell Polynomial

文章引用：徐晨，常桂松．基于概率统计方法证明若干组合恒等式[J]．应用数学进展, 2024, 13(1): 127-132.
DOI: 10.12677/aam.2024.131015

1. 引言

组合数学中的恒等式在数学各个学科有着广泛的应用，组合等式的证明方法也是多种多样，其中应用概率统计方法证明组合等式已经有了很多经典结果[1] [2]。若用不同方法解答同一概率统计模型，得到同一事件的不同概率表达公式，则可得到相应的组合恒等式[3]。文献[4]-[9]中均讨论了负二项分布的卷积，并给出了负二项分布卷积的不同形式的概率展开公式，详见引理 1 与引理 2。文献[4] [10] [11] [12]中均讨论了几何分布的卷积，并给出了几何分布卷积的不同形式的概率展开形式，详见引理 3 与引理 4 比较这些结论并结合负二项分布的可加性、Bell 多项式的相关性质即可推出若干组合恒等式。

负二项分布是概率统计中重要的离散型分布，若随机变量 X 的分布律为

$$P(X=k)=\binom{-\alpha}{k}p^{\alpha}(-q)^{k},\quad 0<p<1,\ q=1-p,\ 0<\alpha<\infty,\ k=0,1,2,\cdots$$

则称随机变量 X 服从参数为 (α,p) 的负二项分布，记作 $X\sim NB(\alpha,p)$。若随机变量 $Y\sim NB(\beta,p)$，且随机变量 X 与随机变量 Y 相互独立，则随机变量 $Z=X+Y$ 服从负二项分布，即 $Z\sim NB(\alpha+\beta,p)$，称为负二项分布的可加性。下面给出关于负二项分布卷积的引理，设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 $n(n\ge 2)$ 个相互独立的随机变量，分别服从负二项分布，即 $X_i\sim NB(\alpha_i,p_i)$，其中 $0<p_i<1$， $0<\alpha_i<\infty$， $i=1,2,\cdots,n$。

引理 1. [4]负二项分布卷积 $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布律为

$$P(S=k)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_i}, & k=0,\\ \left(\prod_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_i}\right)\left\{\sum\frac{1}{c_1!c_2!\cdots c_{k-j+1}!}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i q_i^1}{1}\right)^{c_1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i q_i^2}{2}\right)^{c_2}\cdots\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i q_i^{k-j+1}}{k-j+1}\right)^{c_{k-j+1}}\right\}, & k\ge 1,\end{cases}$$

其中求和式取遍所有满足 $\begin{cases}c_1+2c_2+3c_3+\cdots=k\\ c_1+c_2+c_3+\cdots=j\end{cases}$ 的整数 $c_1,c_2,c_3,\cdots\ge 0$， $0<p_i<1$，

$0<\alpha_i<\infty$， $i=1,2,\cdots,n$， $k=0,1,2,\cdots$

引理 2. [5]负二项分布卷积 $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布律为

$$P(S=k)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_i}, & k=0,\\ \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_n=k}\prod_{i=1}^{n}\binom{\alpha_i+m_i-1}{m_i}p_i^{\alpha_i}q_i^{m_i}, & k\ge 1,\end{cases}$$

其中为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 非负整数。

若随机变量 X 服从负二项分布，即 $X\sim NB(\alpha,p)$，将负二项分布的中的实参数 $\alpha=1$ 时，则随机变量 X 服从几何分布，记作 $X\sim NB(1,p)$ 或 $X\sim G(p)$，几何分布是特殊的负二项分布。设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是

$n(n \geq 2)$ 个相互独立的随机变量，分别服从几何分布，即 $X_i \sim G(p_i)$，其中 $0 < p_i < 1$， $i = 1,2,\cdots,n$ 。

引理 3. [4]几何分布卷积 $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 的分布律为

$$P(S = k) = \prod_{i=1}^{n} p_i \sum_{c_1+c_2+\cdots+c_n=k} q_1^{c_1} q_2^{c_2} \cdots q_n^{c_n}, \ 0 < p_i < 1, \ k = 0,1,2,\cdots$$

其中求和式取遍所有满足 $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots = k$ 的整数 $c_1, c_2, c_3, \cdots \geq 0$ 。

引理 4. [10]几何分布卷积 $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 的分布律为

$$P(S = k) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^{k+n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{p_j}{p_j - p_i}, \ \ \forall i \neq j, \text{有 } 0 < p_i \neq p_j < 1, \ k = 0,1,2,\cdots$$

Bell 多项式是组合数学中重要组合序列之一，根据其发生函数的不同分为指数型 Bell 多项式与普通型 Bell 多项式[13]。Bell 多项式在随机过程、微分方程与理论物理学等方面应用广泛，鉴于 Bell 多项式的重要性与广泛应用性，很多学者给出了有关于 Bell 多项式的组合恒等式[14]-[18]。

定义 1. [13]指数型 Bell 多项式是无限多变元 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 由双重形式级数展开式

$$\Phi(t,u) = \exp\left(u \sum_{m \geq 1} \frac{x_m t^m}{m!}\right) = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq k} B_{n,k}(x_1, x_2, x_3, \cdots) \frac{t^n u^k}{n!}$$

定义的多项式 $B_{n,k} = B_{n,k}(x_1, x_2, x_3, \cdots)$，观察两边 u^k 的系数有

$$\frac{1}{k!}\left(\sum_{m \geq 1} \frac{x_m t^m}{m!}\right)^k = \sum_{n \geq k} B_{n,k}(x_1, x_2, x_3, \cdots) \frac{t^n}{n!}, \ k = 0,1,2,\cdots$$

指数型 Bell 多项式的显示公式为

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-k+1}) = \sum \frac{n!}{c_1! c_2! \cdots c_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{c_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{c_2} \cdots \left(\frac{x_{n-k+1}}{n-k+1!}\right)^{c_{n-k+1}},$$

这里和式取遍满足 $\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \cdots = k \\ c_1 + c_2 + c_3 + \cdots = j \end{cases}$ 的整数 $c_1, c_2, c_3, \cdots \geq 0$ 。

引理 5. [13]将定义 1 中双重形式级数展开式 $\Phi(t,u)$ 的双变量中的 $u = 1$，则有

$$\Phi(t,1) = \exp\left(\sum_{m \geq 1} \frac{x_m t^m}{m!}\right) = 1 + \sum_{n \geq 1} Y_n(x_1, x_2, x_3, \cdots) \frac{t^n}{n!},$$

其中 $Y_n = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}, Y_0 = 1$ 。

2. 一些组合恒等式

定理 1. 设指数型 Bell 多项式在 $u = 1$ 时得到的完全 Bell 多项式为

$$\Phi(t,1) = \exp\left(\sum_{m \geq 1} \frac{x_m t^m}{m!}\right) = 1 + \sum_{n \geq 1} Y_n(x_1, x_2, x_3, \cdots) \frac{t^n}{n!},$$

则成立等式

$$Y_n(0! \cdot x, 1! \cdot x, 2! \cdot x, \cdots) = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(0! \cdot x, 1! \cdot x, 2! \cdot x, \cdots) = n! \binom{x+n-1}{n} = (-1)^n n! \binom{-x}{n},$$

其中 $Y_0=1, n\ge 1, x>0$。

证明：

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 $n(n\ge 2)$ 个相互独立的随机变量，分别服从参数为 (α_i,p) 的负二项分布，即 $X_i \sim NB(\alpha_i,p)$，其中 $0<p<1$，$0<\alpha_i<\infty$，$i=1,2,\cdots,n$。由负二项分布的可加性可知，卷积 $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 也服从负二项分布，参数为 $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,p\right)$，即 $S\sim NB\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,p\right)$，则卷积 S 的分布律为

$$P(S=k)=\binom{-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{k}p^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}(-q)^k,\ 0<p<1,\ 0<\alpha_i<\infty,\ i=1,2,\cdots,n,\ k=0,1,2,\cdots$$

将引理 1 中参数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 均取同一值 p，再由 $S\sim NB\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,p\right)$，比较卷积 S 的不同概率表达式既成立

$$\binom{-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{k}=\sum\frac{1}{c_1!c_2!\cdots c_{k-j+1}!}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^j}{1^{c_1}\cdot 2^{c_2}\cdots(k-j+1)^{c_{k-j+1}}},\quad 0<\alpha_i<\infty,\ k=1,2,\cdots$$

这里求和式取遍所有满足 $\begin{cases}c_1+2c_2+3c_3+\cdots=k\\ c_1+c_2+c_3+\cdots=j\end{cases}$ 的整数 $c_1,c_2,c_3,\cdots\ge 0$。

再由指数型 Bell 多项式的显示公式形式

$$B_{n,k}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-k+1})=\sum\frac{n!}{c_1!c_2!\cdots c_{n-k+1}!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{c_1}\left(\frac{x_2}{2!}\right)^{c_2}\cdots\left(\frac{x_{n-k+1}}{n-k+1!}\right)^{c_{n-k+1}},$$

这里和式取遍满足 $\begin{cases}c_1+2c_2+3c_3+\cdots=k\\ c_1+c_2+c_3+\cdots=j\end{cases}$ 的整数 $c_1,c_2,c_3,\cdots\ge 0$。

以及完全 Bell 多项式系数等式

$$Y_n(x_1,x_2,x_3,\cdots)=\sum_{k=1}^{n}B_{n,k}(x_1,x_2,x_3,\cdots),\ Y_0=1.$$

可得

$$Y_n(0!\cdot x,1!\cdot x,2!\cdot x,\cdots)=\sum_{k=1}^{n}B_{n,k}(0!\cdot x,1!\cdot x,2!\cdot x,\cdots)=n!\binom{x+n-1}{n}=(-1)^n n!\binom{-x}{n},$$

其中 $Y_0=1, n\ge 1, x>0$。□

定理 2. 设 n，k 为正整数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为大于 0 的实数，则成立等式

$$\sum_{m_1+m_2+\cdots+m_n=k}\prod_{i=1}^{n}\binom{\alpha_i+m_i-1}{m_i}=\sum_{\substack{c_1+2c_2+3c_3+\cdots=k\\ c_1+c_2+c_3+\cdots=j}}\frac{1}{c_1!c_2!\cdots c_{k-j+1}!}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{1}\right)^{c_1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{2}\right)^{c_2}\cdots\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{k-j+1}\right)^{c_{k-j+1}},$$

其中为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 非负整数。

证明：

比较引理 1 与引理 2 中的结论，由卷积 S 的不同概率表达式即可正面定理 2 中的等式。□

定理 3. 设$\{r_i : r_i \neq r_j, i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,n\}$为一个任意实数序列，记$[t^k]f(t)$为函数$f(t)$关于$t$进行多项式展开后$t^k$前面的系数，则成立等式

$$[t^k]\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-r_i t} = \sum_{c_1+c_2+\cdots+c_n=k} r_1^{c_1} r_2^{c_2}\cdots r_n^{c_n} = \sum_{i=1}^{n} r_i^{k+n-1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{r_i - r_j}\right).$$

其中求和式取遍所有满足$c_1+c_2+c_3+\cdots = k$的整数$c_1,c_2,c_3,\cdots \geq 0$。

证明：

若随机变量X服从几何分布，即$X \sim G(p)$，X是一个非负整型随机变量，其概率发生函数$f(t)$为

$$f(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \cdot pq^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(tq)^k = \frac{p}{1-qt},$$

并且随机变量X的概率发生函数$f(t)$展开成关于变量t的多项式后，$t^k\,(k \geq 0)$前面的系数即为概率$p_k = P(X = k)$。

不妨设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是$n(n \geq 2)$个相互独立的随机变量，分别服从几何分布，即$X_i \sim G(p_i)$，则卷积S的概率发生函数$f_S(t)$以变量t进行多项式展开后，t^k前面的系数即为概率$P(S = k)$，其中$k = 0,1,2,\cdots$记$[t^k]f_S(t)$为$f_S(t)$关于t展开后t^k前面的系数，则根据引理 3 可知，

$$[t^k]f_S(t) = [t^k]\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i}{1-q_i t} = [t^k]\prod_{i=1}^{n} p_i \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\geq 0} q_i^j t^j\right) = \prod_{i=1}^{n} p_i \sum_{c_1+c_2+\cdots+c_n=k} q_1^{c_1} q_2^{c_2}\cdots q_n^{c_n}.$$

其中求和式取遍所有满足$c_1+c_2+c_3+\cdots = k$的整数$c_1,c_2,c_3,\cdots \geq 0$。

进一步比较引理 4 中的结论，即根据卷积S的不同概率表达式即可正面定理 3 中的等式。□

3. 小结

本文比较负二项分布卷积与几何分布卷积的不同概率展开公式，得到了三个组合恒等式，有些恒等式还可验证其他组合数学中的恒等式，例如在定理 1 中的恒等式里若取$x = 1$，并考虑指数型 Bell 多项式与第一类无符号 Stirling 数$c(n,k)$关系，即可验证关于第一类无符号 Stirling 数$c(n,k)$的求和等式

$$Y_n(0!,1!,2!,\cdots) = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(0!,1!,2!,\cdots) = \sum_{k=1}^{n} c(n,k) = n!.$$

若将式定理 2 中的恒等式里所有的$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$均取 1，则定理 2 中的等式左边为正整数$k$的非负有序$n$分拆个数，因此可以得到一个关于有序分拆的组合式与 Bell 多项式关系的等式

$$\binom{n+k-1}{k} = \sum_{\substack{c_1+2c_2+3c_3+\cdots=k\\ c_1+c_2+c_3+\cdots=j}} \frac{1}{c_1!c_2!\cdots c_{k-j+1}!}\binom{n}{1}^{c_1}\binom{n}{2}^{c_2}\cdots\binom{n}{k-j+1}^{c_{k-j+1}},$$

其中n，k为正整数，这个结论与定理 1 中结论一致。

相比较于文献[1] [2]中组合数学的概率统计方法，本文主要基于同一概率模型的不同概率展开方法、以及概率模型中特有的概率性质，如可加性等，推导了若干组合恒等式，推导过程简洁明了、推导结果还可以用来论证其他组合等式。

基金项目

东北大学科研启动项目《同族分布顺序统计量的性质与应用的研究》。

参考文献

[1] Vellaisamy, P. and Zeleke, A. (2019) Probabilistic Proofs of Some Beta-Function Identities. *Journal of Integer Sequences*, **22**, 1-10.

[2] Ge, H.P. and Zhao, X.Q. (2010) Some Applications of Probabilistic Methods in Combinatorial Mathematics. *Periodical of Ocean University of China*, **9**, 230-234.

[3] Balakrishnan, N. (2012) Advances in Combinatorial Methods and Applications to Probability and Statistics. Birkhäuser, Boston, 22-96.

[4] Xu, C. and Chang, G.S. (2017) Exact Distribution of the Convolution of Negative Binomial Random Variables. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **46**, 2851-2856. https://doi.org/10.1080/03610926.2015.1053931

[5] Vellaisamy, P. and Upadhye, N.S. (2009) On the Sums of Compound Negative Binomial and Gamma Random Variables. *Journal of Applied Probability*, **46**, 272-283. https://doi.org/10.1239/jap/1238592129

[6] Furman, E. (2006) On the Convolution of the Negative Binomial Random Variables. *Statistics and Probability Letters*, **77**, 169-172. https://doi.org/10.1016/j.spl.2006.06.007

[7] Zhao, F.Z. (2016) Some Results for the Inverse Moment of the n-Fold Convolution of the Zero-Truncated Negative Binomial Distribution. *The Journal of the Indian Mathematical Society*, **83**, 199-208.

[8] Imoto, T. (2015) Convolution of Binomial and Negative Binomial Variables. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **44**, 5005-5022. https://doi.org/10.1080/03610926.2013.809110

[9] Ahuja, J.C. and Enneking, E.A. (1974) Convolution of Independent Left-Truncated Negative Binomial Variables and Limiting Distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **26**, 265-270. https://doi.org/10.1007/BF02479821

[10] Sen, A. and Balakrishnan, N. (1999) Convolution of Geometrics and a Reliability Problem. *Statistics and Probability Letters*, **43**, 421-426. https://doi.org/10.1016/S0167-7152(98)00284-3

[11] Psarrakos, G. (2009) A Note on Convolutions of Compound Geometric Distributions. *Statistics and Probability Letters*, **79**, 1231-1237. https://doi.org/10.1016/j.spl.2009.01.012

[12] Boland, P.J., El-Neweihi, E. and Proschan, F. (1994) Schur Properties of Convolutions of Exponential and Geometric Random Variables. *Journal of Multivariate Analysis*, **48**, 157-167. https://doi.org/10.1016/0047-259X(94)80009-K

[13] Comtet, L. 著. 高等组合学: 有限和无限展开的艺术[M]. 谭明术, 郝培峰, 杨利民, 张玉森, 唐朝平, 译. 大连: 大连理工大学出版社, 1991: 151-160.

[14] Sun, P. (2007) Moment Representation of Bernoulli Polynomial, Euler Polynomial and Gegenbauer Polynomials. *Statistics and Probability Letters*, **77**, 748-751. https://doi.org/10.1016/j.spl.2006.11.011

[15] 祁兰, 张媛. 关于 Bell 多项式的一些恒等式[J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学汉文版, 2020, 49(2): 5.

[16] 杨继真, 王云鹏. 一类包含有完全 Bell 多项式的恒等式(英文) [J]. 数学季刊(英文版), 2017, 32(4): 89-98.

[17] 过静, 李小雪. 关于 Bell 多项式及其它的一些恒等式[J]. 数学杂志, 2017, 37(6): 1201-1206.

[18] 道如娜图亚, 乌云高娃. 关于第三类退化的 Poly-Cauchy 多项式的组合恒等式[J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 492-502. https://doi.org/10.12677/aam.2022.111057