

七次广义Ball曲线的两种扩展

付雨楠, 严兰兰*

东华理工大学理学院, 江西 南昌

收稿日期: 2023年12月19日; 录用日期: 2024年1月13日; 发布日期: 2024年1月23日

摘要

构造了两组含形状参数的多项式基函数: 第一组基既是七次Wang-Ball基的扩展, 又是七次Said-Ball基的扩展; 第二组基既是七次Said-Ball基的扩展, 又是七次Bernstein基的扩展。并由此定义了两种新的七次广义Ball曲线: 前者不仅包括了七次Wang-Ball和Said-Ball曲线, 还涵盖了无数条处于这两种曲线之间的曲线; 后者不仅包括了七次Said-Ball和Bézier曲线, 还涵盖了无数条处于这两种曲线之间的曲线。依次分析了两种新的广义Ball曲线与七次Bézier曲线之间的关系后明确了每个形状参数的几何意义, 并给出了其几何作图法。

关键词

Wang-Ball基函数, Said-Ball基函数, 广义Ball曲线, Bézier曲线, 形状参数

Two Extensions of Generalized Ball Curves of Seventh Degree

Yunan Fu, Lanlan Yan*

College of Science, East China University of Technology, Nanchang Jiangxi

Received: Dec. 19th, 2023; accepted: Jan. 13th, 2024; published: Jan. 23rd, 2024

Abstract

Two classes of polynomial basis functions with shape parameter are constructed. The first class of basis is not only the extension of Wang-Ball basis of seventh degree, but also the extension of Said-Ball basis of seventh degree. The second class of basis is not only the extension of Said-Ball basis of seventh degree, but also the extension of Bernstein basis of seventh degree. Based on these two new bases, two classes of new generalized Ball curves of seventh degree are defined. The former contained the Wang-Ball and Said-Ball curve of seventh degree and many curves between them. The latter contained the Said-Ball and Bézier curve of seventh degree and many curves between them. After analyzing the relationship between new generalized Ball curves and the Bezier curve of seventh degree, the geometric meaning of each shape parameter is clarified,

*通讯作者。

文章引用: 付雨楠, 严兰兰. 七次广义 Ball 曲线的两种扩展[J]. 应用数学进展, 2024, 13(1): 331-341.

DOI: 10.12677/aam.2024.131035

and its geometric drawing method is given.

Keywords

Wang-Ball Basis Function, Said-Ball Basis Function, Generalized Ball Curve, Bézier Curve, Shape Parameter

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学家 Ball [1] [2] [3]提出了三次参数曲线, 随后广义 Ball 曲线曲面的研究工作不断推进并且取得众多成果。王国瑾[4]将三次参数曲线推广至 n 次广义 Ball 曲线并分析了其几何性质。Said [5]提出了一种新的广义 Ball 曲线, 将三次参数曲线推广至任意奇数次。在文献[6]中, 文献[4] [5]中的曲线分别被称为 Wang-Ball 和 Said-Ball 曲线, 并通过比较分析发现 Wang-Ball 曲线的递归算法效率优于 Bézier 曲线和 Said-Ball 曲线。与同次 Bézier 曲线相比, 广义 Ball 曲线在曲线求值和升降阶等计算方面更高效。因此, 广义 Ball 曲线被广泛应用于几何制造业。

文献[7] [8]构造了两种带位置参数的广义 Ball 曲线。从提高 t 的次数的设计思路出发, 文献[9]先构造了一组新的含形状参数 λ 的基函数, 再由此构造了与三次 Ball 曲线性质相似的扩展曲线。文献[10]提出了两种四次广义 Ball 曲线的生成方法。文献[11]先构造了次数分别为三次和四次的带形状参数的基函数, 再基于这两组基函数定义了两种不同的扩展三次 Ball 曲线。文献[9] [12] [13]讨论了广义 Ball 曲线间的拼接问题, 其中, 文献[13]还给出了 G^1 连续条件下形状参数的选取准则。

整合文献[7] [8] [9]的思想, 本文依次构造了 αB 和 βB 基函数, 其中, αB 基函数可以从七次 Wang-Ball 基过渡到 Said-Ball 基, 而 βB 基函数可以从七次 Said-Ball 基过渡到 Bernstein 基。基于 αB 基函数和 βB 基函数构造的曲线均具有形状可调性, 当 αB 曲线中的形状参数 α 取不同值时, 不仅可以得到七次 Wang-Ball 与 Said-Ball 曲线, 而且还可以得到无数条处于这两种曲线之间的曲线; 当 βB 曲线中的形状参数 β 取不同值时, 不仅可以得到七次 Said-Ball 与 Bézier 曲线, 而且还可以得到无数条处于这两种曲线之间的曲线。

2. 介于 Wang-Ball 和 Said-Ball 曲线之间的曲线

2.1. 基函数的构造与性质

定义 1 对 $\forall t \in [0,1]$ 和 $\alpha \in [0,1]$, 多项式

$$\begin{cases} b_{0,7}(t) = (1 - 2\alpha t + \alpha t^2)(1-t)^2 \\ b_{1,7}(t) = (2 + 2\alpha - 4\alpha t)t(1-t)^3 \\ b_{2,7}(t) = (4 + 6\alpha)t^2(1-t)^4 \\ b_{3,7}(t) = (8 + 12\alpha)t^3(1-t)^4 \\ b_{4,7}(t) = (8 + 12\alpha)t^4(1-t)^3 \\ b_{5,7}(t) = (4 + 6\alpha)t^4(1-t)^2 \\ b_{6,7}(t) = (2 - 2\alpha + 4\alpha t)t^3(1-t) \\ b_{7,7}(t) = (1 - \alpha + \alpha t^2)t^2 \end{cases} \quad (1)$$

被称为含形状参数 α 的七次广义 Ball 基函数, 即 αB 基。

αB 基具有如下性质:

性质 1 非负性, 即 $b_{i,7}(t) \geq 0 (i=0,1,\dots,7)$ 。

性质 2 规范性, 即 $\sum_{i=0}^7 b_{i,7}(t) = 1$ 。

性质 3 对称性, 即 $b_{i,7}(t) = b_{7-i,7}(1-t), i=0,1,\dots,7$ 。

性质 4 端点性质:

$$\begin{cases} b_{0,7}(0) = 1 \\ b_{i,7}(0) = 0, i = 1, 2, \dots, 7 \end{cases}; \begin{cases} b_{i,7}(1) = 0, i = 0, 1, \dots, 6 \\ b_{7,7}(1) = 1 \end{cases}; \\ \begin{cases} b'_{0,7}(0) = -(2\alpha + 2) \\ b'_{1,7}(0) = 2\alpha + 2 \\ b'_{i,7}(0) = 0, i = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{cases}; \begin{cases} b'_{i,7}(1) = 0, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ b'_{6,7}(1) = -(2\alpha + 2) \\ b'_{7,7}(1) = 2\alpha + 2 \end{cases}.$$

性质 5 单峰性, 即每个基函数在定义域 $[0,1]$ 上有唯一的最大值。

性质 6 退化性: 当 $\alpha = 0$ 时, αB 基是七次 Wang-Ball 基; 当 $\alpha = 1$ 时, αB 基是七次 Said-Ball 基。

2.2. 曲线的构造与性质

定义 2 给定一组控制顶点 $P_i \in R^d (d=2,3; i=0,1,\dots,7)$, 对 $\forall t \in [0,1]$, 曲线

$$p(t) = \sum_{i=0}^7 P_i b_{i,7}(t) \quad (2)$$

被称为含形状参数 α 的七次广义 Ball 曲线, 即 αB 曲线。

根据 αB 基的性质可以得到, αB 曲线具有下列性质:

性质 1 端点性质:

$$\begin{cases} p(0) = P_0 \\ p(1) = P_7 \end{cases}; \begin{cases} p'(0) = (2\alpha + 2)(P_1 - P_0) \\ p'(1) = (2\alpha + 2)(P_7 - P_6) \end{cases}.$$

性质 2 凸包性。由 αB 基的非负性与规范性可以推出, αB 曲线始终会位于其控制多边形构成的凸包内。

性质 3 对称性, 即不论是控制多边形 $P_0 P_1 \dots P_7$ 还是 $P_7 P_6 \dots P_0$ 构成的 αB 曲线形状相同仅方向相反。

性质 4 几何不变性与仿射不变性, 即 αB 曲线的形状不会随着坐标系的不同而变化, 并且不论是对 αB 曲线的控制多边形进行仿射变换还是对 αB 曲线直接进行仿射变换, 两者所对应的新曲线仍然相同。

2.3. 形状参数的几何意义

形状参数 α 的取值变化会直接影响 αB 曲线形状, 下面先讨论 αB 曲线中参数 α 的几何意义。 αB 基可转化为七次 Bernstein 基函数的线性组合形式, 即

$$\begin{cases}
 b_{0,7}(t) = B_{0,7}(t) + \frac{5-2\alpha}{7}B_{1,7}(t) + \frac{10-7\alpha}{21}B_{2,7}(t) + \frac{10-9\alpha}{35}B_{3,7}(t) + \frac{5-5\alpha}{35}B_{4,7}(t) + \frac{1-\alpha}{21}B_{5,7}(t) \\
 b_{1,7}(t) = \frac{2+2\alpha}{7}B_{1,7}(t) + \frac{6+2\alpha}{21}B_{2,7}(t) + \frac{6-2\alpha}{35}B_{3,7}(t) + \frac{2-2\alpha}{35}B_{4,7}(t) \\
 b_{2,7}(t) = \frac{4+6\alpha}{21}B_{2,7}(t) + \frac{4+6\alpha}{35}B_{3,7}(t) \\
 b_{3,7}(t) = \frac{8+12\alpha}{35}B_{3,7}(t) \\
 b_{4,7}(t) = \frac{8+12\alpha}{35}B_{4,7}(t) \\
 b_{5,7}(t) = \frac{4+6\alpha}{35}B_{4,7}(t) + \frac{4+6\alpha}{21}B_{5,7}(t) \\
 b_{6,7}(t) = \frac{2-2\alpha}{35}B_{3,7}(t) + \frac{6-2\alpha}{35}B_{4,7}(t) + \frac{6+2\alpha}{21}B_{5,7}(t) + \frac{2+2\alpha}{7}B_{6,7}(t) \\
 b_{7,7}(t) = \frac{1-\alpha}{21}B_{2,7}(t) + \frac{5-5\alpha}{35}B_{3,7}(t) + \frac{10-9\alpha}{35}B_{4,7}(t) + \frac{10-7\alpha}{21}B_{5,7}(t) + \frac{5-2\alpha}{7}B_{6,7}(t) + B_{7,7}(t)
 \end{cases} \tag{3}$$

记作

$$b = MB$$

其中

$$\begin{aligned}
 & b = (b_{0,7}(t) \quad b_{1,7}(t) \quad \cdots \quad b_{7,7}(t))^T, \\
 & M = \begin{pmatrix}
 1 & \frac{5-2\alpha}{7} & \frac{10-7\alpha}{21} & \frac{10-9\alpha}{35} & \frac{5-5\alpha}{35} & \frac{1-\alpha}{21} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{2+2\alpha}{7} & \frac{6+2\alpha}{21} & \frac{6-2\alpha}{35} & \frac{2-2\alpha}{35} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{4+6\alpha}{21} & \frac{4+6\alpha}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{8+12\alpha}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8+12\alpha}{35} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4+6\alpha}{35} & \frac{4+6\alpha}{21} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{2-2\alpha}{35} & \frac{6-2\alpha}{35} & \frac{6+2\alpha}{21} & \frac{2+2\alpha}{7} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1-\alpha}{21} & \frac{5-5\alpha}{35} & \frac{10-9\alpha}{35} & \frac{10-7\alpha}{21} & \frac{5-2\alpha}{7} & 1
 \end{pmatrix}, \\
 & B = (B_{0,7}(t) \quad B_{1,7}(t) \quad \cdots \quad B_{7,7}(t))^T.
 \end{aligned}$$

如果令

$$P = (P_0 \quad P_1 \quad \cdots \quad P_7)$$

则式(2)的等价表示为

$$p(t) = PMB \tag{4}$$

将七次 Bézier 曲线的控制顶点记作 $V_i (i=0,1,\dots,7)$, 再令

$$V = (V_0 \quad V_1 \quad \cdots \quad V_7)$$

则可用七次 Bézier 曲线等价表示 αB 曲线为

$$p(t) = VB \quad (5)$$

比较式(4)和式(5)可得

$$V = PM \quad (6)$$

即

$$\begin{cases} V_0 = P_0 \\ V_1 = \frac{5-2\alpha}{7}P_0 + \frac{2+2\alpha}{7}P_1 \\ V_2 = \frac{10-7\alpha}{21}P_0 + \frac{6+2\alpha}{21}P_1 + \frac{4+6\alpha}{21}P_2 + \frac{1-\alpha}{21}P_7 \\ V_3 = \frac{10-9\alpha}{35}P_0 + \frac{6-2\alpha}{35}P_1 + \frac{4+6\alpha}{35}P_2 + \frac{8+12\alpha}{35}P_3 + \frac{2-2\alpha}{35}P_6 + \frac{5-5\alpha}{35}P_7 \\ V_4 = \frac{5-5\alpha}{35}P_0 + \frac{2-2\alpha}{35}P_1 + \frac{8+12\alpha}{35}P_4 + \frac{4+6\alpha}{35}P_5 + \frac{6-2\alpha}{35}P_6 + \frac{10-9\alpha}{35}P_7 \\ V_5 = \frac{1-\alpha}{21}P_0 + \frac{4+6\alpha}{21}P_5 + \frac{6+2\alpha}{21}P_6 + \frac{10-7\alpha}{21}P_7 \\ V_6 = \frac{2+2\alpha}{7}P_6 + \frac{5-2\alpha}{7}P_7 \\ V_7 = P_7 \end{cases} \quad (7)$$

形状参数 α 的几何解释: 由式(7)可知, $P_0V_1:V_1P_1 = 2+2\alpha:5-2\alpha$, $P_6V_6:V_6P_7 = 5-2\alpha:2+2\alpha$ 。当 $\alpha=1$ 时, 如图 1 所示, αB 曲线的控制多边形为 $P_0P_1 \cdots P_7$, 与 αB 曲线等价的 Bézier 曲线的控制多边形为 $V_0V_1 \cdots V_7$ 。

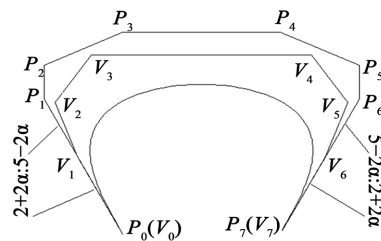


Figure 1. The geometric meaning of shape parameter α

图 1. 形状参数 α 的几何解释

2.4. 形状参数对曲线形状的影响

由 2.3 节可知, 当 α 增大时, 与 αB 曲线等价的七次 Bézier 曲线的控制多边形将会不断逼近 αB 曲线的控制多边形。同时由 Bézier 曲线的逼近性可知, 当 α 增大时, αB 曲线也会随之不断逼近其控制多边形。图 2 中依次取 $\alpha = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ 生成曲线 1~5, 其中, 曲线 1 和 5 分别为由 $P_0P_1 \cdots P_7$ 所定义的七次 Wang-Ball 曲线与 Said-Ball 曲线。

2.5. 曲线的几何作图法

通过 2.3 节的分析可知, αB 曲线可以转化为七次 Bézier 曲线, 而且式(7)明确了两者控制顶点之间的显性关系。所以当 αB 曲线的控制顶点已知时, 可以先利用式(7)求解其相对应的七次 Bézier 曲线的控

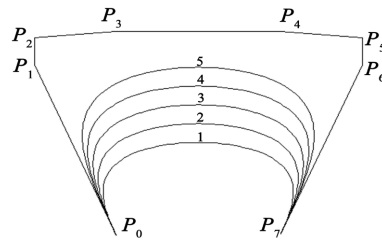


Figure 2. αB curves with different values of α
图 2. α 不同取值时的 αB 曲线

制顶点, 再根据 Bézier 曲线的几何作图法, 由七级递推后得到的最后一点即为 αB 曲线上的点。令 $\alpha = 1$ 且 $t = \frac{1}{2}$, 如图 3 所示, $P_0P_1 \cdots P_7$ 为 αB 曲线的控制多边形, 则该 αB 曲线对应的七次 Bézier 曲线的控制多边形为 $V_0V_1 \cdots V_7$ 。

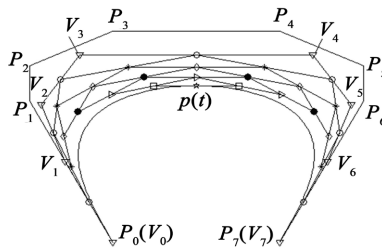


Figure 3. The geometric drawing method of αB curves
图 3. αB 曲线的几何作图法

3. 介于 Said-Ball 和 Bézier 曲线之间的曲线

3.1. 基函数的构造与性质

定义 3 对 $\forall t \in [0,1]$ 和 $\beta \in [0,1]$, 多项式

$$\begin{cases} c_{0,7}(t) = (1 - 3\beta t + 3\beta t^2 - \beta t^3)(1-t)^4 \\ c_{1,7}(t) = (4 + 3\beta - 14\beta t + 7\beta t^2)t(1-t)^4 \\ c_{2,7}(t) = (10 + 11\beta - 21\beta t)t^2(1-t)^4 \\ c_{3,7}(t) = (20 + 15\beta)t^3(1-t)^4 \\ c_{4,7}(t) = (20 + 15\beta)t^4(1-t)^3 \\ c_{5,7}(t) = (10 - 10\beta + 21\beta t)t^4(1-t)^2 \\ c_{6,7}(t) = (4 - 4\beta + 7\beta t^2)t^4(1-t) \\ c_{7,7}(t) = (1 - \beta + \beta t^3)t^4 \end{cases} \quad (8)$$

被称为含形状参数 β 的七次广义 Ball 基函数, 即 βB 基。

βB 基具有如下性质:

性质 1 非负性, 即 $c_{i,7}(t) \geq 0 (i=0,1,\dots,7)$ 。

性质 2 规范性, 即 $\sum_{i=0}^7 c_{i,7}(t) = 1$ 。

性质 3 对称性, 即 $c_{i,7}(t) = c_{7-i,7}(1-t), i = 0, 1, \dots, 7$ 。

性质 4 端点性质:

$$\begin{cases} c_{0,7}(0) = 1 \\ c_{i,7}(0) = 0, i = 1, 2, \dots, 7 \end{cases}; \begin{cases} c_{i,7}(1) = 0, i = 0, 1, \dots, 6 \\ c_{7,7}(1) = 1 \end{cases}; \\ \begin{cases} c'_{0,7}(0) = -(3\beta + 4) \\ c'_{1,7}(0) = 3\beta + 4 \\ c'_{i,7}(0) = 0, i = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{cases}; \begin{cases} c'_{i,7}(1) = 0, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ c'_{6,7}(1) = -(3\beta + 4) \\ c'_{7,7}(1) = 3\beta + 4 \end{cases}.$$

性质 5 单峰性, 即每个基函数在定义域 $[0, 1]$ 上有唯一最大值。

性质 6 退化性: 当 $\beta = 0$ 时, βB 基是七次 Said-Ball 基; 当 $\beta = 1$ 时, βB 基是七次 Bernstein 基。

3.2. 曲线的构造与性质

定义 4 给定一组控制顶点 $Q_i \in R^d (d = 2, 3; i = 0, 1, \dots, 7)$, 对 $\forall t \in [0, 1]$, 曲线

$$q(t) = \sum_{i=0}^7 Q_i c_{i,7}(t) \quad (9)$$

被称为含形状参数 β 的七次广义 Ball 曲线, 即 βB 曲线。

类似于 αB 曲线性质, βB 曲线具备下列性质:

性质 1 端点性质:

$$\begin{cases} q(0) = Q_0 \\ q(1) = Q_7 \end{cases}, \begin{cases} q'(0) = (3\beta + 4)(Q_1 - Q_0) \\ q'(1) = (3\beta + 4)(Q_7 - Q_6) \end{cases}.$$

性质 2 凸包性。

性质 3 对称性。

性质 4 几何不变性与仿射不变性。

3.3. 形状参数的几何意义

为阐明形状参数 β 对 βB 曲线形状的影响, 类似于 2.3 节的分析, 接下来讨论参数 β 的几何意义。 βB 基也可以由七次 Bernstein 基函数线性表出, 即

$$\begin{cases} c_{0,7}(t) = B_{0,7}(t) + \frac{3-3\beta}{7} B_{1,7}(t) + \frac{3-3\beta}{21} B_{2,7}(t) + \frac{1-\beta}{35} B_{3,7}(t) \\ c_{1,7}(t) = \frac{4+3\beta}{7} B_{1,7}(t) + \frac{8-8\beta}{21} B_{2,7}(t) + \frac{4-4\beta}{35} B_{3,7}(t) \\ c_{2,7}(t) = \frac{10+11\beta}{21} B_{2,7}(t) + \frac{10-10\beta}{35} B_{3,7}(t) \\ c_{3,7}(t) = \frac{20+15\beta}{35} B_{3,7}(t) \\ c_{4,7}(t) = \frac{20+15\beta}{35} B_{4,7}(t) \\ c_{5,7}(t) = \frac{10-10\beta}{35} B_{4,7}(t) + \frac{10+11\beta}{21} B_{5,7}(t) \\ c_{6,7}(t) = \frac{4-4\beta}{35} B_{4,7}(t) + \frac{8-8\beta}{21} B_{5,7}(t) + \frac{4+3\beta}{7} B_{6,7}(t) \\ c_{7,7}(t) = \frac{1-\beta}{35} B_{4,7}(t) + \frac{3-3\beta}{21} B_{5,7}(t) + \frac{3-3\beta}{7} B_{6,7}(t) + B_{7,7}(t) \end{cases} \quad (10)$$

记作

$$c = NB$$

其中,

$$c = (c_{0,7}(t) \quad c_{1,7}(t) \quad \cdots \quad c_{7,7}(t))^T,$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3-3\beta}{7} & \frac{3-3\beta}{21} & \frac{1-\beta}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4+3\beta}{7} & \frac{8-8\beta}{21} & \frac{4-4\beta}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10+11\beta}{21} & \frac{10-10\beta}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20+15\beta}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{20+15\beta}{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10-10\beta}{35} & \frac{10+11\beta}{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4-4\beta}{35} & \frac{8-8\beta}{21} & \frac{4+3\beta}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\beta}{35} & \frac{3-3\beta}{21} & \frac{3-3\beta}{7} & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = (B_{0,7}(t) \quad B_{1,7}(t) \quad \cdots \quad B_{7,7}(t))^T.$$

如果令

$$Q = (Q_0 \quad Q_1 \quad \cdots \quad Q_7)$$

则式(9)可以等价表示为

$$q(t) = QNB \tag{11}$$

仍然将七次 Bézier 曲线的控制顶点记作 $V_i (i = 0, 1, \dots, 7)$, 并令

$$V = (V_0 \quad V_1 \quad \cdots \quad V_7)$$

故 βB 曲线也可以转化为七次 Bézier 曲线表示形式, 即

$$q(t) = VB \tag{12}$$

比较式(11)和式(12)可得

$$V = QN \tag{13}$$

即

$$\begin{cases}
 V_0 = Q_0 & (a) \\
 V_1 = \frac{3-3\beta}{7}Q_0 + \frac{4+3\beta}{7}Q_1 & (b) \\
 V_2 = \frac{3-3\beta}{21}Q_0 + \frac{8-8\beta}{21}Q_1 + \frac{10+11\beta}{21}Q_2 & (c) \\
 V_3 = \frac{1-\beta}{35}Q_0 + \frac{4-4\beta}{35}Q_1 + \frac{10-10\beta}{35}Q_2 + \frac{20+15\beta}{35}Q_3 & (d) \\
 V_4 = \frac{20+15\beta}{35}Q_4 + \frac{10-10\beta}{35}Q_5 + \frac{4-4\beta}{35}Q_6 + \frac{1-\beta}{35}Q_7 & (e) \\
 V_5 = \frac{10+11\beta}{21}Q_5 + \frac{8-8\beta}{21}Q_6 + \frac{3-3\beta}{21}Q_7 & (f) \\
 V_6 = \frac{4+3\beta}{7}Q_6 + \frac{3-3\beta}{7}Q_7 & (g) \\
 V_7 = Q_7 & (h)
 \end{cases} \quad (14)$$

式(14c)可以等价表示为

$$V_2 = \frac{3-3\beta}{21}Q_0 + \frac{8-8\beta}{21}Q_1 + \frac{10+11\beta}{21}Q_2 = Q_1 + \frac{3-3\beta}{21}(Q_0 - Q_1) + \frac{10+11\beta}{21}(Q_2 - Q_1) \quad (15)$$

同理, 式(14f)可以等价表示为

$$V_5 = \frac{10+11\beta}{21}Q_5 + \frac{8-8\beta}{21}Q_6 + \frac{3-3\beta}{21}Q_7 = Q_6 + \frac{10+11\beta}{21}(Q_5 - Q_6) + \frac{3-3\beta}{21}(Q_7 - Q_6) \quad (16)$$

形状参数 β 的几何解释: 由式(14b)可知, $Q_0V_1:V_1Q_1=4+3\beta:3-3\beta$; 由式(14g)可知, $Q_3V_3:V_3Q_4=3-3\beta:4+3\beta$; 由式(15)可知, V_2 位于以 $\frac{3-3\beta}{21}(Q_0 - Q_1)$ 和 $\frac{10+11\beta}{21}(Q_2 - Q_1)$ 为邻边的平行四边形的终点处; 由式(16)可知, V_5 位于以 $\frac{10+11\beta}{21}(Q_5 - Q_6)$ 和 $\frac{3-3\beta}{21}(Q_7 - Q_6)$ 为邻边的平行四边形的终点处。令 $\beta=0$, βB 曲线的控制多边形为 $Q_0Q_1 \cdots Q_7$, 而与 βB 曲线等价的 Bézier 曲线的控制多边形为 $V_0V_1 \cdots V_7$, 如图 4 所示。

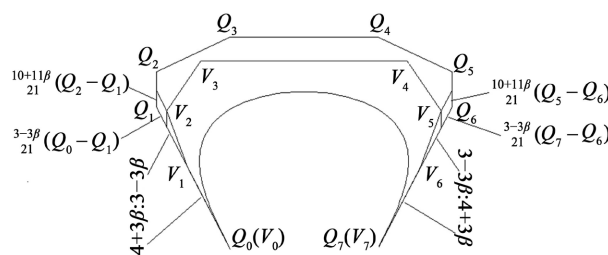


Figure 4. The geometric meaning of shape parameter β

图 4. 形状参数 β 的几何意义

3.4. 形状参数对曲线的影响

通过 3.3 节的分析可知, 当 β 不断增大时, 与 βB 曲线等价的七次 Bézier 曲线的控制多边形将会渐渐靠近 βB 曲线的控制多边形。结合 Bézier 曲线的逼近性可知, 当 β 越大时, βB 曲线也会越来越靠近其控制多边形。图 5 中依次取形状参数 $\beta=0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ 生成曲线 1~4, 其中, 曲线 1 和 4 分别为由 $Q_0Q_1 \cdots Q_7$ 所定义的七次 Said-Ball 曲线和 Bézier 曲线。

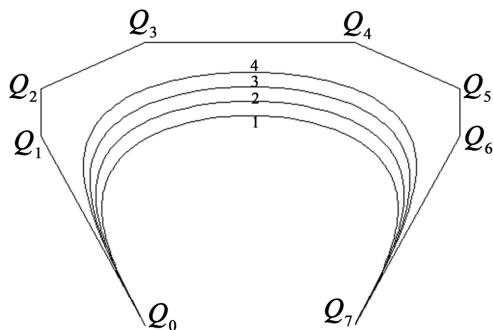


Figure 5. βB curves with different values of β
图 5. β 不同取值时的 βB 曲线

3.5. 曲线的几何作图法

由 3.3 节可知, βB 曲线不仅可以转化为七次 Bézier 曲线, 并且 βB 曲线与七次 Bézier 曲线的控制顶点之间的显性关系可表示为式(14)。所以给定 βB 曲线的控制顶点后, 设计人员可以先根据式(14)求解其等价的七次 Bézier 曲线的控制顶点, 然后采用 Bézier 曲线的几何作图法, 由七级递推后得到的最后一个点即为 βB 曲线上的点。当 $\beta = 0, t = \frac{1}{2}$ 时, 如图 6 所示, $Q_0Q_1 \cdots Q_7$ 为 βB 曲线的控制多边形, $V_0V_1 \cdots V_7$ 为该 βB 曲线等价的七次 Bézier 曲线的控制多边形。

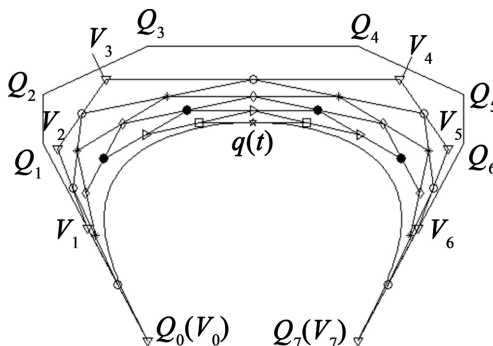


Figure 6. The geometric drawing method of βB curves
图 6. βB 曲线的几何作图法

4. 结束语

本文给出了两种新的七次广义 Ball 曲线, 即 αB 曲线与 βB 曲线。 αB 曲线与 βB 曲线均具有形状可调节性: αB 曲线通过改变形状参数 α 的取值不仅可以转化为七次 Wang-Ball 和 Said-Ball 曲线, 还可以得到无数条处于两者之间的曲线; 而 βB 曲线通过改变形状参数 β 的取值不仅可以转化为七次 Said-Ball 和 Bézier 曲线, 而且可以得到无数条介于两者之间的曲线。对比文献[7] [8], 因为本文构造的两种新的基函数的表达式均为显性, 所以整体更加简洁明了。此外, 形状参数 α 和 β 具有明确的几何意义, 便于设计人员通过调整形状参数的值构造所需的曲线。

基金项目

国家自然科学基金(11761008); 江西省自然科学基金(20161BAB211028); 江西省教育厅科技项目(GJJ160558)。

参考文献

- [1] Ball, A.A. (1974) CONSURF, Part 1: Introduction to the Conic Lofting Title. *Computer-Aided Design*, **6**, 243-249. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(74\)90009-8](https://doi.org/10.1016/0010-4485(74)90009-8)
- [2] Ball, A.A. (1975) CONSURF, Part 2: Description of the Algorithms. *Computer-Aided Design*, **7**, 237-242. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(75\)90068-8](https://doi.org/10.1016/0010-4485(75)90068-8)
- [3] Ball, A.A. (1977) CONSURF, Part 3: How the Program Is Used. *Computer-Aided Design*, **9**, 9-12. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(77\)90056-2](https://doi.org/10.1016/0010-4485(77)90056-2)
- [4] 王国瑾. 高次 Ball 曲线及其几何性质[J]. 高校应用数学学报, 1987, 2(1): 126-140.
- [5] Said, H.B. (1989) A Generalized Ball Curve and Its Recursive Algorithm. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, **8**, 360-371. <https://doi.org/10.1145/77269.77275>
- [6] Hu, S.M., Wang, G.Z. and Jin, T.G. (1996) Properties of Two Types of Generalized Ball Curves. *Computer-Aided Design*, **28**, 125-133. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(95\)00047-X](https://doi.org/10.1016/0010-4485(95)00047-X)
- [7] Wu, H.Y. (2000) Unifying Representation of Bézier Curve and Generalized Ball Curves. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, **15**, 109-121. <https://doi.org/10.1007/s11766-000-0016-5>
- [8] 沈莞蕾, 汪国昭. Ball 基的推广[J]. 软件学报, 2005, 16(11): 138-145.
- [9] 王成伟. 三次 Ball 曲线的扩展[J]. 工程图学学报, 2008(1): 77-81.
- [10] 严兰兰, 饶智勇, 温荣生. 两类新的四次广义 Ball 曲线[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2010, 33(2): 316-320.
- [11] 严兰兰, 梁炯丰, 饶智勇. 三次 Ball 曲线的两种新扩展[J]. 工程图学学报, 2011, 32(5): 20-24.
- [12] 黄翠玲, 黄有度. 带双参数的四次 Wang-Ball 型曲线曲面[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2012, 35(10): 1436-1440.
- [13] 李军成, 李兵, 易叶青. 带参数的同次 Ball 曲线[J]. 中国图象图形学报, 2018, 23(6): 896-905.