Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(1), 169-175
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.131020

极大外平面图中树的 Anti-Ramsey 数

周韦佳*，**马华玮**

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023 年 12 月 17 日；录用日期：2024 年 1 月 11 日；发布日期：2024 年 1 月 17 日

摘 要

对给定的边染色图 G，如果图 G 的每条边颜色都不一样，则称图 G 是彩虹的。**Anti-Ramsey** 数 $AR(K,\mathscr{F})$ 是最大的正整数 k，使得图 K 的任意 k-边染色中，图 K 不包含族 $\mathscr{F}$ 中任意的彩虹图。近些年来，图的 **anti-Ramsey** 数吸引了很多图论学者的关注，其中平面图中图的 **anti-Ramsey** 数得到了深入的研究。**Jiang** 和 **West** 研究了 k 条边的树在完全图上的 **anti-Ramsey** 数，而 k 条边的树在平面图中的 **anti-Ramsey** 数的结论不多。在本文中，我们研究了 k 条边的树在极大外平面图中的 **anti-Ramsey** 数，得到了它的上下界。

关键词

Anti-Ramsey 数，树，极大外平面图

The Anti-Ramsey Number of Trees in Maximal Out-Planar Graph

Weijia Zhou*, **Huawei Ma**

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Dec. 17^{th}, 2023; accepted: Jan. 11^{th}, 2024; published: Jan. 17^{th}, 2024

* 通讯作者。

文章引用: 周韦佳, 马华玮. 极大外平面图中树的 Anti-Ramsey 数 [J]. 应用数学进展, 2024, 13(1): 169-175.
DOI: 10.12677/aam.2024.131020

Abstract

Given a edge-colored graph G, if each edge of G is unique in color, then the graph G is a rainbow graph. The Anti-Ramsey number $AR(K, \mathscr{F})$ is the largest positive integer k such that in any k-edge-colored graph K, the graph K contains no rainbow graph in the family $\mathscr{F}$. In recent years, the anti-Ramsey number of graph has attracted the attention of many scholars, and the anti-Ramsey numbers for graphs in planar graph has been deeply studied. Jiang and West studied the anti-Ramsey number of trees with k edges in complete graph, while few conclusions were drawn on the anti-Ramsey number of trees with k edges in planar graph. In this paper, we study the anti-Ramsey number of trees with k edges in maximal out-planar graph and get its upper and lower bounds.

Keywords

Anti-Ramsey Number, Tree, Maximal Out-Planar Graph

1. 引言

如果一个边染色图 G 的每一条边的颜色是不同的, 那么我们称图 G 是彩虹的. 对于给定的图 K 和图族 $\mathscr{F}$, 使得边染色图 G 中不存在族 $\mathscr{F}$ 中的彩虹子图的最大颜色数, 定义为 $\mathscr{F}$ 在图 G 中的 anti-Ramsey 数, 记作 $AR(K, \mathscr{F})$.

Anti-Ramsey 数最早由 Erdős 等人 [1] 在 20 世纪 70 年代提出, 揭示了图在完全图中的 anti-Ramsey 数与图的 Turán 数密切相关, 并考虑了当 $k \leq 6$ 时, 圈在完全图中的 anti-Ramsey 数的结论. 后来, 该问题由 Montellano-Ballesteros 等人 [2] 完全解决. 之后, 以完全图为母图的 anti-Ramsey 数被广泛研究, 如路 [3], 团 [4], 圈 [5–7], 匹配 [4, 7–9], 森林 [10, 11] 等图在完全图中的 anti-Ramsey 数. 近二十年来, 对于 anti-Ramsey 数的研究开始以一些特殊的图类作为母图, 比如: 完全二部图 [12–14], 平面图 [15–17] 等.

关于 k 条边的树的 anti-Ramsey 数的研究并不多. 最早出现在 Jiang 和 West [18] 的结论中,

他们确定了 k 条边的树在完全图 K_n 中的 anti-Ramsey 数. 之后, Jin 和 Li [14] 考虑了其在完全二部图中的 anti-Ramsey 数. 最近, Zhang 和 Dong [19] 给出了一个公式来刻画 k 条边的树在完全多部图上的值. 同时给出了当 $\max\{2, n-3\} \le k \le n-1$ 以及 $\frac{4n-2}{5} \le k \le n-1$ 时具体的值, 当 k 很小的时候, 很难计算出其具体的值. 在本文中, 我们考虑母图是极大外平面, 给出了 k 条边的树在其上的 anti-Ramsey 数的范围.

为了方便叙述本文的主要结论, 下面给出需要用到的定义和符号. 给定一个图 G, $V(G)$ 表示图 G 的顶点集, $E(G)$ 表示图 G 的边集. 对于任意两个顶点 $u, v \in V(G)$, 边 $e \in E(G)$, 若 $e = uv$, 则称顶点 u 和 v 是相邻的, 并称顶点 u 或 v 与边 e 是关联的. 对于图 G 和 H, 若满足 $V(H) \subseteq V(G)$ 和 $E(H) \subseteq E(G)$, 则称 H 是图 G 的一个子图, 记作 $H \subseteq G$. 若 $V(H) = V(G)$, 则称 H 是 G 的生成子图. 此外, 若 H 是图 G 的一个子图, F_1, F_2 分别是图 H 的两个分支, 其中点 $x \in F_1$, $y \in F_2$, 如果 $xy \in G$, 那么称 F_1 与 F_2 在 G 中是相邻的.

T_k 表示 k 条边的树, $\mathscr{F}$ 表示为所有 k 条边的树的集合. 图 G 的分支匹配是指: 令图 G 为极大外平面图 M_n 的生成子图, 且 $F_1, F_2, \cdots, F_s$ 分别是 G 的分支. 构造图 G^*, 使得 $V(G^*) = \{F_1, F_2, \cdots, F_s\}$, 其中 $F_iF_j \in E(G^*)$ 当且仅当存在点 $u \in V(F_i), v \in V(F_j)$, 满足 $uv \in E(M_n)$. 给定图 G^* 的最大匹配 I. 若 $F_iF_j \in I$, 称分支 F_i 与 F_j 匹配成功. 若 F_i 是 I 未饱和的, 则称分支 F_i 为孤立分支. 接着上述定义, 我们进一步给出如下定义. 假设 F_i 与 F_j 匹配成功. 若 F_i 与 F_j 在 G 中均为孤立点, 则称 F_i 与 F_j 为孤立点匹配分支. 否则称为非孤立点匹配分支.

2. 极大外平面图中 k 条边的数的范围

令 M_n 是一个阶数为 n 的极大外平面图.

Theorem 2.1. 令 $k \ge 4$, $n \equiv c \pmod k$, 以及

$$f(k) = \begin{cases} (2k-5)\lfloor n/k \rfloor + 1, & 0 \le c \le 2, \\ 2n - 5\lfloor n/k \rfloor - 4, & 3 \le c \le k-1. \end{cases}$$

我们有 $f(k) \le AR(M_n, \mathscr{F}_k) \le 2n - \frac{6n}{2k-1}$.

证明: 首先我们证明下界. 令 M_n 是一个阶数为 n 的极大外平面图且对 M_n 进行如下边染色,

情形 1. $c = 0$.

令 M_n 是一个阶数为 n 的极大外平面图, 设边集 $E(M_n) = E(C_n) \cup \{x_ix_{i+2}, x_ix_{i+3}, \cdots, x_ix_{i+k-2} | i = (t-1)k+1, t \in [n/k]\} \cup \{x_nx_{j-1}, x_nx_j, x_nx_{j+1} | j = tk, t \in [n/k-1]\}$.

将 $x_ix_{i+2}, x_ix_{i+3}, \cdots, x_ix_{i+k-2}$ 染不同的颜色, 其中 $i = (t-1)k+1, t \in [n/k]$. 将 $x_jx_{j+1}\cdots x_{j+k-2}$ 染新的不同的颜色, 其中 $j = (t-1)k+1, t \in [n/k]$. 剩下的边用新的同一种颜色染. 以上构造了 M_n 的 $((2k-5)n/k+1)$-边染色, 且这种边染色不包含彩虹的 k 条边的树, 因此下界成立.

情形 2. $1 \le c \le 2$.

令 M_n 是一个阶数为 n 的极大外平面图, 设边集 $E(M_n) = E(C_n) \cup \{x_ix_{i+2}, x_ix_{i+3}, \cdots, x_ix_{i+k-2} | i = (t-1)k+1, t \in [\lfloor n/k \rfloor]\} \cup \{x_nx_{j-1}, x_nx_j, x_nx_{j+1} | j = tk, t \in [\lfloor n/k \rfloor - 1]\} \cup$

$\{x_n x_{k\lfloor n/k\rfloor-1}, x_n x_{k\lfloor n/k\rfloor}\}$.

将 $x_i x_{i+2}, x_i x_{i+3}, \cdots, x_i x_{i+k-2}$ 染不同的颜色, 其中 $i=(t-1)k+1, t\in[\lfloor n/k\rfloor]$. 将 $x_j x_{j+1}\cdots x_{j+k-2}$ 染新的不同的颜色, 其中 $j=(t-1)k+1, t\in[\lfloor n/k\rfloor]$. 剩下的边用新的同一种颜色染. 以上构造了 M_n 的 $((2k-5)\lfloor n/k\rfloor+1)$-边染色, 且这种边染色不包含彩虹的 k 条边的树, 因此下界成立.

情形 3. $3\le c\le k-1$.

令 M_n 是一个阶数为 n 的极大外平面图, 设边集 $E(M_n)=E(C_n)\cup\{x_i x_{i+2}, x_i x_{i+3}, \cdots, x_i x_{i+k-2} | i=(t-1)k+1, t\in[\lfloor n/k\rfloor]\}\cup\{x_n x_{j-1}, x_n x_j, x_n x_{j+1} | j=tk, t\in[\lfloor n/k\rfloor]\}\cup\{x_{k\lfloor n/k\rfloor+1} x_{k\lfloor n/k\rfloor+3}, x_{k\lfloor n/k\rfloor+1} x_{k\lfloor n/k\rfloor+4}, \cdots, x_{k\lfloor n/k\rfloor+1} x_{n-1}\}$.

将 $x_i x_{i+2}, x_i x_{i+3}, \cdots, x_i x_{i+k-2}$ 染不同的颜色, 其中 $i=(t-1)k+1, t=[\lfloor n/k\rfloor]$. 将 $x_j x_{j+1}\cdots x_{j+k-2}$ 染新的不同的颜色, 其中 $j=(t-1)k+1, t=[\lfloor n/k\rfloor]$. 同时将 $x_{k\lfloor n/k\rfloor+1} x_{k\lfloor n/k\rfloor+3}, x_{k\lfloor n/k\rfloor+1} x_{k\lfloor n/k\rfloor+4}, \cdots, x_{k\lfloor n/k\rfloor+1} x_{n-1}$ 以及 $x_{k\lfloor n/k\rfloor+1} x_{k\lfloor n/k\rfloor+2\cdots x_{n-1}}$ 染不同的颜色. 剩下的边用新的同一种颜色染. 以上构造了 M_n 的 $(2n-5\lfloor n/k\rfloor-4)$-边染色, 且这种边染色不包含彩虹的 k 条边的树, 因此下界成立.

为了证明上界，我们只需证明 M_n 的任意 $\left(2n-\frac{6n}{2k-1}+1\right)$-边染色都包含彩虹的 k 条边的树. 假设存在一个边染色 c 使得 M_n 不包含彩虹的 k 条边的树且 $|c|=2n-\frac{6n}{2k-1}+1$. 设 G 是 M_n 的一个代表子图, 显然 $|V(G)|=n$ ， $|E(G)|=2n-\frac{6n}{2k-1}+1$.

我们令 $F_1, F_2, \cdots, F_s$ 为 G 的分支, s 为 G 的分支数. 因为 G 中不存在 k 条边的树, 则 G 的每一个分支的阶数小于等于 k. 对于任意在 M_n 中相邻的两个分支 F_i, F_j, 设 $|V(F_i)|=n_1$, $|V(F_j)|=n_2$. 假设 $n_1=n_2=k$. 由于 F_i, F_j 是两个在 M_n 中相邻的分支, 则存在 $x'\in V(F_i), y'\in V(F_j)$, 有 $x'y'\in E(M_n)$. 由于 $x'y'\notin E(G)$, 那么一定存在一条边 $e'\in E(G)$ 且 $c(x'y')=c(e')$. 我们发现 $G-e'+x'y'$ 中存在 k 条边的树, 矛盾. 因此 $n_1+n_2\le 2k-1$.

接下来我们将图 G 进行分支匹配. 假设: (1) 存在 m_1 对是孤立点匹配分支. (2) 存在 m_2 对非孤立点匹配分支, 且每对匹配的分支的顶点数之和小于等于 k, 我们设 m_2 对非孤立点匹配分支顶点数之和是 n_2. (3) 存在 m_3 对非孤立点匹配分支, 且每对匹配的分支的顶点数之和大于等于 $k+1$, 我们设 m_3 对非孤立点匹配分支顶点数之和是 n_3. (4) 存在 m_4 个孤立分支 $F_{i1}, F_{i2}, \cdots, F_{il}$ 没有匹配, 且 $|V(F_{i1})|+|F_{i2}|+\cdots+|F_{il}|=n_4$.

我们容易得到 $s=2m_1+2m_2+2m_3+m_4$, $n=2m_1+n_2+n_3+n_4$, $m_2\ge\lceil n_2/k\rceil$, $m_3\ge\lceil n_3/(2k-1)\rceil$.

Claim 1 任意两个在 M_n 中相邻的分支 F_i, F_j, 令 $|V(F_i)|=n_1$, $|V(F_j)|=n_2$. 如果 $3\le n_1+n_2\le k$, 那么 $|E(F_i)|+|E(F_j)|\le 2(n_1+n_2)-5$.

因为 F_i, F_j 是极大外平面图 M_n 的分支, 若 $n_1=1$, 即 F_i 为孤立点分支, 则 $|E(F_i)|=2n_1-2=0$. 因为 $3\le n_1+n_2\le k$, 所以 $2\le n_2\le k-1$. 由于 F_j 是极大外平面图上的分支, 我们有 $|E(F_j)|\le 2n_2-3$. 因此 $|E(F_i)|+|E(F_j)|\le 2n_2-3=2(n_1+n_2)-5$.

若 $n_1\ge 2$, 由于 F_i 是极大外平面图 M_n 的分支, 则 $|E(F_i)|\le 2n_1-3$. 假设 $n_2=1$. 那么此时与 $n_1=1$ 时的情况相同, 所以 $n_2\ge 2$, 因此 $|E(F_i)|+|E(F_j)|\le 2n_1-3+2n_2-3=2(n_1+n_2)-6$.

综上, 我们有 $|E(F_i)| + |E(F_j)| \le 2(n_1 + n_2) - 5$.

Claim 2 任意两个在 M_n 中相邻的分支 F_i, F_j, $|V(F_i)| = n_1$, $|V(F_j)| = n_2$. 如果 $k+1 \le n_1 + n_2 \le 2k-1$, 那么 $|E(F_i)| + |E(F_j)| \le 2(n_1 + n_2) - 6$.

由于 F_i, F_j 是两个在 M_n 中相邻的分支, 则存在 $x \in V(F_i), y \in V(F_j)$, 有 $xy \in E(M_n)$. 假设 F_i, F_j 中不存在割边. 由于 $xy \notin E(G)$, 那么一定存在一条边 $e \in E(G)$ 且 $c(xy) = c(e)$. 我们发现在 $G - e + xy$ 中存在 k 条边的树, 矛盾. 因此 F_i, F_j 中至少存在一条割边.

假设 F_i, F_j 中存在一个孤立点分支 F_i. 因为 $k+1 \le n_1 + n_2 \le 2k-1$ 且 $|V(F_j)| \le k$, 所以 $|V(F_j)| = n_2 = k$. 根据断言 1, 我们可以得到 $|E(F_j)| \le 2k-4$. 因此 $|E(F_i)| + |E(F_j)| \le 2(n_1 + n_2) - 6 = 2k - 4$.

假设 F_i, F_j 中不存在一个孤立点分支. 假设 $n_1 = 2$. 因为 $k+1 \le n_1 + n_2 \le 2k-1$, 所以 $k-1 \le n_2 \le k$. 假设 $n_2 = k$. 假设 F_j 中不存在割边. 由于 F_i, F_j 是两个在 M_n 中相邻的分支, 存在 $x_1 \in V(F_i), y_1 \in V(F_j)$, 有 $x_1y_1 \in E(M_n)$. 由于 $x_1y_1 \notin E(G)$, 那么一定存在一条边 $e_1 \in E(G)$ 且 $c(x_1y_1) = c(e_1)$. 我们发现在 $G - e_1 + x_1y_1$ 中存在 k 条边的树, 矛盾. 所以 F_j 中至少存在一条割边. 根据断言 1, 我们有 $|E(F_j)| \le 2k-4$. 因此 $|E(F_i)| + |E(F_j)| \le 2(n_1 + n_2) - 7 = 2k - 3$. 当 $n_2 = k-1$ 时, 我们可以得到 $|E(F_i)| + |E(F_j)| \le 2(n_1 + n_2) - 6 = 2k - 4$.

假设 $3 \le n_1 \le k$. 因为 $k+1 \le n_1 + n_2 \le 2k-1$, 所以 $3 \le n_2 \le k$. 由于 F_i, F_j 中至少存在一条割边. 假设割边在 F_i 中. 我们得到 $|E(F_i)| \le 2n_1 - 4$, $|E(F_j)| \le 2n_2 - 3$. 因此我们有 $|E(F_i)| + |E(F_j)| \le 2(n_1 + n_2) - 7$.

综上所述, 我们有 $|E(F_i)| + |E(F_j)| \le 2(n_1 + n_2) - 6$.

根据上述的分析, 我们可以知道

$$\begin{aligned}
|E(G)| \le& 2n_2 - 5m_2 + 2n_3 - 6m_3 + 2n_4 - 2m_4 \\
\le& 2n_2 - 5\lceil n_2/k \rceil + 2n_3 - 6\lceil n_3/(2k-1) \rceil + 2n_4 - 2m_4 \\
=& 2(n - 2m_1) - 5\lceil n_2/k \rceil - 6\lceil n_3/(2k-1) \rceil - 2m_4 \\
\le& 2n - 5\lceil n_2/k \rceil - 6\lceil n_3/(2k-1) \rceil \\
\le& 2n - 6n/(2k-1) < 2n - 6n/(2k-1) + 1,
\end{aligned}$$

矛盾. 因此上界成立.

综上所述, 定理 2.1 证明完毕. □

3. 总结

本论文在 [14,19] 的基础上深入研究了边染色图中 k 条边的树的 anti-Ramsey 数的问题, 考虑了其在极大外平面图中的 anti-Ramsey 数. 本论文先通过极值染色的方法得到以极大外平面图为母图的 k 条边的树的 anti-Ramsey 数的上界, 接着采用一种方法对图的分支进行配对, 通过分支的配对以及极大外平面图的性质来计算图的边数, 从而得到矛盾证明上界, 最终得到定理成立. 由于 k

条边的树在不同母图上的 anti-Ramsey 数的结论较少, 本论文的研究也为今后继续研究其它母图中 k 条边的树的 anti-Ramsey 数提供思路. 对于今后的研究方向主要是继续缩小 k 条边的树在极大外平面图中 anti-Ramsey 数的范围, 以及其它母图中 k 条边的树的 anti-Ramsey 数.

参考文献

[1] Erdős, P., Simonovits, M., and Sós, V.T. (1975) Anti-Ramsey Theorems. In: Hajnal, A., Rado, R. and Sós, V.T., Eds., *Infinite and Finite Sets: To Paul Erdős on His 60th Birthday*, North-Holland, Amsterdam, 633-643.

[2] Montellano-Ballesteros, J.J. and Neumann-Lara, V. (2002) An Anti-Ramsey Theorem. *Combinatorica*, **22**, 445-449. https://doi.org/10.1007/s004930200023

[3] Simonovits, M. and Sós, V.T. (1984) On Restricting Colorings of K_n. *Combinatorica*, **4**, 101-110. https://doi.org/10.1007/BF02579162

[4] Schiermeyer, I. (2004) Rainbow Numbers for Matchings and Complete Graphs. *Discrete Mathematics*, **286**, 157-162. https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.11.057

[5] Axenovich, M., Jiang, T. and Kündgen, A. (2004) Bipartite Anti-Ramsey Numbers of Cycles. *Journal of Graph Theory*, **47**, 9-28. https://doi.org/10.1002/jgt.20012

[6] Jiang, T. and West, D.B. (2003) On the Erdős-Simonovits-Sós Conjecture on the Anti-Ramsey Number of a Cycle. *Combinatorics, Probability and Computing*, **12**, 585-598. https://doi.org/10.1017/S096354830300590X

[7] Jahanbekam, S. and West, D.B. (2016) Anti-Ramsey Problems for t Edge-Disjoint Rainbow Spanning Subgraphs: Cycles, Matchings, or Trees. *Journal of Graph Theory*, **82**, 75-89. https://doi.org/10.1002/jgt.21888

[8] Alon, N. (1983) On a Conjecture of Erdős Simonovits and Sós Concerning Anti-Ramsey Theorems. *Journal of Graph Theory*, **7**, 91-94. https://doi.org/10.1002/jgt.3190070112

[9] Chen, H., Li, X.L. and Tu, J.H. (2009) Complete Solution for the Rainbow Numbers of Matchings. *Discrete Mathematics*, **309**, 3370-3380. https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.10.002

[10] Xie, T.Y. and Yuan, L.T. (2020) On the Anti-Ramsey Numbers of Linear Forests. *Discrete Mathematics*, **343**, Article 112130. https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.112130

[11] Fang, C.Q., Győri, E., Lu, M. and Xiao, J.M. (2021) On the Anti-Ramsey Number of Forests. *Discrete Applied Mathematics*, **291**, 129-142. https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.08.027

[12] Jia, Y.X., Lu, M. and Zhang, Y. (2019) Anti-Ramsey Problems in Complete Bipartite Graphs for t Edge-Disjoint Rainbow Spanning Subgraphs: Cycles and Matchings. *Graphs and Combinatorics*, **35**, 1011-1021. https://doi.org/10.1007/s00373-019-02053-y

[13] Jin, Z.M. and Zang, Y.P. (2017) Anti-Ramsey Coloring for Matchings in Complete Bipartite Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **33**, 1-12.

[14] Jin, Z.M. and Li, L.F. (2013) Edge-Colorings of Complete Bipartite Graphs without Large Rainbow Trees. *Ars Combinatoria*, **111**, 75-84.

[15] Jendrol', S. (2019) On Rainbow Matchings in Plane Triangulations. *Discrete Mathematics*, **342**, Article 111624. https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.111624

[16] Horňák, M., Jendrol', S., Schiermeyer, I. and Soták, R. (2015) Rainbow Numbers for Cycles in Plane Triangulations. *Journal of Graph Theory*, **78**, 248-257.
https://doi.org/10.1002/jgt.21803

[17] Jendrol', S., Schiermeyer, I. and Tu, J.H. (2014) Rainbow Numbers for Matchings in Plane Triangulations. *Discrete Mathematics*, **331**, 158-164.
https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.05.012

[18] Jiang, T. and West, D.B. (2004) Edge-Colorings of Complete Graphs That Avoid Polychromatic Trees. *Discrete Mathematics*, **274**, 137-145.
https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.09.002

[19] Zhang, M.Q. and Dong, F.M. (2022) Anti-Ramsey Numbers for Trees in Complete Multi-Partite Graphs. *Discrete Mathematics*, **345**, Article 113100.
https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.113100