Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(3), 1080-1098
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.133102

星图的强连通度

张慧英，王世英*

山西师范大学数学与计算机科学学院，山西 太原

收稿日期：2024年2月27日；录用日期：2024年3月21日；发布日期：2024年3月28日

摘 要

大量数据的处理和复杂问题的解决对多处理器系统的性能要求越来越高，许多多处理器系统都将互连网络作为底层拓扑结构。互连网络决定了多处理器系统的性能，在处理器和它们之间通信链路可能发生故障的系统中，考虑网络的容错性是非常重要的。传统的点连通性只针对处理器故障，边连接性只针对通信链路故障的问题。在此背景下，提出了网络的强连通性，它允许处理器和通信链路同时故障。在互连网络的设计中，最基本的考虑因素之一是网络的连通性。n维星图S_n作为互连网络的一种有利的拓扑结构，具有许多优良的性质。因此我们给出了S_n的强连通性以及强自然连通性。

关键词

互联网络，强连通度，强自然连通度，连通性，星图

The Strong Connectivity of Star Graphs

Huiying Zhang, Shiying Wang*

School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Taiyuan Shanxi

Received: Feb. 27th, 2024; accepted: Mar. 21st, 2024; published: Mar. 28th, 2024

* 通讯作者。

文章引用: 张慧英, 王世英. 星图的强连通度[J]. 应用数学进展, 2024, 13(3): 1080-1098.
DOI: 10.12677/aam.2024.133102

Abstract

The processing of large amounts of data and the solution of complex problems are increasingly demanding the performance of multiprocessor systems. Many multiprocessor systems use interconnected networks as the underlying topology. Interconnect networks determine the performance of multiprocessor systems. In systems where processors and the communication links between them are likely to fail, it is important to consider the fault tolerance of the network. Traditional connectivity is only for processor failure, and edge connectivity is only for communication link failure. In this context, the strong connectivity of the network is proposed, which allows simultaneous failure of the processor and communication link. One of the most fundamental considerations in the design of an interconnected network is the connectivity of the network. The n-dimensional star graphs S_n has many excellent properties as a favorable topology for interconnected networks. Therefore, we give the strong connectivity of S_n and strong natural connectivity.

Keywords

Interconnection Network, Strong Connectivity, Strong Nature Connectivity, Star Graph

1. 引言

大量数据的处理和复杂问题的解决对多处理器系统的性能要求越来越高。许多多处理器系统将互连网络(简称网络)作为底层拓扑，因此互连网络得到了广泛的研究。互连网络的体系结构通常表示为无向图G，其中节点(顶点)表示处理器，链接(边)表示处理器之间的通信链接。互连网络决定了多处理器系统的性能，在节点及其链路可能发生故障的系统中，考虑网络的容错性是很重要的。大型网络的容错性通常是衡量网络拓扑中一定数量的节点故障和(或)链路故障时，网络能保持其原始性质的程度。在此背景下，提出了网络的强连通性。对于网络的强连通性，它允许节点和链路同时故障。在互连网络的设计中，最基本的考虑因素之一是网络的连通性。图的传统连通性

只允许节点故障，边连通性只允许链路故障。因此本文给出了网络强连通性的定义以及网络强连通性的一些性质。

一个互连网络通常会被构建成一个无向图$G=(V(G),E(G))$，其中$V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$代表了图$G$的顶点集，$E(G)=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$代表着图$G$的边集，顶点$v$和边$e$分别代表着互连网络中的处理器和处理器之间的通信链路。对于图G的任意一个顶点v，我们用$N_G(v)$来表示点v的邻域，即和v相连的顶点集，令$N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$，用$E_G(v)$表示和v相连的边集。令$U\subseteq V(G)$是图G的一个顶点子集，$N_G(U)=\bigcup_{v\in U}N_G(v)\setminus U$表示顶点集$U$的邻域。令$V'\subseteq V(G)$是图$G$的一个顶点子集，由$V'$诱导出来的一个子图$G[V']$是一个顶点集是$V'$，边集是图$G$中的两个端点都在$V'$中的所有边集的集合。用$d_G(v)$来表示顶点$v$在图$G$中的度，$\delta(G)=\min\{d_G(v)|\ v\in V(G)\}$表示图$G$的最小度。在一个图$G$中，如果任意一个顶点$v$的度都为$k$，那么我们就称图$G$是$k$正则图。如果$d_G(v)=0$，则$v$是一个孤立点。

令$G=(V(G),E(G))$是一个连通图，则图G的连通性(边连通性)$\kappa(G)(\lambda(G))$的一个基本定义是删除后产生不连通的图或平凡图的顶点(边)的最小数目。如果$G-F$是不连通的或者只是一个孤立点，那么F是图G的一个点割，其中$F\subseteq V(G)$。对于$F\subseteq E(G)$，如果$G-F$是不连通的，那么F是图G的一个边割。取一个故障集$F\subseteq V$，如果对于$V\setminus F$中的每个顶点x，都有$|N_G(x)\cap(V\setminus F)|\geq g$，则称$F$是一个$g$-好邻故障集。使得$G-F$不连通的一个$g$-好邻故障集被称为图$G$的一个$g$-好邻割。$g$-好邻割的最小基数称为图$G$的$g$-好邻连通度，用$\kappa^{(g)}(G)$表示。如果$G-F$的每个分支至少有$g+1$个顶点，则称故障集$F\subseteq V(G)$是一个$g$-额外故障集。使得$G-F$不连通的一个$g$-额外故障集被称为图$G$的一个$g$-额外割。$g$-额外割的最小基数称为图$G$的$g$-额外连通度，用$\tilde{\kappa}^{(g)}(G)$表示。

星图已被证明是连接多处理器系统的重要可行候选方法[1]，星图具有节点度低、直径小、对称、容错程度高等特点。星图的性质已经被广泛研究，例如诊断度[2–4]，强Menger连通度[3, 5]，连通性[6, 7]，结构连通度[8, 9]，成分连通度[10]和圈嵌入问题[11, 12]等等。此外在文献[13]中，Wang首次提出了强连通性的概念，并且给出了泡型星图的强连通度和自然连通度。本文主要研究了当$n\geq 4$时，S_n的一些强连通性。本文首先得到了S_n的连通度，在此基础上，通过对S_n原有的点连通度和边连通度进行条件的增加，从而得到了S_n的紧连通性、超连通性等。再结合强连通性得到了强紧超连通性等结论。同时本文也研究了强自然连通性、强紧超自然连通性等结论。有关强连通性的有关概念和性质将在下一部分详细给出。

2. 预备知识

在置换$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$中，$i\to p_i$。为了方便起见，我们可以使用$p_1p_2\cdots p_n$表示置换$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$。每个置换都可以用不相交的乘积表示。例如：$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=(123)$。特别地，$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}=(1)$。两个置换的乘积$\sigma\tau$是先$\tau$后$\sigma$的复合函数，例如：$(12)(13)=(132)$。对于此处没有定义的术语和符号，则遵循[1]。

下面对星图S_n的定义进行简单介绍。星图S_n有$n!$个顶点，并且每个顶点都有$x=x_1x_2\ldots x_n$

的形式，其中$1 \le x_i \le n$，并且对于不同的$1 \le i, j \le n$，有$x_i \ne x_j$。我们定义一个运算"$\circ$"，该运算使得$x = y \circ (i, j)$，例如$x = x_1x_2 \cdots x_i \cdots x_j \cdots x_n$，那么$y = x_1x_2 \cdots x_j \cdots x_i \cdots x_n$，其中$x, y \in V(S_n)$。两个不同的顶点$x, y \in V(S_n)$，$(x, y) \in E(S_n)$ 当且仅当$x = y \circ (1, i)$，且$2 \le i \le n$(见[2])。S_n可以划分为n个子图S_n^1，S_n^2，$\cdots$，S_n^n，其中每个S_n^i在标签字符串的最后一个位置都有一个固定的i，每个S_n^i同构于S_{n-1}，且$1 \le i \le n$。注意S_n是特殊的Cayley图。星图S_4如图 1所示。

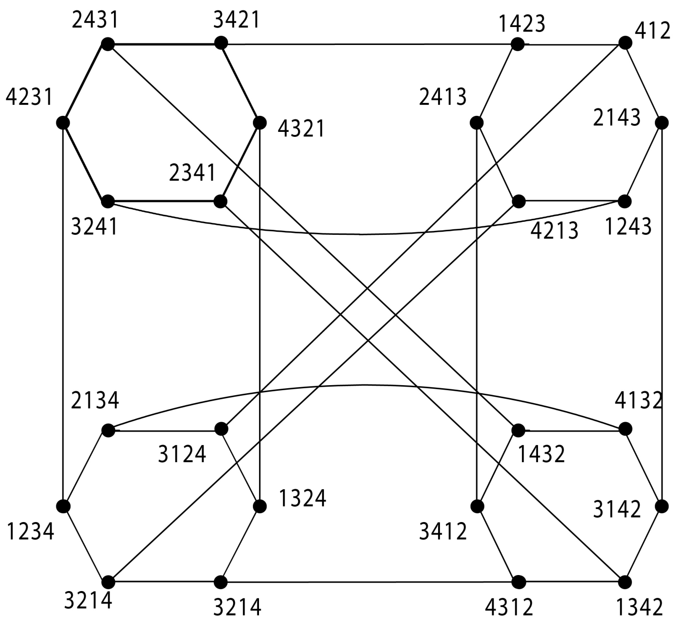

Figure 1. The star graph S_4

图 1. 星图S_4

定义2.1 ([13]) 设$G = (V, E)$是一个非平凡连通图，如果$\delta(G - F) \ge g$，则强故障集$F \subseteq V \cup E$称为强g-好邻故障集。使得$G - F$不连通的一个强g-好邻故障集F 被称为图G 的一个强g-好邻割。强g-好邻割的最小基数称为图G的强g-好邻连通度，用$\kappa\lambda^{(g)}(G)$表示。若图G有一个强g-好邻割，则连通图G是强g-好邻连通的。图G 的强0-好邻连通度也称作图G的强连通度，记为$\kappa\lambda(G)$，图G 的强1-好邻连通度也称作图G的强自然连通度，记为$n\kappa\lambda(G)$。若$F \subseteq E$，则图G的强自然连通度称为图G 的强自然边连通度，表示为$n\lambda(G)$。

假设$g' \ge g$。如果一个连通图G是强g'-好邻连通的，那么图G有一个强g'-好邻割F。因此可以得到$\delta(G - F) \ge g'$，再结合$g' \ge g$，我们有$\delta(G - F) \ge g$。因此，图G也是强g-好邻连通的。由此我们有下述定理成立。

定理2.2 ([13]) 令$g' \ge g$，且G是一个强g'-好邻连通图。那么$\kappa\lambda^{(g')}(G) \ge \kappa\lambda^{(g)}(G)$。

定义2.3 ([13]) 设$G = (V, E)$是一个非平凡连通图，如果$G - F$的每个分支至少有$g + 1$个顶点，则强故障集$F \subseteq V \cup E$ 称为强g-额外故障集。使得$G - F$不连通的一个强g- 额外故障集F 被称为图G 的一个强g-额外割。强g-额外割的最小基数称为图G的强g-额外连通度，用$\tilde{\kappa}\lambda^{(g)}(G)$表示。若图$G$有一个强$g$-额外割，则连通图$G$ 是强g-额外连通的。

假设$g' \ge g$。如果一个连通图G是强g'–额外连通的，那么图G有一个强g'-额外割F。因此可以

得到$G-F$的每个分支至少有$g'+1$个顶点，再结合$g'\ge g$，我们有$G-F$的每个分支至少有$g+1$个顶点。因此，图G也是强g-额外连通的。由此我们有下述定理成立。

定理2.4 ([13]) 令$g'\ge g$，且G是一个强g'-额外连通图。那么$\tilde{\kappa}\lambda^{(g')}(G)\ge\tilde{\kappa}\lambda^{(g)}(G)$。

定理2.5 ([13]) 令G是一个强g-好邻连通图，那么$\kappa\lambda^{(g)}(G)\ge\tilde{\kappa}\lambda^{(g)}(G)$。

定理2.6 ([13]) 令G是一个强g-额外连通图，那么当$g=01$时，有$\kappa\lambda^{(g)}(G)=\tilde{\kappa}\lambda^{(g)}(G)$。

在这一部分中，通常假设$n\ge 4$，并且根据最后一个位置的标签字符串i对S_n进行划分，其中$1\le i\le n$。定义$E_{i,j}(S_n)=E_{S_n}(V(S_n^i),V(S_n^j))$，其中$i,j\in[1,n]$且$i\ne j$。对于任意的$x\in V(S_n^i)$，我们定义$x^+=x\circ(1,n)$，称它为$x$的外部邻域，并且令$N(x)$为顶点$x$在$S_n$中的所有邻域。$S_n$有以下性质。

命题1 ([1]) 对任意的整数$n\ge 1$，S_n是$n-1$正则的，是点传递和边传递的。

命题2 ([13]) 对任意的整数$n\ge 2$，S_n是二部图。

命题3 ([14]) 对任意的整数$n\ge 3$，S_n的围长是6。

命题4 ([14]) 对任意的整数$n\ge 2$，$\lambda(S_n)=\kappa(S_n)=n-1$。

命题5 ([13]) 对任意的$i,j\in[1,n]$且$i\ne j$，$|E_{i,j}(S_n)|=(n-2)!$。

命题6 ([15]) 对任意的$x,y\in V(S_n)$，若x与y相邻，则它们两个没有相同的邻域，即$|N(x)\cap N(y)|=0$；若x与y不相邻，则最多有一个相同的邻域，即$|N(x)\cap N(y)|\le 1$。

命题7 ([15]) 对任意的$x,y\in V(S_n^i)$，其中$i\in[1,n]$，有$x^+\ne y^+$。

3. S_n的强紧超连通性

定理3.1 对任意的整数$n\ge 3$，$\kappa\lambda(S_n)=n-1$。

证明： 令F是S_n的最小强割。若$F\subseteq V(S_n)$，根据命题4，有$|F|=n-1$。若$F\subseteq E(S_n)$，根据命题4，有$|F|=n-1$。故该定理的结果在上述情况中成立。因此，假设$n\ge 3$且$F\nsubseteq V(S_n),F\nsubseteq E(S_n)$，令$F_v=F\cap V(S_n)$，$F_v\ne\emptyset$，并且令$F_e=F\cap E(S_n)$，$F_e\ne\emptyset$。假设$F$是$S_n$的最小强割，且$|F|\le n-2$。因为$|F_v|\le n-3$，由命题4得$S_n-F_v$是连通的。因为$F_e$是$S_n-F_v$的最小边割，所以$S_n-F_v-F_e$有两个分支。令$|F_e|=i$，因为$n\ge 3$，所以$n!-|F_v|\ge n!-(n-2-i)>2(i+1)$成立。因此，在$S_n-F_v-F_e$中有一个分支$C$，使得$|V(C)|\ge i+1$。在$C$中，令顶点集$V_c$是由在$S_n-F_v$与$F_e$关联的顶点构成。因此$|V_c|\le|F_e|=i$。由于$|V_c|+|F_v|\le|F_v|+|F_e|=|F|\le n-2$，故根据命题4，可得$S_n-F_v-F_e$是连通的，与$F$是$S_n$的最小强割矛盾。故$|F|\ge n-1$。

令$u=(1)$，$v=(12)$，并且令$F=\{(1,i):3\le i\le n\}\cup\{uv\}$，则$F$是$S_n$的一个强割，因此$\kappa\lambda(S_n)\le n-1$。结合$\kappa\lambda(S_n)\ge n-1$，有$\kappa\lambda(S_n)=n-1$。

如果一个图G的每个最小顶点割F都能孤立出来一个顶点，则连通图G是超连通的。此外，若$G-F$有两个分支，其中一个分支是孤立点，则图G是紧$|F|$超连通的。

定理3.2 对任意的整数$n\ge 4$，S_n是紧$(n-1)$超连通的。

证明： 令F是S_n的最小顶点割，由命题4，$|F| = n-1$。令$F_i = F \cap V(S_n^i)$，其中$i \in [1,n]$，且$|F_1| \geq |F_2| \geq \cdots \geq |F_n|$。令$S_n - F$是不连通的，对$n$进行分类讨论。

(1) $n = 4$

当$n = 4$时，$|F| = n-1 = 3$，并且$S_4^i \cong S_3$，需考虑以下情况。

情况1： $|F_1| = 1$

由$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq |F_4|$可知$|F_1| = |F_2| = |F_3| = 1$，$|F_4| = 0$。由命题4可知，$S_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [1,4]$。又由命题5可知，任意两个不同的子图$S_4^i$之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边，则$S_4[V(S_4^i - F_i) \cup V(S_4^4 - F_4)]$ 是连通的，其中$i \in [1,3]$。因此$S_4 - F$ 是连通的，矛盾。

情况2： $|F_1| = 2$

由$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq |F_4|$可知$|F_2| = 1$，$|F_3| = |F_4| = 0$。由$S_4^i \cong S_3$和命题4可知，$S_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2,4]$。由命题5和命题7 可知$S_4[V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)]$是连通的。由$|F_1| = 2$可知$S_4^1 - F_1$ 是连通的，或者有两个分支且均为K_2，或者有两个分支，其中一个分支是孤立点。若$S_4^1 - F_1$是连通的或者有两个分支且均为K_2，由命题5可知$S_4 - F$是连通的，矛盾。若$S_4^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点u。若$u^+ = F_2$，则$S_4[V(S_4^1 - u - F_1) \cup V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)]$是连通的。因此，$S_4 - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点$u$。若$u^+ \neq F_2$，则$S_4 - F$是连通的，矛盾。

情况3： $|F_1| = 3$

由$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq |F_4|$可知$|F_i| = 0$，其中$i \in [2,4]$。由$S_4^i \cong S_3$和命题4可知，$S_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2,4]$。由命题5可知$S_4[V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)]$是连通的。又由命题5可知$|E_{1,i}(S_n)| = 2$，其中$i \in [2,4]$。因此由$|F_1| = 3$可知$S_4 - F$是连通的，矛盾。

(2) $n \geq 5$

对于$n = 4$时结论成立，因此对n进行归纳假设。假设$n \geq 5$时，对于S_{n-1}结果成立，即若F是S_{n-1} 的最小顶点割且$|F| = n-2$时，$S_{n-1} - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。现在考虑S_n的情况：

情况1： $|F_1| \leq n-3$

由$|F_1| \leq n-3$可知$|F_i| \leq n-3$，其中$i \in [1,n]$。由命题4可知，$S_n^i - F_i$是连通的，其中$i \in [1,n]$。又由命题5可知，任意两个不同的子图S_n^i之间有$(n-2)!$ 条独立的交叉边。又$n \geq 5$，则$(n-2)! \geq 2n-6 \geq |F_i| + |F_j|$，其中$i \neq j$且$i,j \in [1,n]$，由命题7可知，$S_n[V(S_n^i - F_i) \cup V(S_n^j - F_j)]$是连通的，其中$i \neq j$且$i,j \in [1,n]$，因此$S_n - F$是连通的，矛盾。

情况2： $|F_1| = n-2$

由$|F_1| = n-2$可知$|F_2| = 1$，$|F_i| = 0$，其中$i \in [3,n]$。由命题4和命题5可知，$S_n[V(S_n^2 - F_2) \cup V(S_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)]$是连通的。假设$S_n^1 - F_1$是连通的，由$n \geq 5$且$|E_{i,j}(S_n)| = (n-2)! > n-1 \geq |F_i| + |F_j|$，其中$i \neq j$且$i,j \in [1,n]$，则$S_n - F$是连通的，矛盾。从而$S_n^1 - F_1$是不连通的，由归纳假设可知，$S_n^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点$v$。若$v^+ = F_2$，结合$S_n[V(S_n^1 - v - F_1) \cup V(S_n^2 - F_2) \cup V(S_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)]$是连通的，则$S_n - F$有两个分

支，其中一个分支是孤立点。若$v^+ \neq F_2$，则$S_n - F$是连通的，矛盾。

情况3： $|F_1| = n - 1$

由$|F_1| = n-1$可知，$|F_i| = 0$，其中$i \in [2, n]$。由命题4和命题5可知，$S_n[V(S_n^2 - F_2) \cup V(S_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)]$，又由$S_n$的定义可知，$S_n^1 - F_1$中的每个点都有1个外部邻域，因此$S_n - F$是连通的，矛盾。

综上可得，S_n是紧$(n-1)$超连通的。

如果图G的每个最小边割F都能孤立出来一个顶点，则连通图G是紧超$|F|$边连通的。

定理3.3 对任意的整数$n \geq 4$，S_n是紧超$(n-1)$边连通的。

证明： 令F是S_n的最小边割，由命题4，$|F| = n - 1$。令$F_i = F \cap E(S_n^i)$，其中$i \in [1, n]$，且$|F_1| \geq |F_2| \geq \cdots \geq |F_n|$。设$C$是$S_n$中所有的交叉边构成的集合，同时令$F_c = F \cap C$。下面我们对$n$进行分类讨论。

(1) $n = 4$

当$n = 4$时，$|F| = n - 1 = 3$且$S_4^i \cong S_3$。

情况1： $|F_1| \leq 1$

由$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq |F_4|$可知$|F_i| \leq 1$，其中$i \in [1, 4]$。由$S_4^i \cong S_3$和命题4可知，$S_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [1, 4]$。又由命题5可知，任意两个不同的子图$S_4^i$之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边。注意$|F| = 3$，不失一般性，假设$|F_c \cap E_{1,2}(S_4)| = 2$，因为$|F_c| \leq 3$且1子图所有顶点的外部邻域有$(n-1)! = 6$，由命题5可知，$S_4[V(S_4^1 - F_1) \cup V(S_4^j - F_j)] - F_c$是连通的，其中$j \in \{3, 4\}$。相似地，$S_4[V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^j - F_j)] - F_c$ 是连通的，其中$j \in \{3, 4\}$。因此，$S_4 - F$是连通的，与F是S_4的最小边割矛盾。令$|F_c \cap E_{i,j}(S_4)| = 2$，$i, j \in [1, 4]$且$i \neq j$。类似地，$S_4 - F$是连通的，矛盾。

情况2： $|F_1| = 2$

由$|F_1| = 2$可得$|F_i| \leq 1$且$|F_c| \leq 1$，其中$i \in [2, 4]$。由$S_4^i \cong S_3$和命题4可知，$S_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2, 4]$。又由命题5可知，$S_4[V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的。由$|F_1| = 2$可知，$S_4^1 - F_1$是不连通的，则$S_4^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点，或者有两个非平凡的连通分支。假设$S_4^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点v，若$|F_c| = 1$且与v关联，则$S_4[V(S_4^1 - v - F_1) \cup V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的。因此$S_4 - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点$v$。若$|F_c| \neq 1$且不与$v$关联，或$|F_c| = 0$，则$S_4 - F$是连通的，矛盾。假设$S_4^1 - F_1$有两个非平凡的连通分支，又由$|F_c| \leq 1$，可知$S_4 - F$是连通的，矛盾。

情况3： $|F_1| = 3$

此时，$|F_2| = |F_3| = |F_4| = |F_c| = 0$，由命题4和命题5可知，$S_4 - F$是连通的，矛盾。

(2) $n \geq 5$

结论在$n = 4$时成立，对n进行数学归纳法。假设$n \geq 5$时，结论对S_{n-1}成立，即若F是S_{n-1} 的一个最小边割且$|F| = n - 2$，则$S_{n-1} - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。下面考虑S_n 的情

况：

情况1：$|F_1| \leq n-3$

由$|F_1| \leq n-3$可知$|F_i| \leq n-3$，其中$i \in [1,n]$，且$|F_c| \leq n-1$。由命题4可知，$S_n^i - F_i$是连通的，其中$i \in [1,n]$。又由命题5可知，任意两个不同的子图S_n^i 之间有$(n-2)!$ 条独立的交叉边，且$(n-2)! > n-1 \geq |F_c|$，其中$n \geq 5$，则$S_n[V(S_n^i - F_i) \cup V(S_n^j - F_j)] - F_c$是连通的，其中$i,j \in [1,n]$且$i \neq j$。故$S_n - F$是连通的，矛盾。

情况2：$|F_1| = n-2$

由$|F_1| = n-2$可知$|F_i| \leq 1$，其中$i \in [2,n]$，且$|F_c| \leq 1$。由命题4可知，$S_n^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2,n]$。又由命题5可知，任意两个不同的子图S_n^i之间有$(n-2)!$ 条独立的交叉边，且$(n-2)! > 1$，其中$n \geq 5$，所以$S_n[V(S_n^2 - F_2) \cup V(S_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)] - F_c$是连通的。由于$|F_1| = n-2$且$S_n^1 \cong S_{n-1}$，假设$S_n^1 - F_1$是连通的，则$S_n - F$ 是连通的，矛盾。从而$S_n^1 - F_1$是不连通的，由归纳假设，$S_n^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点v，若$|F_c| = 1$且与v关联，则$S_n[V(S_n^1 - v - F_1) \cup V(S_n^2 - F_2) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)] - F_c$是连通的。因此$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。若$|F_c| = 1$且不与$v$关联或者$|F_c| = 0$，则$S_n - F$是连通的，矛盾。

情况3：$|F_1| = n-1$

此时，$|F_2| = |F_3| = \cdots = |F_n| = |F_c| = 0$，由命题4和命题5可知，$S_n - F$是连通的，矛盾。

综上可得，S_n是紧超$(n-1)$边连通的。

如果图G的每个最小强割F都能孤立出来一个顶点，则连通图G是强超连通的。此外，若$G - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点，则图G是强紧$|F|$超连通的。

定理3.4 对任意的整数$n \geq 4$，S_n是强紧$(n-1)$超连通的。

证明：令F是S_n的最小强割，由定理3.1，$|F| = n-1$。令$F_i = F \cap V(S_n^i)$，$F_i^e = F \cap E(S_n^i)$，其中$i \in [1,n]$，且$|F_1 \cup F_1^e| \geq |F_2 \cup F_2^e| \geq \cdots \geq |F_n \cup F_n^e|$。设$C$是$S_n$中所有的交叉边构成的集合，同时令$F_c = F \cap C$。对$n$进行分类讨论。

(1) $n = 4$

当$n = 4$时，$|F| = n-1 = 3$，$(n-2)! = 2$，$|F_c| \leq 3$且$(n-2)! = 2$。

情况1：$|F_1 \cup F_1^e| \leq 1$

由于$|F_1 \cup F_1^e| \leq 1$，则$|F_i \cup F_i^e| \leq 1$，其中$i \in [1,4]$，且$|F_c| \leq 3$。由定理3.1，$S_4^i - F_i - F_i^e$是连通的，其中$i \in [1,4]$。又由命题5 可知，任意两个不同的子图S_4^i 之间有$(n-2)! = 2$ 条独立的交叉边。注意$|F| = 3$，不失一般性，假设$|F_c \cap E_{1,2}(S_4)| = 2$，因为$|F_c| \leq 3$且1子图所有顶点的外部邻域有$(n-1)! = 6$，由命题5可知，$S_4[V(S_4^1 - F_1 - F_1^e) \cup V(S_4^j - F_j - F_j^e)] - F_c$是连通的，其中$j \in \{3,4\}$。相似地，$S_4[V(S_4^2 - F_2 - F_2^e) \cup V(S_4^j - F_j - F_j^e)] - F_c$ 是连通的，其中$j \in \{3,4\}$。因此，$S_4 - F$是连通的，与F是S_4的最小强割矛盾。令$|F_c \cap E_{i,j}(S_4)| < 2$，$i,j \in [1,4]$且$i \neq j$。类似地，$S_4 - F$是连通的，矛盾。

情况2：$|F_1 \cup F_1^e| = 2$

由于$|F_1 \cup F_1^e| = 2$，有$|F_c| \leq 1$，$|F_i \cup F_i^e| \leq 1$，其中$i \in [2,4]$。由定理3.1，$S_4^i - F_i - F_i^e$是连通的，其中$i \in [2,4]$。因为$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 1$，由命题4和命题5，$S_4[V(S_4^2 - F_2 - F_2^e) \cup V(S_4^3 - F_3 - F_3^e) \cup V(S_4^4 - F_4 - F_4^e)] - F_c$ 是连通的。由$|F_1 \cup F_1^e| = 2$和$S_4^1 \cong S_3$，有$S_4^1 - F_1 - F_1^e$是连通的，或者有两个分支，其中一个分支是孤立点，或者有两个非平凡的连通分支。假设$S_4^1 - F_1 - F_1^e$是连通的，因为$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 1$，$|N(V(S_4^1 - F_1 - F_1^e)) \cap (V(S_4^2) \cup V(S_4^3) \cup V(S_4^4))| \geq 4$，可知$S_4 - F$是连通的，矛盾。假设$S_4^1 - F_1 - F_1^e$有两个非平凡的连通分支，结合$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 1$，则$S_4 - F$是连通的，矛盾。假设$S_4^1 - F_1 - F_1^e$有两个分支，其中一个分支是孤立点$v$，结合$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 1$，可以注意到，$S_4[V(S_4^1 - v - F_1 - F_1^e) \cup V(S_4^2 - F_2 - F_2^e) \cup V(S_4^3 - F_3 - F_3^e) \cup V(S_4^4 - F_4 - F_4^e)] - F_c$是连通的。因此$S_4 - F$是连通的（矛盾）或者有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况3：$|F_1 \cup F_1^e| = 3$

由于$|F| = n - 1 = 3$，有$|F_c| = 0$，$|F_i \cup F_i^e| = 0$，其中$i \in [2,4]$。由$S_4^i \cong S_3$，$i \in [1,4]$和定理3.1可知$S_4^i - F_i - F_i^e$是连通的，其中$i \in [2,4]$。因为$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 0$，由命题4和命题5可知，$S_4 - F$是连通的，矛盾。

(2) $n \geq 5$

结论对$n = 4$时成立，对n进行数学归纳法。假设$n \geq 5$时，结论对S_{n-1}成立，即若F是S_{n-1} 的最小强割且$|F| = n - 2$，则$S_{n-1} - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。下面考虑S_n的情况：

情况1：$|F_1 \cup F_1^e| \leq n - 3$

由于$|F_1 \cup F_1^e| \leq n - 3$，则$|F_i \cup F_i^e| \leq n - 3$，其中$i \in [1,n]$，且$|F_c| \leq n - 1$。由定理3.1，$S_n^i - F_i - F_i^e$是连通的，其中$i \in [1,n]$。又由命题5 可知，任意两个不同的子图$S_n^i$之间有$(n-2)!$ 条独立的交叉边。因为$n \geq 5$，所以$(n-2)! > n - 1$，故$S_n[V(S_n^i - F_i - F_i^e) \cup V(S_n^j - F_j - F_j^e)] - F_c$是连通的，其中$i, j \in [1,n]$且$i \neq j$。因此$S_n - F$是连通的，矛盾。

情况2：$|F_1 \cup F_1^e| = n - 2$

由于$|F_1 \cup F_1^e| = n - 2$，则$|F_i \cup F_i^e| \leq 1$，其中$i \in [2,n]$，且$|F_c| \leq 1$。由定理3.1，$S_n^i - F_i - F_i^e$是连通的，其中$i \in [2,n]$。因为$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + \cdots + |F_n \cup F_n^e| + |F_c| = 1$，由命题4和命题5，$S_n[V(S_n^2 - F_2 - F_2^e) \cup V(S_n^3 - F_3 - F_3^e) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n - F_n^e)] - F_c$ 是连通的。由于$|F_1 \cup F_1^e| = n - 2$，由归纳假设，$S_n^1 - F_1 - F_1^e$是连通的，或者有两个分支，其中一个分支是孤立点。假设$S_n^1 - F_1 - F_1^e$是连通的，因为$|F_1 \cup F_1^e| = n - 2$，由命题7，$|N(V(S_n^1 - F_1 - F_1^e)) \cap (V(S_n^2) \cup V(S_n^3) \cup V(S_n^n))| \geq (n-1)! - (n-2) > 1$，其中$n \geq 5$，结合$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + \cdots + |F_n \cup F_n^e| + |F_c| = 1$可知，$S_n - F$是连通的，矛盾。假设$S_n^1 - F_1 - F_1^e$有两个连通分支，其中一个分支是孤立点$v$。如果$|F_c| = 1$且$F_c$与$v$关联，则$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点；如果$|F_c| = 1$且$F_c$不与$v$关联，则$S_n - F$是连通的，矛盾。如果$|F_c| = 0$，且$|F_i| = 1$，$i \in [2,n]$，若$F_i$与$v$相邻，则$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点；若$F_i$不与$v$相邻，则$S_n - F$是连通的，矛盾。

情况3：$|F_1 \cup F_1^e| = n - 1$

由$|F_1 \cup F_1^e| = n - 1$可知$|F_i \cup F_i^e| = 0$，其中$i \in [2,n]$，且$|F_c| = 0$。由定理3.1，$S_n^i - F_i - F_i^e$是连通的，其中$i \in [2,n]$。又由命题5可知，任意两个不同的子图S_n^i 之间有$(n-2)!$ 条独立的交叉边。

因为$n \geq 5$，且$(n-2)! > 0$，所以$S_n[V(S_n^2 - F_2 - F_2^e) \cup V(S_n^3 - F_3 - F_3^e) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n - F_n^e)] - F_c$是连通的。又因为$|F_c| = 0$，结合$S_n^1 - F_1 - F_1^e$中的每个顶点都有外部邻域，从而$S_n - F$是连通的，矛盾。

综上所述，S_n是强紧$(n-1)$超连通的。

4. S_n的强自然连通性

引理4.1 令$F \subseteq V(S_4)$且$|F| \leq 3$，若$S_4 - F$是不连通的，则$S_4 - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。**证明：**根据命题4和$|F| \leq 3$，若$S_4 - F$是不连通的，则$|F| = 3$，令$F_i = F \cap V(S_4^i)$，其中$i \in [1, 4]$且$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq |F_4|$。

情况1：$|F_1| = 1$

此时，$|F_1| = |F_2| = |F_3| = 1$，$|F_4| = 0$，由命题4，$S_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [1, 4]$。又由命题5可知，任意两个不同的子图$S_4^i$之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边，并且$|E_{j,4}(S_4)| = 2 > 1 = |F_j| + |F_4|$，则$S_4[V(S_4^j - F_j) \cup V(S_4^4 - F_4)]$是连通的，其中$j \in [1, 3]$。从而$S_4 - F$是连通的，矛盾。

情况2：$|F_1| = 2$

由于$|F| = 3$，有$|F_2| = 1$，$|F_3| = |F_4| = 0$，由命题4，$S_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2, 4]$。又由命题5可知，任意两个不同的子图S_4^i之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边，$S_4[V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)]$是连通的。由于$|F_1| = 2$，则$S_4^1 - F_1$是连通的，或者有两个非平凡的连通分支，或者有两个分支，其中一个分支是孤立点。假设$S_4^1 - F_1$是连通的或者有两个非平凡的连通分支，由命题5，任意两个不同的子图S_4^i之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边，并且$|N(V(S_4^1 - F_1)) \cap (V(S_4^2) \cup V(S_4^3) \cup V(S_4^4))| = 4 > 1 = |F \backslash F_1|$，这意味着在$S_4 - F$中至少有一条边连接$S_4^1 - F_1$和$S_4[V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)]$，因此$S_4 - F$是连通的，矛盾。若$S_4^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点$v$。又由$|F_2| = 1$，若$F_2$与$v$相邻，则$S_4 - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点$v$。若$F_2$不与$v$相邻，则$S_4 - F$是连通的，矛盾。

情况3：$|F_1| = 3$

此时，$|F_2| = |F_3| = |F_4| = 0$，由命题4，$S_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2, 4]$。由命题5 可知，$S_4[V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)]$ 是连通的。并且$|N(V(S_4^1 - F_1)) \cap (V(S_4^2) \cup V(S_4^3) \cup V(S_4^4))| = 3 > 0 = |F_2| + |F_3| + |F_4|$，从而$S_4 - F$是连通的，矛盾。

引理4.2 当$n \geq 4$，令$F \subseteq V(S_n)$且$|F| \leq 2n - 5$，若$S_n - F$是不连通的，则$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。

证明： 由引理4.1，当$n = 4$时，结果成立。对n进行归纳假设，假设$n \geq 5$时，结论对S_{n-1}成立。现在假设$S_n - F$是不连通的，其中$F \subseteq V(S_n)$且$|F| \leq 2n - 5$，由命题4，$|F| \geq n - 1$。设$F_i = F \cap V(S_n^i)$，其中$i \in [1, n]$且$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq \cdots \geq |F_n|$。首先证明以下声明。

声明： $1 \leq |F_2| \leq n - 3$

声明的证明：若$F_2 = \emptyset$，则$|F_2| = |F_3| = \cdots = |F_n| = 0$，由命题5，$S_n[V(S_n^2 - F_2) \cup V(S_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)]$是连通的。又因为$S_n^1 - F_1$中每个点都有外部邻域，因此$S_n - F$是连通的，矛盾。

若$|F_2| \geq n-2$，则$|F| \geq 2(n-2) = 2n-4 > 2n-5$，这与$|F| \leq 2n-5$矛盾。

根据声明，对于每个$i \in [2,n]$，$S_n^i - F_i$是连通的，并且$|F_2| \geq 1$。由于$|F| \leq 2n-5$，则$|F_1| \leq 2n-6$。注意到，$|E_{i,j}(S_n - F)| \geq (n-2)! - (2n-5) \geq 1$，其中$i, j \in [1,n]$且$n \geq 5$，因此在每对$S_n^i - F_i$之间都有一条边连接，其中$i \in [1,n]$。由于$S_n - F$是不连通的，则可知$S_n^1 - F_1$是不连通的，并且令$C_1^1$，$C_1^2$，$\cdots$，$C_1^a$是$S_n^1 - F_1$的非平凡分支，$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_b$是$S_n^1 - F_1$的孤立点。令$X = \{x_i : x_i$是$S_n - F$的孤立点$\}$，注意，如果$x_i$ 是$S_n - F$的孤立点，则$x_i^+ \in F \backslash F_1$，其中$i \in [1,b]$。因此，根据命题6，$|X| \leq |F_2| + |F_3| + \cdots + |F_n|$。

如果$|F_1| \leq 2n-7$，由归纳假设，$a = 1$且$b = 1$。另一方面，因为当$n \geq 5$，$|N(V(C_1^1)) \cap (V(S_n^2) \cup V(S_n^3) \cup \cdots \cup V(S_n^n))| \geq (n-1)! - |F_1| - 1 - (|F| - |F_1|) \geq (n-1)! - (2n-4) \geq 18$，因此在$S_n - F$中至少有一条边连接$C_1^1$和$S_n[V(S_n^2 - F_2) \cup V(S_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)]$。若$x_1^+ \in F$，则$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。否则$S_n - F$连通，矛盾。如果$|F_1| = 2n-6$，那么$|F_2| + |F_3| + \cdots + |F_n| \leq 1$，因此$|X| \leq |F_2| + |F_3| + \cdots + |F_n| \leq 1$，即$|X| \leq 1$。由$|N(V(C_1^i)) \cap (V(S_n^2 - F_2) \cup V(S_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n))| \geq |V(C_1^i)| - (|F_2| + |F_3| + \cdots + |F_n|) \geq 2 - 1 = 1$，其中$1 \leq i \leq a$。即当$1 \leq i \leq a$ 时，在$S_n - F$中至少有一条边连接C_1^i和$S_n[V(S_n^2 - F_2) \cup V(S_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)]$。进一步，若$X = \{x_1\}$且$x_1^+ \in F$，则$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。否则$S_n - F$连通，矛盾。

如果连通图G的每个最小自然割$|F|$都能孤立出来一条边，则G是超自然连通的。此外，若$G - F$有两个分支，其中一个分支是孤立边，那么G是紧$|F|$超自然连通的。

定理4.3 对于任意整数$n \geq 5$，S_n是紧$2n-4$超自然连通的。

证明： 令$F \subseteq V(S_n)$是S_n的最小自然割，$|F| = 2n-4$。设$F_i = F \cap V(S_n^i)$，其中$i \in [1,n]$且$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq \cdots \geq |F_n|$。首先证明以下声明。

声明： $1 \leq |F_2| \leq n-2$

声明的证明： 若$F_2 = \emptyset$，则$|F_2| = |F_3| = \cdots |F_n| = 0$，由命题5，$S_n[V(S_n^2 - F_2) \cup V(S_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)]$是连通的。又因为$S_n^1 - F_1$中每个点都有外部邻域，则$S_n - F$是连通的，矛盾。若$|F_2| \geq n-1$，则$|F| \geq 2(n-1) = 2n-2 > 2n-4$，这与$|F| = 2n-4$矛盾。

情况1：$|F_1| \leq n-3$

因为$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq \cdots \geq |F_n|$，$|F_i| \leq n-3$，其中$i \in [1,n]$。由命题4，$S_n^i - F_i$是连通的，其中$i \in [1,n]$。又由命题5可知，任意两个不同的子图$S_n^i$ 之间有$(n-2)!$条独立的交叉边。因为$n \geq 5$，有$(n-2)! > 2n-6 \geq |F_i| + |F_j|$，其中$i \neq j$，$i, j \in [1,n]$。因此，$S_n[V(S_n^i - F_i) \cup V(S_n^j - F_j)]$是连通的，其中$i \neq j$，$i, j \in [1,n]$。从而$S_n - F$是连通的，与$F$是$S_n$的最小自然割矛盾。

情况2：$n-2 \leq |F_1| \leq 2n-7$

子情况2.1：$|F_2| \leq n-3$

因为$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq \cdots \geq |F_n|$，$|F_i| \leq n-3$，其中$i \in [2,n]$。由命题4，$S_n^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2,n]$。又由命题5可知，任意两个不同的子图$S_n^i$ 之间有$(n-2)!$条独立的交叉边。因为$n \geq 5$，有$(n-2)! > 2n-6 \geq |F_i| + |F_j|$，其中$i \neq j$，$i, j \in [2,n]$。因此，$S_n[V(S_n^i - F_i) \cup V(S_n^j - F_j)]$是

连通的，其中$i \neq j$，$i, j \in [2, n]$。从而$S_n[V(S_n^2-F_2)\cup V(S_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的。假设$S_n^1-F_1$是连通的，若$|F_n|=1$，由于$n\geq 5$，则$(n-1)+n-2=2n-3>2n-4=|F|$，矛盾，因此$|F_n|=0$。因为$(n-2)!>2n-7+0\geq|F_1|+|F_n|$，所以$S_n[V(S_n^1-F_1)\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的，再结合$S_n[V(S_n^2-F_2)\cup V(S_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$ 是连通的，则S_n-F是连通的，与F是S_n的最小自然割矛盾。假设$S_n^1-F_1$是不连通的，因为$|F_1|\leq 2n-7=2(n-1)-5$，由引理4.2，则$S_n^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点。令C是$S_n^1-F_1$的最大分支，因为$n\geq 5$，所以$(n-1)!-(2n-7)-1>(2n-4)-(n-2)=n-2$。故$S_n[V(C)\cup V(S_n^2-F_2)\cup V(S_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的，与$F$是$S_n$的最小自然割矛盾。

子情况2.2：$|F_2|=n-2$

此时，$|F_3|=|F_4|=\cdots=|F_n|=0$，$|F_1|=|F_2|=n-2$。由命题4和命题5，$S_n^i-F_i$是连通的，其中$i\in[3,n]$，且$S_n[V(S_n^3-F_3)\cup V(S_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的。假设$S_n^2-F_2$是连通的，因为$(n-2)!-(n-2)>0$，故根据命题4和命题5，$S_n[V(S_n^2-F_2)\cup V(S_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的。令$S_n^1-F_1$是连通的，因于$n\geq 5$，所以$(n-1)!-(n-2)>(2n-4)-(n-2)=n-2$。因此，$S_n[V(S_n^1-F_1)\cup V(S_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的，即$S_n-F$是连通的，矛盾。令$S_n^1-F_1$是不连通的，因为$|F_1|\leq 2n-7=2(n-1)-5$，由引理4.2，则$S_n^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点。令$C$是$S_n^1-F_1$的最大分支，因为$n\geq 5$，所以$(n-1)!-(n-2)-1>(2n-4)-(n-2)=n-2$。故$S_n[V(C)\cup V(S_n^2-F_2)\cup V(S_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的，与$F$是$S_n$的最小自然割矛盾。

假设$S_n^2-F_2$是不连通的。因为$|F_2|=n-2$，由定理3.4，$S_n^2-F_2$有两个分支，其中一个分支是孤立点，令B是$S_n^2-F_2$的最大分支，因于$n\geq 5$，则$(n-1)!-(n-2)-1>(2n-4)-(n-2)=n-2$，因此$S_n[V(B)\cup V(S_n^3-F_3)\cup V(S_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的。令$S_n^1-F_1$是连通的，因于$n\geq 5$，所以$(n-1)!-(n-2)>(2n-4)-(n-2)=n-2$，根据命题5和命题7，$S_n[V(S_n^1-F_1)\cup V(B)\cup V(S_n^3-F_3)\cup V(S_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的，与$F$是$S_n$的最小自然割矛盾。令$S_n^1-F_1$是不连通的，因为$|F_1|\leq 2n-7=2(n-1)-5$，由引理4.2，则$S_n^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点。令$C$是$S_n^1-F_1$的最大分支，因为$n\geq 5$，所以$(n-1)!-(n-2)-1>(2n-4)-(n-2)=n-2$。故$S_n[V(C)\cup V(S_n^3-F_3)\cup V(S_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的，所以$S_n[V(B)\cup V(C)\cup V(S_n^3-F_3)\cup V(S_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的，因此$S_n-F$满足以下情形之一：

(1) S_n-F有两个分支，其中一个分支是孤立点，矛盾；(2) S_n-F有三个分支，其中有两个分支是孤立点，矛盾；(3) S_n-F有两个分支，其中一个分支是一条边，满足结论。

情况3：$2n-6\leq|F_1|\leq 2n-4$

由声明$|F_2|\geq 1$，则$|F_1|\leq 2n-5$，$|F_2|+|F_3|+\cdots+|F_n|\leq 2$，由命题4和命题5可得$S_n[V(S_n^2-F_2)\cup V(S_n^3-F_3)\cup V(S_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的。假设$S_n^1-F_1$是连通的，因为$n\geq 5$，所以$(n-1)!-(2n-5)>2$，因此$S_n[V(S_n^1-F_1)\cup V(S_n^2-F_2)\cup V(S_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]$是连通的，矛盾。假设$S_n^1-F_1$是不连通的，令$C_1$，$C_2$，$\cdots$，$C_k(k\geq 2)$是$S_n^1-F_1$的分支，如果$|V(C_j)|\geq 3$，则$|N(V(C_j))\cap(V(S_n^2)\cup V(S_n^3)\cup\cdots\cup V(S_n^n))|\geq 3$，其中$j\in[1,k]$。再结合$|F_2|+|F_3|+\cdots+|F_n|\leq 2$，则$S_n-F$ 满足以下情形之一：(1) S_n-F有两个分支，其中一个分支是孤立点，矛盾；(2) S_n-F有两个分支，其中一个分支是一条边，满足结论；(3) S_n-F有三个分支，其中有两个分支是孤立

点，与F 是S_n的最小自然割矛盾。

综上所述，当$n \geq 5$时，S_n是紧$2n-4$超自然连通的。

引理4.4 设$F \subseteq E(S_4)$，且$|F| \leq 3$。如果$S_4 - F$不连通，则$S_4 - F$由两个分支组成，其中一个分支是孤立点。

证明：记$F_i = F \cap E(S_4^i)$，$i \in [1,4]$，记S_4的所有交叉边构成的集合为C，且$F_c = F \cap C$。根据命题5，$|E_{i,j}(S_4)| = (4-2)! = 2$，其中$i,j \in [1,4]$，$i \neq j$。不失一般性，假设$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq |F_4|$，由$|F| \leq 3$可得$|F_4| = 0$，否则$|F| \geq 4 \times 1 = 4 > 3$，矛盾。由命题4可知$S_4^4 - F_4$是连通的。接下来考虑以下情况：

情况1：$|F_1| \leq 1$

此时，$|F_i| \leq 1$，$i \in [1,4]$，根据命题4，$S_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [1,4]$。注意$|F_c| \leq 3$，不失一般性，假设$|F_c \cap E_{1,2}(S_4)| = 2$，因为1子图所有的外部邻域有$(n-1)! = 6$个，由命题5可知，$S_4[V(S_4^1 - F_1) \cup V(S_4^j - F_j)] - F_c$是连通的，其中$j \in \{3,4\}$。相似地，可以得到$S_4[V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^j - F_j)] - F_c$是连通的，其中$j \in \{3,4\}$。因此$S_4 - F$是连通的，矛盾。若$|F_c \cap E_{i,j}(S_4)| < 2$，$i,j \in [1,4]$，且$i \neq j$，类似地，$S_4 - F$是连通的，矛盾。

情况2：$|F_1| = 2$

此时，$|F_c| \leq 1$且$|F_i| \leq 1$，$i \in [2,4]$，由命题4，$S_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2,4]$。由命题5，$S_4[V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的。由$|F_1| = 2$可知，$S_4^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点，或者有两个非平凡分支。若$S_4^1 - F_1$有两个非平凡分支，由$|F_c| \leq 1$可知$S_4 - F$是连通的，矛盾。假设$S_4^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点v，若$|F_c| = 1$且F_c与v关联，则$S_4[V(S_4^1 - v - F_1) \cup V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的，此时$S_4 - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点$v$。若$|F_c| = 1$且$F_c$不与$v$关联或者$|F_c| = 0$，则$S_4 - F$是连通的，矛盾。

情况3：$|F_1| = 3$

此时$|F_2| = |F_3| = |F_4| = |F_c| = 0$，由命题4和命题5可知$S_4 - F$是连通的，矛盾。

引理4.5 设$F \subseteq E(S_n)$，且$|F| \leq 2n-5$，$n \geq 4$。如果$S_n - F$不连通，则$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。

证明：当$n = 4$时，根据引理4.4，结论成立。对n进行数学归纳法，假设$n \geq 5$时，结论对S_{n-1}成立，即若F是S_{n-1}的一个边割且$|F| \leq 2n-7$，则$S_{n-1} - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。令$F_i = F \cap E(S_n^i)$，$i \in [1,n]$且$|F_1| \geq |F_2| \geq \cdots \geq |F_n|$，记$S_n$的所有交叉边构成的集合为$C$，且$F_c = F \cap C$。考虑以下情况：

情况1：$|F_1| \leq n-3$

因为$|F_1| \geq |F_2| \geq \cdots \geq |F_n|$，则$|F_c| \leq 2n-5$且$|F_i| \leq n-3$，$i \in [1,n]$，根据命题4，$S_n^i - F_i$是连通的，其中$i \in [1,n]$。因为$n \geq 5$，根据命题5，$|E_{i,j}(S_n)| = (n-2)! > 2n-5 \geq |F_c|$，其中$i,j \in [1,n]$且$i \neq j$，故$S_n[V(S_n^1 - F_1) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)] - F_c$是连通的，因此$S_n - F$是连通的，矛盾。

情况2：$n-2 \le |F_1| \le 2n-7$

因为$|F_1| \ge n-2$，则$|F_i| \le n-3$，$i \in [2,n]$，且$|F_c| \le n-3$，根据命题4，$S_n^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2,n]$。因为$n \ge 5$，根据命题5，$|E_{i,j}(S_n)| = (n-2)! > n-3 \ge |F_c|$，其中$i,j \in [2,n]$且$i \ne j$，故$S_n[V(S_n^2 - F_2) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)] - F_c$是连通的。由$n-2 \le |F_1| \le 2n-7$，由归纳假设，$S_n^1 - F_1$ 是连通的，或者有两个分支，其中一个分支是孤立点。假设$S_n^1 - F_1$是连通的，因为$|E_{i,j}(S_n)| = (n-2)! > n-3 > 0$，则$S_n - F$是连通的，矛盾。假设$S_n^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点$v$，因为$(n-2)!-1 > n-3 > 0$，则$S_n[V(S_n^1 - v - F_1) \cup V(S_n^2 - F_2) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)] - F_c$是连通的，因此$S_n - F$是连通的（矛盾）或者$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况3：$2n-6 \le |F_1| \le 2n-5$

此时$|F_i| \le 1$，$i \in [2,n]$，且$|F_c| \le 1$，由命题4和命题5，$S_n[V(S_n^2 - F_2) \cup V(S_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)] - F_c$ 是连通的。又由$|F_c| \le 1$，则$S_n - F$是连通的（矛盾）或者有两个分支，其中一个分支是孤立点。

定理4.6 对于任意整数$n \ge 4$，$n\lambda(S_n) = 2n-4$。

证明：令$u = (1)$，$v = (12)$，并且令$F = \{ux : x \in \{(1,i) : 3 \le i \le n\}\} \cup \{vx : x \in \{(1,i) : 3 \le i \le n\}\}$，由命题2，$S_n$没有奇圈，因此，对于$x \in V(S_n - F)$，$d_{S_n - F}(x) \ge n-2 \ge 1$，$n \ge 4$。故$F$是$S_n$的一个自然边割，所以$n\lambda(S_n) \le 2n-4$。

若F是S_n的一个最小自然边割，由引理4.5有$n\lambda(S_n) \ge 2n-4$，结合$n\lambda(S_n) \le 2n-4$，有$n\lambda(S_n) = 2n-4$。

如果连通图G的每个最小自然边割F都能孤立出一条边，那么图G是超自然$|F|$边连通的。

定理4.7 对于任意整数$n \ge 4$，S_n是超自然$(2n-4)$边连通的。

证明：令F是S_n的最小自然边割，则根据定理4.6得$|F| = 2n-4$。令$F_i = F \cap E(S_n^i)$，$i \in [1,n]$且$|F_1| \ge |F_2| \ge \cdots \ge |F_n|$，记$S_n$的所有交叉边构成的集合为$C$，且$F_c = F \cap C$。对$n$进行分类讨论。

（1）$n = 4$

当$n = 4$时，$|F| = 4$，我们需考虑以下情况。

情况1：$|F_1| \le 1$

此时，$|F_i| \le 1$，$i \in [1,4]$。由命题4，$S_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [1,4]$。由命题5，在任意两个子图之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边。注意$|F| = 4$，$|F_c| \le 4$，$(n-1)! = 6$。不失一般性，假设$|F_c \cap E_{1,2}(S_4)| = 2$，因为1子图所有的外部邻域有$(n-1)! = 6$ 个，由命题5，至少存在一个$j \in \{3,4\}$使得$S_4[V(S_4^1 - F_1) \cup V(S_4^j - F_j)] - F_c$ 是连通的。不失一般性，假设$S_4[V(S_4^1 - F_1) \cup V(S_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的，如果$|F_c \cap E_{1,3}(S_4)| = 2$，则$|F_c \cap E_{2,4}(S_4)| = |F_c \cap E_{3,4}(S_4)| = |F_c \cap E_{1,4}(S_4)| = 0$。从而$S_4[V(S_4^i - F_i) \cup V(S_4^4 - F_4)] - F_c$ 是连通的，其中$i \in [1,3]$。因此$S_4 - F$是连通的，矛盾。如果$|F_c \cap E_{1,3}(S_4)| < 2$，则$S_4[V(S_4^1 - F_1) \cup V(S_4^3 - F_3)] - F_c$是连通的。类似地，有$j \in \{3,4\}$ 使得$S_4[V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^j - F_j)] - F_c$是连通的。因此$S_4 - F$ 是连通的，矛盾。

情况2：$|F_1| = 2$

此时$|F_i| \leq 2$，$i \in [2,4]$，且$|F_c| \leq 2$。

子情况2.1：$|F_2| \leq 1$

在该情况中，$|F_i| \leq 1$，$i \in [2,4]$，且$|F_c| \leq 2$。由命题4和命题5，$S_4[V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的。由于$|F_1| = 2$，则$S_4^1 - F_1$是不连通的，并且$S_4^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点；或者有两个分支，其中一个分支是一条孤立边；或者有两个分支，每个分支的顶点数为3。若$S_4^1 - F_1$ 有两个分支，其中一个分支是孤立点v。因为$|F_c| \leq 2$，根据命题6，$S_4[V(S_4^1 - v - F_1) \cup V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的，因此$S_4 - F$是连通的(矛盾)或者有两个分支，其中一个分支是孤立点(矛盾)。若$S_4^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是一条孤立边，结合$|F_c| \leq 2$可知，$S_4 - F$是连通的(矛盾)或者有两个分支，其中一个分支是一条孤立边。若$S_4^1 - F_1$有两个分支，每个分支的顶点数为3，结合$|F_c| \leq 2$可知，$S_4 - F$是连通的(矛盾)。

子情况2.2：$|F_2| = 2$

由$|F| = 4$得$|F_3| = |F_4| = |F_c| = 0$，由命题4和命题5可知，$S_4[V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的。由于$|F_i| = 2$，则$S_4^i - F_i$是不连通的，并且$S_4^i - F_i$有两个分支，其中一个分支是孤立点；或者有两个分支，其中一个分支是一条孤立边；或者有两个分支，每个分支的顶点数为3，其中$i \in [1,2]$。若$S_4^i - F_i$有两个分支，其中一个分支是孤立点v_i，其中$i \in [1,2]$，并且$v_1v_2 \in E(S_4)$，那么$S_4 - F$有两个分支，其中一个分支是一条孤立边。否则$S_4 - F$是连通的，矛盾。

情况3：$|F_1| = 3$

此时，$|F_2| + |F_3| + |F_4| + |F_c| = 1$，即$|F_i| \leq 1$，$i \in [2,4]$，且$|F_c| \leq 1$。由命题4和命题5可知，$S_4[V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的。由$|F_1| = 3$可知，$S_4^1 - F_1$有三个分支，其中有两个分支是孤立点；或者有三个分支，其中有一个分支是孤立点，有一个分支是孤立边；或者有三个分支，并且三个分支均为孤立边。若$S_4^1 - F_1$有三个分支，其中有两个分支是分别是孤立点v_1和v_2。由$(n-1)! - 2 = 4 > 1$可知，$S_4[V(S_4^1 - v_1 - v_2 - F_1) \cup V(S_4^2 - F_2) \cup V(S_4^3 - F_3) \cup V(S_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的，结合$|F_c| \leq 1$，有$|N(v_1) \cap (V(S_4^2) \cup V(S_4^3) \cup V(S_4^4))| = 1 = |N(v_2) \cap (V(S_4^2) \cup V(S_4^3) \cup V(S_4^4))|$，则$S_4 - F$是连通的(矛盾)或者$S_4 - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点(矛盾)。若$S_4^1 - F_1$有三个分支，有一个分支是孤立点，有一个分支是孤立边，结合$|F_c| \leq 1$可知，$S_4 - F$是连通的(矛盾)或者$S_4 - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点(矛盾)。若$S_4^1 - F_1$有三个分支且均为孤立边，又$|F_c| \leq 1$，由命题6，$S_4 - F$是连通的，矛盾。

情况4：$|F_1| = 4$

此时$|F_2| = |F_3| = |F_4| = |F_c| = 0$，由命题4和命题5可知$S_4 - F$是连通的，矛盾。

（2）$n \geq 5$

对n进行归纳推理，假设结论对S_{n-1}成立，即若F是S_{n-1}的一个最小自然边割且$|F| = 2n - 6$，则$S_{n-1} - F$有两个分支，其中一个分支是孤立边。下面考虑S_n的情况：

情况1：$|F_1| \leq n - 3$

此时，$|F_i| \leq n - 3$，$i \in [1,n]$，$|F_c| \leq 2n - 4$。由命题4，$S_n^i - F_i$是连通的，其中$i \in [1,n]$。由命题5，在任意两个子图之间有$(n-2)!$条独立的交叉边，且$(n-2)! > 2n - 4$，其中$n \geq 6$，

则$S_n[V(S_n^1-F_1)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]-F_c$是连通的，即$S_n-F$是连通的，矛盾。当$n=5$时，$(n-2)!=6=2n-4\geq|F_c|$。不失一般性，假设$|F_c\cap E_{1,2}(S_5)|=6$，因为1子图的外部邻域有$(n-1)!=24$，由命题5可知，$S_5[V(S_5^1-F_1)\cup V(S_5^j-F_j)]-F_c$是连通的，其中$j\in\{3,4,5\}$。类似地，有$S_5[V(S_5^2-F_2)\cup V(S_5^j-F_j)]-F_c$ 是连通的，其中$j\in\{3,4,5\}$。因此S_5-F是连通的，矛盾。

情况2：$|F_1|=n-2$

子情况2.1：$|F_2|\leq n-3$

此时$|F_i|\leq n-3$，$i\in[2,n]$，$|F_c|\leq n-2$。由命题4，$S_n^i-F_i$是连通的，其中$i\in[2,n]$。由命题5，$(n-2)!>n-2\geq|F_c|$ $(n\geq 5)$，因此$S_n[V(S_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]-F_c$是连通的。由定理3.3可知，$S_n^1-F_1$是连通的或者有两个分支，其中一个分支是孤立点。假设$S_n^1-F_1$ 是连通的，又$n\geq 5$，有$(n-2)!>n-2$，因此$S_n[V(S_n^1-F_1)\cup V(S_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]-F_c$是连通的，即$S_n-F$是连通的，矛盾。假设$S_n^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点$v$，因为$(n-1)!-1>n-2$，其中$n\geq 5$，所以$S_n[V(S_n^1-v-F_1)\cup V(S_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]-F_c$是连通的。故$S_n-F$是连通的或者$S_n-F$有两个分支，其中一个分支是孤立点，这与$F$是$S_n$的最小自然边割矛盾。

子情况2.2：$|F_2|=n-2$

此时$|F_3|=|F_4|=\cdots=|F_n|=|F_c|=0$，由命题4和命题5可知，$S_n[V(S_n^3-F_3)\cup V(S_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]-F_c$是连通的。假设$S_n^j-F_j$是连通的，其中$j\in\{1,2\}$，且$(n-2)!>0=|F_c|$，则$S_n[V(S_n^1-F_1)\cup V(S_n^j-F_j)]-F_c$是连通的，其中$j\in[3,n]$。类似地，$S_n[V(S_n^2-F_2)\cup V(S_n^j-F_j)]-F_c$是连通的，其中$j\in[3,n]$。因此$S_n-F$是连通的，矛盾。

不失一般性，假设$S_n^1-F_1$是不连通的，$S_n^2-F_2$是连通的。根据定理3.3，$S_n^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点v，由命题5可知，$S_n[V(S_n^1-v-F_1)\cup V(S_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]-F_c$是连通的。因此$S_n-F$是连通的或者$S_n-F$有两个分支，其中一个分支是孤立点，这与$F$是$S_n$的最小自然边割矛盾。

假设$S_n^j-F_j$是不连通的，其中$j\in\{1,2\}$。根据定理3.3，$S_n^j-F_j$有两个分支，其中一个分支是孤立点v_j，其中$j\in\{1,2\}$。由命题6，$S_n[V(S_n^1-v_1-F_1)\cup V(S_n^2-v_2-F_2)\cup V(S_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]-F_c$是连通的。假设$v_1$与$v_2$相邻，由命题7可知，$|N(v_j)\cap(V(S_n^3)\cup V(S_n^4)\cup\cdots\cup V(S_n^n))|=0$，其中$j\in\{1,2\}$，因此$S_n-F$有两个分支，其中一个分支是孤立边$v_1v_2$。假设$v_1$ 与v_2不相邻，结合$|F_c|=0$可知，S_n-F是连通的，矛盾。

情况3：$n-1\leq|F_1|\leq 2n-7$

因为$|F|=2n-4$且$|F_1|\geq n-1$，则$|F_i|\leq n-3$，$i\in[2,n]$，$|F_c|\leq n-3$。由命题4 可知，$S_n^i-F_i$是连通的，其中$i\in[2,n]$。由命题5可知，$(n-2)!>n-3\geq|F_c|$，$n\geq 5$，则$S_n[V(S_n^2-F_2)\cup V(S_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(S_n^n-F_n)]-F_c$是连通的。由$|F_1|\leq 2n-7$，引理4.5和归纳假设可知，$S_n^1-F_1$是连通的，或者有两个分支，其中一个分支是孤立点。假设$S_n^1-F_1$是连通的，因为$(n-2)!>n-3$，$n\geq 5$，则S_n-F是连通的，矛盾。假设$S_n^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点v，因为$(n-2)!-1>n-3\geq|F_c|$，$n\geq 5$，则$S_n[V(S_n^1-v-F_1)\cup V(S_n^2-F_2)\cup V(S_n^3-$

$F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)] - F_c$是连通的，因此$S_n - F$是连通的或者$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点，矛盾。

情况4：$|F_1| = 2n - 6$

因为$|F| = 2n - 4$可知$|F_i| \leq 2$，$i \in [2, n]$，$|F_c| \leq 2$。由命题4可知，$S_n^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2, n]$。由命题5可知，$(n-2)! > 2 \geq |F_c|$，$n \geq 5$，则$S_n[V(S_n^2 - F_2) \cup V(S_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)] - F_c$是连通的。由$|F_1| = 2n - 6$和归纳假设可知，$S_n^1 - F_1$是连通的或者有两个分支，其中一个分支是孤立边。若$S_n^1 - F_1$是连通的，由$(n-2)! > 2 \geq |F_c|$，$n \geq 5$，可知$S_n - F$是连通的，矛盾。若$S_n^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立边$uv$，根据命题6，$S_n[V(S_n^1 - u - v - F_1) \cup V(S_n^2 - F_2) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)] - F_c$是连通的，由命题6和命题7可知，$|N(u) \cap (V(S_n^2) \cup V(S_n^3) \cup \cdots \cup V(S_n^n))| = 1 = |N(v) \cap (V(S_n^2) \cup V(S_n^3) \cup \cdots \cup V(S_n^n))|$，并且$|F_c| \leq 2$，所以$S_n - F$是连通的（矛盾）或者$S_n - F$ 有两个分支，其中一个分支是一条孤立边uv（满足结论）。

情况5：$2n - 5 \leq |F_1| \leq 2n - 4$

此时，$0 \leq |F_2| + |F_3| + \cdots + |F_n| + |F_c| \leq 1$，由命题4和命题5可知，$S_n[V(S_n^2 - F_2) \cup V(S_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n)] - F_c$是连通的。由命题6可知，$S_n - F$是连通的或者$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点，矛盾。

引理4.8 设$F \subseteq V(S_n) \cup E(S_n)$且$|F| \leq 2n - 5$，$n \geq 4$。如果$S_n - F$ 是不连通的，则$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。

证明：当$n \geq 4$时，若$F \subseteq V(S_n)$且$|F| \leq 2n - 5$，根据引理4.2得，$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点，故在该情况下引理成立。若$F \subseteq E(S_n)$且$|F| \leq 2n - 5$，根据引理4.5得，$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点，因此在该情况下引理也成立。故我们假设$F \subseteq V(S_n) \cup E(S_n)$且$|F| \leq 2n - 5$，其中$F \cap V(S_n) \neq \emptyset$，$F \cap E(S_n) \neq \emptyset$，同时令$S_n - F$是不连通的。令$F_i = F \cap V(S_n^i)$，$F_i^e = F \cap E(S_n^i)$，其中$i \in [1, n]$，且$|F_1 \cup F_1^e| \geq |F_2 \cup F_2^e| \geq \cdots \geq |F_n \cup F_n^e|$。设$C$是$S_n$中所有交叉边构成的集合，同时令$F_c = F \cap C$。因此，$1 \leq |F_1| + |F_2| + \cdots + |F_n| \leq 2n - 6$，$1 \leq |F_1^e| + |F_2^e| + \cdots + |F_n^e| + |F_c| \leq 2n - 6$。

当$n = 4$时，$|F| \leq 3$。若$|F| \leq 2$，根据定理3.1可知$S_4 - F$是连通的，矛盾。若$|F| = 3$，由定理3.4可得，$S_4 - F$是连通的或者有两个分支，其中一个分支是孤立点。因此本引理对于$n = 4$ 成立。下证当$n \geq 5$时，结果仍成立。假设$n \geq 5$时结论对S_{n-1}成立，即如果$|F| \leq 2n - 7$，当$S_{n-1} - F$不连通时，$S_{n-1} - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。下面考虑S_n的情况：

情况1：$|F_1 \cup F_1^e| \leq n - 3$

此时，$|F_c| \leq 2n - 6$，$|F_i \cup F_i^e| \leq n - 3$，其中$i \in [1, n]$。由定理3.1，$S_n^i - F_i - F_i^e$是连通的，其中$i \in [1, n]$。由于$n \geq 5$，$(n-2)! > 2n - 5 > 2n - 6 \geq |F_c|$，所以$S_n[V(S_n^i - F_i - F_i^e) \cup V(S_n^j - F_j - F_j^e)] - F_c$是连通的，其中$i, j \in [1, n]$且$i \neq j$，即$S_n - F$是连通的，矛盾。

情况2：$n - 2 \leq |F_1 \cup F_1^e| \leq 2n - 7$

此时，$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + \cdots + |F_n \cup F_n^e| + |F_c| \leq n - 3$。由定理3.1，$S_n^i - F_i - F_i^e$是连通的，其中$i \in [2, n]$。由于$n \geq 5$，$(n-2)! > n - 3 \geq |F_c|$，所以$S_n[V(S_n^2 - F_2 - F_2^e) \cup V(S_n^3 - F_3 -$

$F_3^e) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n - F_n^e)] - F_c$是连通的。由于$|F_1 \cup F_1^e| \leq 2n-7$，由归纳假设，$S_n^1 - F_1 - F_1^e$是连通的或者有两个分支，其中一个分支是孤立点。记$|F_1 \cup F_1^e| = i$。假设$S_n^1 - F_1 - F_1^e$是连通的，因为$(n-1)! - i > 2n-5-i$，$n \geq 5$，因此$S_n - F$是连通的，矛盾。假设$S_n^1 - F_1 - F_1^e$有两个分支，其中一个分支是孤立点$v$，因为$(n-1)! - 1 - i > 2n-5-i$，$n \geq 5$，因此$S_n - F$ 是连通的（矛盾）或者$S_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点（满足结论）。

情况3：$2n-6 \leq |F_1 \cup F_1^e| \leq 2n-5$

此时，$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + \cdots + |F_n \cup F_n^e| + |F_c| \leq 1$。由定理3.1和命题5，$S_n[V(S_n^2 - F_2 - F_2^e) \cup V(S_n^3 - F_3 - F_3^e) \cup \cdots \cup V(S_n^n - F_n - F_n^e)] - F_c$是连通的。因为$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + \cdots + |F_n \cup F_n^e| + |F_c| \leq 1$，因此$S_n - F$是连通的（矛盾）或者$S_n - F$ 有两个分支，其中一个分支是孤立点（满足结论）。

定理4.9 对于任意整数$n \geq 4$，$n\kappa\lambda(S_n) = 2n-4$。

证明：令F是S_n的一个最小自然强割，则由引理4.8可知$|F| \geq 2n-4$。

令$u = (1)$，$v = (12)$，并且令$F = \{ux : x \in \{(1,i) : 3 \leq i \leq n\}\} \cup \{(12)(1,i) : 3 \leq i \leq n\}$，则$|F| = 2n-4$。由命题2，$S_n$没有奇圈，因此对于$x \in V(S_n - F)$，$d_{S_n - F} \geq n-1-(n-2) = 1$，故$F$是$S_n$的一个自然强割，所以$n\kappa\lambda(S_n) \leq 2n-4$。因此，$n\kappa\lambda(S_n) = 2n-4$。

5. 结论

本文研究了n维星图S_n当$g=0$、$g=1$时的强连通性质。即当$g=0$时，对于任意整数$n \geq 4$，有$\kappa\lambda(S_n) = n-1$。进一步在条件加强的基础上，即当$g=1$时得到了$n\lambda(S_n) = 2n-4$、$n\kappa\lambda(S_n) = 2n-4$。由于本文没有研究$g \geq 2$时$S_n$的强连通性，因此这将是一个今后很有研究价值的课题。

基金项目

国家自然科学基金资助项目 (61772010)，山西省基础研究计划 (202203021221128)。

参考文献

[1] Akers, S.B and Krishnamurthy, B. (1994) A Group-Theoretic Model for Symmetric Interconnection Networks. *IEEE Transactions on Computers*, **38**, 555-566. https://doi.org/10.1109/12.21148

[2] Liu, H., Hu, X. and Gao, S. (2017) The G-Good-Neighbor Conditional Diagnosability of Star Graphs under the PMC and MM* Model. *Theoretical Computer Science*, **674**, 53-59. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.02.011

[3] Li, P. and Xu, M. (2019) The t/k-Diagnosability and Strong Menger Connectivity on Star Graphs with Conditional Faults. *Theoretical Computer Science*, **793**, 181-192. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2019.06.016

[4] Ting, T., Zhang, S. and Li, Y. (2023) Hybrid Fault G-Good-Neighbor Conditional Diagnosability of Star Graphs. *The Journal of Supercomputing*, **79**, 19297-19311. https://doi.org/10.1007/s11227-023-05368-z

[5] Eunseuk, O. and Chen, J. (2003) On Strong Menger-Connectivity of Star Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **129**, 499-511. https://doi.org/10.1016/S0166-218X(02)00600-5

[6] Min, W. and Zhang, Z. (2009) A Kind of Conditional Vertex Connectivity of Star Graphs. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 264-267. https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.03.021

[7] Yang, Y. and Wang, S. (2012) Conditional Connectivity of Star Graph Networks under Embedding Restriction. *Information Sciences*, **199**, 187-192. https://doi.org/10.1016/j.ins.2012.02.025

[8] Li, C., Lin, S. and Li, S. (2020) Structure Connectivity and Substructure Connectivity of Star Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **284**, 472-480. https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.04.009

[9] Yang, L., Hua, X. and Yang, Y. (2023) On Structure and Substructure Fault Tolerance of star Networks. *The Journal of Supercomputing*, **79**, 9157-9179. https://doi.org/10.1007/s11227-022-05036-8

[10] Gu, M., Chang, J. and Hao, R. (2020) On Component Connectivity of Hierarchical Star Networks. *International Journal of Foundations of Computer Science*, **31**, 313-326. https://doi.org/10.1142/S0129054120500100

[11] Cheng, D. and Guo, D. (2011) Cycle Embedding in Star Graphs with More Conditional Faulty Edges. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 3856-3867. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.09.033

[12] Xue, S., Deng, Q., Li, P. and Chen, J. (2023) Hamiltonian Paths and Hamiltonian Cycles Passing through Prescribed Linear Forests in Star Graph with Fault-Tolerant Edges. *Discrete Applied Mathematics*, **334**, 68-80. https://doi.org/10.1016/j.dam.2023.02.016

[13] Wang, S. and Wang, M. (2019) The Strong Connectivity of Bubble-Sort Star Graphs. *The Computer Journal*, **62**, 715-729. https://doi.org/10.1093/comjnl/bxy077

[14] Cheng, E., Lipman, M.J. and Lipták, L. (2008) Strong Structural Properties of Unidirectional Star Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **156**, 2939-2949. https://doi.org/10.1016/j.dam.2007.12.005

[15] Zheng, J., Latifi, S., Regentova, E., Luo, K. and Wu, X. (2005) Diagnosability of Star Graphs under the Comparison Diagnosis Model. *Information Processing Letters*, **93**, 29-36. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2004.09.011