

一类具鞍点-可视折点的平面Filippov系统的分支分析

陈艺琳

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2024年3月9日; 录用日期: 2024年4月8日; 发布日期: 2024年4月15日

摘要

本文研究了具有余维 2 鞍点-可视折点的平面 Filippov 系统的一般展开. 首先, 利用规范型及滑模动力学, 完整地给出了分岔图. 其次, 证明了鞍点-可视折点附近存在伪边界鞍点分支和两个可视折点的碰撞 VV_1 分支. 特别地, 我们还证明了在 $\beta_1 < 0$ 的参数空间中存在两条余维 1 分支曲线. 最后, 我们的结果表明某些特殊分段线性微分系统的鞍点-可视折点的分支现象也适用于一般的平面 Filippov 系统.

关键词

Filippov系统, 鞍点-可视折点, 规范型, 分支

Bifurcation Analysis for a Class of Planar Filippov Systems with Saddle-Visible Fold Singularity

Yilin Chen

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Mar. 9th, 2024; accepted: Apr. 8th, 2024; published: Apr. 15th, 2024

Abstract

In this paper, we investigate the generic unfolding of planar Filippov systems with codimension-2 saddle-visible fold singularity. Firstly, the bifurcation diagrams are given completely by means of normal forms and sliding mode dynamics. Secondly, it is proved that there are pseudo boundary saddle bifurcation and collisions of visible two-fold singularity VV_1 bifurcation near saddle-visible fold singularity. In particular, we shown that there exist two codimension-1 bifurcation curves in the parameter space of $\beta_1 < 0$. Finally, our results indicate the saddle-visible fold singularity branching phenomenon in some special piecewise linear differential systems also hold for general planar Filippov systems.

Keywords

Filippov System, Saddle-Visible Fold Singularity, Normal Form, Bifurcation

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非光滑系统,特别是平面 Filippov 系统中的全局分岔问题是微分方程定性理论的主要研究问题之一,引起了许多数学家的关注.近年来,该系统已被广泛应用于机械 [1]、自动控制、电气工程 [2]、生物 [3] 等领域.然而,在这种系统中,当子系统存在非线性项或不连续项时,可能出现复杂的动力学及大量分岔 [4,5].

许多学者对分段线性微分系统 (PWL) 进行了研究 [6-13],发现某些类型的 PWL 系统在拓扑上可能与一般的平面 Filippov 系统不等价,特别是在滑模向量场之间.对于平面 Filippov 系统的不连续引起的分岔问题,[14,15]研究了余维数为 1 的局部分岔和全局分岔,[16]给出了 Filippov 平面系统余维数为 2 的局部分岔的完整分类.此外,在文献 [16]中作者还利用分段线性范式展开了余维 2 焦-折分岔.但 [11]指出 [16]中的焦-折分岔图不完全正确,因为完全展开应包含两个穿越极限环共存的区域.最近的工作 [17]研究了一般平面 Filippov 系统的余维 2 焦-折分岔,并证实了两个穿越极限环可以由焦-折奇点分岔出来以及给出了分岔曲线表达式.如上所述,关于不连续性引起的分岔的

研究仍具有挑战性, 并且由于切换流形的影响, 结果仍然大多有限. 基于 [16] 中分段线性范式的工作表明, 对于鞍-折奇点, 由于存在无穷多条全局分岔曲线且鞍子系统具有对角线性部分, 其分岔动力学更为复杂. 另外该工作中只讨论了鞍-折奇点的一种类型, 事实上, 我们发现共有四种拓扑不等价的余维 2 鞍-折奇点. 关于一般平面 Filippov 系统的鞍-折分岔问题, 目前还没有多少研究.

基于这一动机, 在本文中我们深入地讨论了其中一种拓扑不等价的余维 2 鞍-折奇点, 即初始时切换线不可穿越的余维 2 边界鞍点-可视折点附近的分岔问题. 通过将系统简化为规范型并利用滑模动力学, 我们发现从鞍点-可视折点附近可以产生伪边界鞍点和 VV_1 这两种类型分支以及两条使得系统有一个连接鞍点和可视折点的分隔线的分岔曲线. 同时完整地给出了分岔图及分岔曲线的表达式.

本文的其余部分组织如下. 在第 2 节中, 我们讨论了平面 Filippov 系统的一些符号并给出了一个新的规范型. 在第 3 节中给出了所研究系统的平衡点和滑模动力学. 我们的主要结果和证明及相应的分岔图将在第 4 节中讨论. 最后一部分对所得到的结论进行了总结.

2. 预备知识和规范型

本文考虑以下平面 Filippov 系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} X(x, y), & h(x, y) > 0, \\ Y(x, y), & h(x, y) < 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是以 0 为正则值的光滑函数, 向量场 $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 和向量场 $Y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是 C^r ($r \geq 2$) 函数 (C^r 表示连续可微到 r 阶的函数集).

设系统 (2.1) 的切换线 $\Sigma = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) = 0\}$ 是一条光滑曲线, 其将平面 \mathbb{R}^2 分为 $\Sigma^+ = \{(x, y)^T \mid h(x, y) > 0\}$ 和 $\Sigma^- = \{(x, y)^T \mid h(x, y) < 0\}$ 两个区域. 给定 $p = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, 根据向量场 X 和 Y 的方向进一步可将 Σ 分为三个部分:

- (i) 穿越域: $\Sigma^c = \{p \in \Sigma \mid Xh(p) \cdot Yh(p) > 0\}$;
- (ii) 滑模域: $\Sigma^s = \{p \in \Sigma \mid Xh(p) < 0, Yh(p) > 0\}$;
- (iii) 逃逸域: $\Sigma^e = \{p \in \Sigma \mid Xh(p) > 0, Yh(p) < 0\}$;

其中 $Xh(p) = X(p) \cdot \text{grad} h(p)$ 和 $Yh(p) = Y(p) \cdot \text{grad} h(p)$ 分别定义为 h 相对于 X 和 Y 在 p 处的一阶李导数, 且区域 $\Sigma^c, \Sigma^s, \Sigma^e$ 在 Σ 上是开区域.

由于在 Σ^s 和 Σ^e 上, 系统 (2.1) 的解轨迹可能沿着 Σ 滑行. 因此根据 Filippov 凸方法, 对于 $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ 上的解轨迹可由以下方程确定

$$Z^s(p) = \frac{Xh(p)Y(p) - Yh(p)X(p)}{Xh(p) - Yh(p)}. \quad (2.2)$$

若 $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ 且满足 $Z^s(p) = 0$, 则称其为伪平衡点. 若 $p \in \Sigma^+$ (或者 $p \in \Sigma^-$) 且 $X(p) = 0$ (或者 $Y(p) = 0$), 那么 p 被称为实平衡点; 如果 $p \in \Sigma^-$ (或 $p \in \Sigma^+$) 且满足 $X(p) = 0$ (或 $Y(p) = 0$),

则称 p 为虚平衡点; 如果 $p \in \Sigma$ 且 $X(p) = 0$ (或 $Y(p) = 0$), 那么 p 被称为边界平衡点. 特别地, 为了更全面地分析平衡点分支, 我们将进一步区分两种不同类型的伪平衡点.

令 $X(x, y) = (X_1(x, y), X_2(x, y))^T$, $Y(x, y) = (Y_1(x, y), Y_2(x, y))^T$ 并设 $h(x, y) = x$, 所以在这种情况下, 系统 (2.1) 的滑模解为

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = g_s(y) = \frac{X_1(0, y)Y_2(0, y) - Y_1(0, y)X_2(0, y)}{X_1(0, y) - Y_1(0, y)}. \quad (2.3)$$

因此, 根据在文献 [10] 中的定义, 若 $p \in \Sigma^s$ 且 $g'_s(y^*) < 0$, 则伪平衡点 $p = (0, y^*)^T$ 定义为稳定的伪结点; 若 $p \in \Sigma^e$ 且 $g'_s(y^*) > 0$, 则伪平衡点 p 定义为不稳定的伪结点; 如果 $p \in \Sigma^s$ 且满足 $g'_s(y^*) > 0$, 或者 $p \in \Sigma^e$ 并满足 $g'_s(y^*) < 0$, 那么伪平衡点 p 是一个伪鞍点.

而对于 $p \in \Sigma$, 若满足 $Xh(p) \cdot Yh(p) = 0$, 则称 p 是一个切点 (p 既不是 X 也不是 Y 的奇点). 接下来, 我们给出切点中的一种常见的折点, 其定义如下.

定义2.1. 设 p 是系统 (2.1) 的切点. 若 $Xh(p) = 0$ 且 $(X)^2h(p) > 0$ (或 $(X)^2h < 0$), 则称 p 为系统 (2.1) 关于 X 的可视 (或不可视) 折点; 若 $Yh(p) = 0$ 且 $(Y)^2h(p) < 0$ (或 $(Y)^2h > 0$), 则称 p 为系统 (2.1) 关于 Y 的可视 (或不可视) 折点.

借助定义 2.1, 我们有以下几种类型的切点.

定义2.2. 对于系统 (2.1), 我们定义:

(i) 如果 p 是由一个边界鞍点和一个折点碰撞形成的, 那么称 p 是一个鞍-折奇点;

(ii) 如果 p 是由两个不可视 (或可视) 折点碰撞形成的, 那么称 p 是一个不可视 (或可视) 二-折奇点;

(iii) 如果 p 是由一个可视折点和一个不可视折点碰撞形成的, 那么称 p 是一个可视-不可视二-折奇点.

回忆本文目标是去研究鞍-折奇点的分支, 因此在系统 (2.1) 中我们引入两个参数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. 系统 (2.1) 将重写为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} X_1(x, y; \alpha) \\ X_2(x, y; \alpha) \end{pmatrix}, & x > 0, \\ \begin{pmatrix} Y_1(x, y; \alpha) \\ Y_2(x, y; \alpha) \end{pmatrix}, & x < 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 $X_i: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $Y_i: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^r 函数, $i = 1, 2$. 令

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \begin{pmatrix} a_{11}^+(\alpha) & a_{12}^+(\alpha) \\ a_{21}^+(\alpha) & a_{22}^+(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1(0,0;\alpha)}{\partial x} & \frac{\partial X_1(0,0;\alpha)}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2(0,0;\alpha)}{\partial x} & \frac{\partial X_2(0,0;\alpha)}{\partial y} \end{pmatrix} \\ b_1^+(\alpha) &= X_1(0,0;\alpha), \quad b_2^+(\alpha) = X_2(0,0;\alpha) \\ b_1^-(\alpha) &= Y_1(0,0;\alpha), \quad b_2^-(\alpha) = Y_2(0,0;\alpha), \quad a_{12}^-(\alpha) = \frac{\partial Y_1(0,0;\alpha)}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.5)$$

若 $\alpha = (0, 0)$ 时, 设系统 (2.4) 有一个鞍-折奇点 $O = (0, 0)$. 不失一般性, 我们假设初始时切换线不

可穿越, 且 $O = (0, 0)$ 是向量场 $(X_1, X_2)^T$ 的一个边界鞍点和 $(Y_1, Y_2)^T$ 的一个可视折点碰撞形成的, 即如图 1 所示.

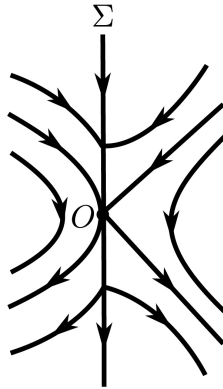


Figure 1. $O \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^e$, the boundary saddle-visible fold singularity of System (2.4)

图 1. $O \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^e$ 时, 系统 (2.4) 的边界鞍点-可视折点型

同时为了保证余维 2 鞍-折奇点的存在, 我们必须施加以下非简并条件: 鞍点的特征空间必须横截于 Σ , 并且鞍点的特征值的模必须不同. 这意味假设

$$(H0) \quad b_1^+(0) = b_2^+(0) = b_1^-(0) = 0, a_{12}^+(0) < 0, \det(J(0)) < 0, \text{tr}(J(0)) > 0, b_2^-(0) < 0, a_{12}^-(0) > 0$$

在本文中始终成立.

由于 $b_1^+(0) = X_1(0, 0; 0) = 0$ 以及 $a_{12}^+(0) = \frac{\partial X_1(0, 0; 0)}{\partial y} \neq 0$, 则根据隐函数定理可知存在一个 C^r 函数

$$y = \tau_1(\alpha) \tag{2.6}$$

使得对于充分小的 $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ 有 $\tau_1(0) = 0$ 和 $X_1(0, \tau_1(\alpha); \alpha) \equiv 0$. 受文献 [10] 启发, 下面通过构造同胚映射

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^+(\alpha) & -a_{12}^+(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - \tau_1(\alpha) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

对系统 (2.4) 进一步化简, 并令 $\mu(\alpha) = a_{12}^+(\alpha)b_2^+(\alpha)$, 则可将系统 (2.4) 的右子系统化简为 Liénard 规范型:

$$\begin{cases} \dot{x} = \text{tr}(J(\alpha))x - y + \mathcal{O}(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = \det(J(\alpha))x - \mu(\alpha) + \mathcal{O}(x^2 + y^2), \end{cases} \quad x > 0. \tag{2.8}$$

定义

$$\gamma(\alpha) = \frac{\text{tr}(J(\alpha))}{2\sqrt{-\det(J(\alpha))}}, \quad \hat{\mu}(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\sqrt{-\det(J(\alpha))}} \tag{2.9}$$

并做变量替换

$$(x, y, t) \rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{-\det(J(\alpha))}}, y, \frac{t}{\sqrt{-\det(J(\alpha))}} \right), \quad (2.10)$$

进一步将规范型 (2.8) 转化为如下形式

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\gamma(\alpha)x - y + \mathcal{O}(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x - \hat{\mu}(\alpha) + \mathcal{O}(x^2 + y^2), \end{cases} \quad x > 0. \quad (2.11)$$

类似地, 在同胚 (2.7) 和变量 (2.10) 的变换下, 也可对 (2.4) 的左子系统进行化简. 由假设 (H0) 可知, $Y_1(0, 0; 0) = 0$, $\frac{\partial Y_1(0, 0; 0)}{\partial y} = -\frac{a_{12}^-(0)}{a_{12}^+(0)} > 0$, 于是由隐函数定理, 存在一个 C^r 函数

$$y = \tau_2(\alpha) \quad (2.12)$$

使得 $\tau_2(0) = 0$ 以及 $Y_1(0, \tau_2(\alpha); \alpha) \equiv 0$, 即意味着 $(0, \tau_2(\alpha))^T$ 始终是 (2.4) 的左子系统的折点.

假设 $\hat{u}(\alpha)$ 和 $\tau_2(\alpha)$ 分别由式 (2.9) 和 (2.12) 定义. 取 $\beta = (\beta_1, \beta_2)^T$ 以及

$$\beta = \varphi(\alpha) = (\hat{u}(\alpha), \tau_2(\alpha))^T, \quad (2.13)$$

那么在鞍点-可视折点附近, 我们有如下命题所述的规范型.

命题2.3. 设 (H0) 成立, 以及

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial X_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial X_2(0, 0; 0)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial X_2(0, 0; 0)}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix} \neq \frac{a_{12}^+(0)}{a_{12}^-(0)} \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Y_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial Y_2(0, 0; 0)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Y_2(0, 0; 0)}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix}, \quad (2.14)$$

其中, $|\cdot|$ 表示行列式, 则

(i) (2.13) 式中的参数变换是同胚的;

(ii) 在式 (2.7), (2.10) 和 (2.13) 的变换下, 系统 (2.4) 变为如下拓扑等价规范型

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} F^+(x, y; \beta) \\ G^+(x, y; \beta) \end{pmatrix}, & x > 0, \\ \begin{pmatrix} F^-(x, y; \beta) \\ G^-(x, y; \beta) \end{pmatrix}, & x < 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

其中

$$F^+(x, y; \beta) = 2\gamma^\beta x - y + \mathcal{O}(x^2 + y^2),$$

$$G^+(x, y; \beta) = -x - \beta_1 + \mathcal{O}(x^2 + y^2),$$

$$F^-(x, y; \beta) = Y_1 \left(\frac{x}{\sqrt{-\det(J^\beta)}}, \tau_1(\varphi^{-1}(\beta)) + \frac{(a_{22}^+)^{\beta} x - \sqrt{-\det(J^\beta)} y}{(a_{12}^+)^{\beta} \sqrt{-\det(J^\beta)}}; \varphi^{-1}(\beta) \right),$$

$$G^-(x, y; \beta) = \frac{(a_{22}^+)^{\beta}}{\sqrt{-\det(J^{\beta})}} Y_1 \left(\frac{x}{\sqrt{-\det(J^{\beta})}}, \tau_1(\varphi^{-1}(\beta)) + \frac{(a_{22}^+)^{\beta} x - \sqrt{-\det(J^{\beta})} y}{(a_{12}^+)^{\beta} \sqrt{-\det(J^{\beta})}}; \varphi^{-1}(\beta) \right) - \frac{(a_{12}^+)^{\beta}}{\sqrt{-\det(J^{\beta})}} Y_2 \left(\frac{x}{\sqrt{-\det(J^{\beta})}}, \tau_1(\varphi^{-1}(\beta)) + \frac{(a_{22}^+)^{\beta} x - \sqrt{-\det(J^{\beta})} y}{(a_{12}^+)^{\beta} \sqrt{-\det(J^{\beta})}}; \varphi^{-1}(\beta) \right),$$

$$\gamma^{\beta} = \gamma(\varphi^{-1}(\beta)), \quad (a_{12}^+)^{\beta} = a_{12}^+(\varphi^{-1}(\beta)), \quad (a_{22}^+)^{\beta} = a_{22}^+(\varphi^{-1}(\beta)), \quad J^{\beta} = J(\varphi^{-1}(\beta));$$

(iii) $\gamma^0 = \gamma(0) > 0, G^-(0, 0; 0) > 0, F^-(0, \beta_2; \beta) \equiv 0, \frac{\partial F^-(0, 0; 0)}{\partial y} > 0, \frac{\partial F^-(0, 0; 0)}{\partial \beta_2} < 0$ 且 $(0, \beta_2)^T$ 始终是系统 (2.15) 关于向量场 $(F^-, G^-)^T$ 的可视折点.

证明. 根据 (2.9) 和 (2.13) 式可以看出

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{12}^-(\alpha) b_2^-(\alpha) / \sqrt{-\det(J(\alpha))}, \\ \beta_2 = \tau_2(\alpha). \end{cases}$$

又由 $b_2^+(0) = 0$ 及 $b_2^+(\alpha) = f_2^+(0, 0; \alpha)$ 可知

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha=0} = \frac{a_{12}^+(0)}{\sqrt{-\det(J(0))}} \frac{\partial X_2(0, 0; 0)}{\partial \alpha_1} \quad \text{和} \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} \Big|_{\alpha=0} = \frac{a_{12}^+(0)}{\sqrt{-\det(J(0))}} \frac{\partial X_2(0, 0; 0)}{\partial \alpha_2}. \quad (2.16)$$

回顾 $\tau_1(\cdot)$ 的定义 (2.6) 式以及 $a_{12}^+(\alpha) = \frac{\partial X_1(0, 0; \alpha)}{\partial y}$, 有

$$\frac{\partial \tau_1(0)}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{a_{12}^+(0)} \frac{\partial X_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_1} \quad \text{和} \quad \frac{\partial \tau_1(0)}{\partial \alpha_2} = -\frac{1}{a_{12}^+(0)} \frac{\partial X_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_2}.$$

因此, 通过 (2.12) 式定义的 $\tau_2(\cdot)$, 我们进一步可得到

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha=0} = -\frac{\partial X_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_1} + \frac{a_{12}^+(0)}{a_{12}^-(0)} \frac{\partial Y_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_1} \quad (2.17)$$

和

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} \Big|_{\alpha=0} = -\frac{\partial X_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_2} + \frac{a_{12}^+(0)}{a_{12}^-(0)} \frac{\partial Y_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_2}. \quad (2.18)$$

从而结合 (2.14), (2.16), (2.17) 和 (2.18) 式, 有

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix} \Big|_{\alpha=0} = \frac{a_{12}^+(0)}{\sqrt{-\det(J(0))}} \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial X_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial X_2(0, 0; 0)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial X_2(0, 0; 0)}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix} - \frac{a_{12}^+(0)}{a_{12}^-(0)} \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Y_1(0, 0; 0)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial Y_2(0, 0; 0)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Y_2(0, 0; 0)}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix} \right) \neq 0$$

成立. 因此, (2.13) 式中的参数变换是同胚的. 下面我们证明 (ii) 和 (iii).

通过直接计算以及利用假设 (H0), 我们可以得到

$$\gamma^0 = \gamma(0) > 0, \quad G^-(0, 0; 0) > 0, \quad F^-(0, \beta_2; \beta) \equiv 0, \quad \frac{\partial F^-(0, 0; 0)}{\partial y} = -\frac{a_{12}^-(0)}{a_{12}^+(0)} > 0.$$

因此, $(0, \beta_2)^T$ 总是相对于向量场 $(F^-, G^-)^T$ 是一个可视折点. 另外由 $F^-(0, \beta_2; \beta) \equiv 0$ 可知, 存在一个 C^r 函数 $\tilde{F}^-(x, y; \beta)$ 使得 $F^-(x, y; \beta) = (y - \beta_2) \tilde{F}^-(x, y; \beta)$. 这意味着 $\frac{\partial F^-(0, 0; 0)}{\partial \beta_2} =$

$-\frac{\partial F^-(0,0;0)}{\partial y} < 0$, 证毕. \square

显然, 系统 (2.15) 与原系统 (2.4) 在拓扑上等价. 因此在本文的剩余部分, 我们主要研究规范型 (2.15) 且将 $F^\pm(x, y; \beta)$ 和 $G^\pm(x, y; \beta)$ 分别重写为 $F^\pm(x, y; \beta_1, \beta_2)$ 和 $G^\pm(x, y; \beta_1, \beta_2)$.

3. 平衡点分支

为了研究具有图 1 这种类型的边界鞍点-可视折点的分支结果, 需分析系统 (2.15) 的平衡点情况和滑模动力学, 其结果由下面的命题给出.

命题 3.1. 设 (H0) 成立, 对于足够小的 $\|\beta\|$, 对系统 (2.15) 以下结论成立:

(i) 若 $\beta_1 > 0$, 原点 O 是一个关于向量场 $(F^+, G^+)^T$ 的可视折点; 而若 $\beta_1 < 0$, 则原点 O 是一个关于向量场 $(F^+, G^+)^T$ 的不可视折点.

(ii) 当 $\beta_1 < 0$ 时, 系统 (2.15) 有一个实鞍点 S , 而当 $\beta_1 > 0$ 时, 系统 (2.15) 有一个虚鞍点. 此外, 当 $\beta_1 < 0$ 时, 实鞍点 S 具有一个局部稳定流形和一个局部不稳定流形, 它们分别在 $(0, y_s(\beta))^T$ 和 $(0, y_u(\beta))^T$ 处与 Σ 相交, 并且

$$y_s(\beta) = \beta_1 \left(y_s^0 + \mathcal{O} \left(\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \right) \right), \quad y_u(\beta) = \beta_1 \left(y_u^0 + \mathcal{O} \left(\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \right) \right), \quad (3.1)$$

其中

$$y_s^0 = \sqrt{1 + (\gamma^0)^2} - \gamma^0, \quad y_u^0 = -\sqrt{1 + (\gamma^0)^2} - \gamma^0. \quad (3.2)$$

证明. 结论 (i) 可根据文献 [12] 直接计算得到, 下面主要证明结论 (ii).

由命题 2.3 (ii) 计算得

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^+(0,0;0,0)}{\partial x} & \frac{\partial F^+(0,0;0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial G^+(0,0;0,0)}{\partial x} & \frac{\partial G^+(0,0;0,0)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\gamma^0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

以及 $F^+(0,0;0,0) = 0$, $G^+(0,0;0,0) = 0$, 于是根据隐函数定理可知式 (2.15) 的左子系统有一个鞍点 $S = (x^*(\beta_1, \beta_2), y^*(\beta_1, \beta_2))^T$. 因为 $F^+(0,0;0, \beta_2) \equiv 0$ 和 $G^+(0,0;0, \beta_2) \equiv 0$, 我们有 $x^*(0, \beta_2) \equiv 0$ 以及 $y^*(0, \beta_2) \equiv 0$. 这暗含着存在 C^r 函数 $\tilde{x}^*(\beta_1, \beta_2)$ 和 $\tilde{y}^*(\beta_1, \beta_2)$ 使得 $x^*(\beta_1, \beta_2) = \beta_1 \tilde{x}^*(\beta_1, \beta_2)$ 且 $y^*(\beta_1, \beta_2) = \beta_1 \tilde{y}^*(\beta_1, \beta_2)$. 又由隐函数求导注意到 $\frac{\partial x^*(0,0)}{\partial \beta_1} = -1$ 以及 $\frac{\partial y^*(0,0)}{\partial \beta_1} = -2\gamma^0$, 我们有

$$x^*(\beta) = x^*(\beta_1, \beta_2) = \beta_1 \left(-1 + \mathcal{O} \left(\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \right) \right), \quad y^*(\beta) = y^*(\beta_1, \beta_2) = \beta_1 \left(-2\gamma^0 + \mathcal{O} \left(\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \right) \right). \quad (3.3)$$

这意味着对于足够小的 $\|\beta\|$, 当 $\beta_1 < 0$ 时鞍点 S 是实的, 而当 $\beta_1 > 0$ 时鞍点 S 是虚的. 根据文献 [18] 中的定理 3.2.1, 鞍点 S 具有一个局部不变稳定流形 $y = h_s(x)$ 和一个局部不变不稳定流形 $y = h_u(x)$, 其中

$$h_s(x^*(\beta)) = h_u(x^*(\beta)) = y^*(\beta), \quad h'_s(x^*(\beta)) = -y_u^0, \quad h'_u(x^*(\beta)) = -y_s^0.$$

因此

$$h_s(x) = y^*(\beta) - y_u^0(x - x^*(\beta)) + \mathcal{O}\left((x - x^*(\beta))^2\right) \quad (3.4)$$

和

$$h_u(x) = y^*(\beta) - y_s^0(x - x^*(\beta)) + \mathcal{O}\left((x - x^*(\beta))^2\right), \quad (3.5)$$

这说明局部稳定流形和不稳定流形将分别在 $(0, y_s(\beta))^T$ 和 $(0, y_u(\beta))^T$ 处与 Σ 相交. 更进一步, 分别在 (3.4) 和 (3.5) 式中令 $x = 0$, 则有

$$y_s(\beta) = y^*(\beta) + y_u^0 x^*(\beta) + \mathcal{O}\left((x^*(\beta))^2\right) \quad (3.6)$$

和

$$y_u(\beta) = y^*(\beta) + y_s^0 x^*(\beta) + \mathcal{O}\left((x^*(\beta))^2\right). \quad (3.7)$$

将 (3.3) 代入到式 (3.6) 和式 (3.7) 中可得

$$y_s(\beta) = \beta_1 \left(y_s^0 + \mathcal{O}\left(\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}\right) \right) \quad \text{和} \quad y_u(\beta) = \beta_1 \left(y_u^0 + \mathcal{O}\left(\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}\right) \right). \quad (3.8)$$

证毕. □

接下来, 关于系统 (2.15) 的滑模动力学分析, 我们给出如下命题.

命题3.2. 对于足够小的 $\|\beta\|$ 且 $\beta_2 \neq 0$, 则对于系统 (2.15) 有以下结论成立:

(i) 如果 $\beta_2 > 0$, 则存在一个穿越域为 $\Sigma^c = \{(0, y)^T \mid 0 < y < \beta_2\}$, 此时逃逸域仍为 $\Sigma^c = \{(0, y)^T \mid y < 0\}$, 而滑模域变为 $\Sigma^s = \{(0, y)^T \mid y > \beta_2\}$;

(ii) 如果 $\beta_2 < 0$, 则存在一个穿越域为 $\Sigma^c = \{(0, y)^T \mid \beta_2 < y < 0\}$, 此时滑模域仍为 $\Sigma^c = \{(0, y)^T \mid y > 0\}$, 而逃逸域变为 $\Sigma^s = \{(0, y)^T \mid y < \beta_2\}$.

证明. 由命题 2.3 (ii) 计算可得

$$Xh(0, y) = (1, 0) \begin{pmatrix} F^+(x, y; \beta) \\ G^+(x, y; \beta) \end{pmatrix} = -y \quad (3.9)$$

和

$$Yh(0, y) = (1, 0) \begin{pmatrix} F^-(x, y; \beta) \\ G^-(x, y; \beta) \end{pmatrix} = (b_1^-)^\beta + (a_{12}^-)^\beta \tau_1 (\varphi^{-1}(\beta)) - \frac{(a_{12}^-)^\beta}{(a_{12}^+)^\beta} y \quad (3.10)$$

于是根据穿越域的定义以及 $Y_1(0, \tau_2(\alpha); \alpha) \equiv 0$, $\beta_2 = \tau_2(\alpha)$, 若 $\beta_2 > 0$, 显然可得系统 (2.15) 存在一个穿越域 $\Sigma^c = \{(0, y)^T \mid 0 < y < \beta_2\}$; 若 $\beta_2 < 0$ 则穿越域变为 $\Sigma^c = \{(0, y)^T \mid \beta_2 < y < 0\}$. 同理可分别计算滑模域和逃逸域. 证毕. □

4. 主要结果及其证明

本节将借助以上分析的平衡点和滑模情况来介绍我们的主要结果及其证明. 结果表明, 在图

1这种类型的鞍-折奇点附近, 会发生文献 [15] 中研究的伪边界鞍点分支和两个可视折点的碰撞 VV_1 分支. 此外, 在 $\beta_1 < 0$ 的参数空间中, 存在两条余维 1 分支曲线 $\eta_1(\beta_1)$ 和 $\eta_2(\beta_1)$. 这两条分支曲线与其他三条余维 1 分支曲线 $l_1 = \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 = 0, \beta_2 > 0\}$, $l_2 = \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 > 0, \beta_2 = 0\}$, $l_3 = \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 = 0, \beta_2 < 0\}$ 及 $l_0 = \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 < 0, \beta_2 = 0\}$ 将参数空间划分为以下几个区域:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 > 0, \beta_2 > 0\}, \\
 R_2 &= \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 < 0, \beta_2 > \eta_1(\beta_1)\}, \\
 R_3 &= \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 < 0, 0 < \beta_2 < \eta_1(\beta_1)\}, \\
 R_4 &= \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 < 0, \eta_2(\beta_1) < \beta_2 < 0\}, \\
 R_5 &= \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 < 0, \beta_2 < \eta_2(\beta_1)\}, \\
 R_6 &= \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 > 0, \beta_2 < 0\},
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

为方便起见, 我们用 $C_{ij} = (\partial R_i \cap \partial R_j) \setminus \{(0, 0)\}$ 表示 R_i 与 R_j ($i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$) 之间的边界, 则在这种情况下, 曲线 $\beta_2 = \eta_i(\beta_1)$ ($i \in \{1, 2\}$) 分别对应 C_{23} 和 C_{45} . 参数空间和分岔图如下图 2 所示.

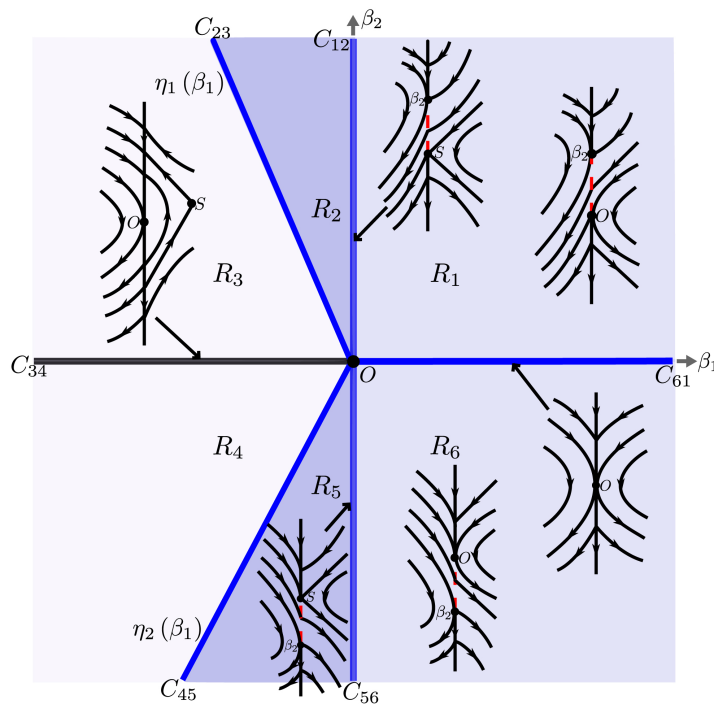


Figure 2. Parameter regions, bifurcation curves and bifurcation diagram of the system (2.15) near the saddle-visible fold singularity O

图 2. 系统 (2.15) 在鞍点-可视折点 O 附近的参数空间、分支曲线及分岔图

下面我们通过几个定理来阐述该种鞍-折奇点类型分岔图的结果.

定理 4.1. 设 $|\beta| \neq 0$, 只要 $\|\beta\|$ 充分小, 那么对于系统 (2.15) 其经历以下分岔:

(i) 若 $\beta_2 > 0$, $(\beta_1, \beta_2) \in C_{12}$, 则在 $l_1 = \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 = 0, \beta_2 > 0\}$ 这条分支曲线上, 会发生伪边界-鞍点分支;

(ii) 若 $\beta_1 > 0$, $(\beta_1, \beta_2) \in C_{61}$, 则在 $l_2 = \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 > 0, \beta_2 = 0\}$ 这条分支曲线上, 会发生两个可视折点的碰撞 VV_1 分支;

(iii) 若 $\beta_2 < 0$, $(\beta_1, \beta_2) \in C_{56}$, 则在 $l_3 = \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 = 0, \beta_2 < 0\}$ 这条分支曲线上, 会发生伪边界-鞍点分支.

证明. 由命题 3.1 和命题 2.3 可知, 对于参数区域 $\{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 < 0, \beta_2 > 0\}$, 系统 (2.15) 有一个实鞍点 S 、一个可视折点 $(0, \beta_2)^T$. 随着 β_1 不断减小, 在 C_{12} 边界上, 实鞍点 S 和原点 O 碰撞形成一个边界鞍点. 而对于参数区域 $R_1 = \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 > 0, \beta_2 > 0\}$, 则存在一个可视折点 O , 其替代边界鞍点. 同时这里没有吸引子. 因此, 根据文献 [15] 中的研究, 在 $l_1 = \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 = 0, \beta_2 > 0\}$ 这条分支曲线上发生了伪边界-鞍点分支, 这就证明了结论 (i).

下面我们证明结论 (ii). 对于足够小的 $\|\beta\|$, 若 $\beta_1 > 0$, 则由命题 3.1 (i) 和命题 2.3 (iii) 可知, 向量场 $(F^+, G^+)^T$ 有一个可视折点 $O \in \Sigma$, 而向量场 $(F^-, G^-)^T$ 有一个可视折点 $(0, \beta_2)^T \in \Sigma$. 进一步, 在边界 C_{61} 上, 这两个可视折点碰撞, 即 $O = (0, \beta_2)^T = (0, 0)^T$. 另外, 由命题 3.2 可知, 在 C_{61} 边界上, 系统 (2.15) 有一个包含奇异滑动点的滑模段. 当 $\beta_2 \neq 0, \beta_1 > 0$ 时, 可视折点 O 和 $(0, \beta_2)^T$ 划定了切换线上的一段穿越域, 其轨线可从 Σ^+ 穿到 Σ^- , 而当 $\beta_1 > 0$ 时, 其轨线变为从 Σ^- 穿到 Σ^+ . 因此, 根据文献 [15] 中的研究, 在 $l_2 = \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 > 0, \beta_2 = 0\}$ 这条分支曲线上发生了两个可视折点的碰撞 VV_1 分支. 即结论 (ii) 成立.

对于结论 (iii), 其证明类似于结论 (i) 的证明, 故省略. 证毕. □

如果存在一个实鞍点 S , 即 $\beta_1 < 0$, 则可以产生两条全局分支曲线. 这一事实由以下两个定理来说明, 其对应的分岔图如图 3 和图 4 所示.

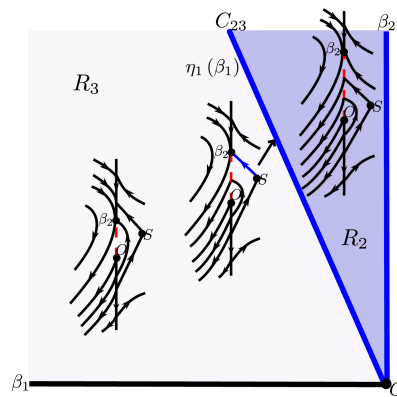


Figure 3. Bifurcation diagram of the system (2.15) with $\beta_1 < 0$ and $\beta_2 > 0$

图 3. $\beta_1 < 0$ 且 $\beta_2 > 0$ 时系统 (2.15) 的分岔图

定理 4.2. 设 $\beta_1 < 0$ 以及 $\beta_2 > 0$, 那么对于充分小的 $\|\beta\|$, 存在一个 C^r 函数

$$\eta_1(\beta_1) = y_u^0 \beta_1 + \mathcal{O}(\beta_1^2), \tag{4.2}$$

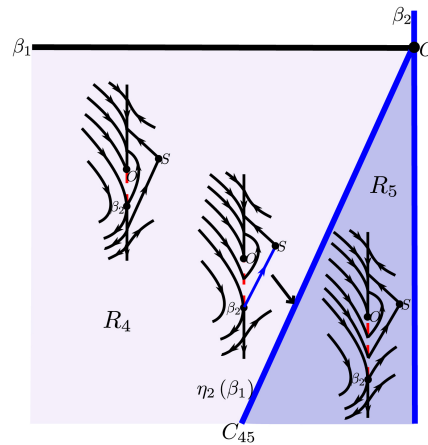


Figure 4. Bifurcation diagram of the system (2.15) with $\beta_1 < 0$ and $\beta_2 < 0$

图 4. $\beta_1 < 0$ 且 $\beta_2 < 0$ 时系统 (2.15) 的分岔图

使得系统 (2.15) 有一个连接鞍点 S 和可视折点 $(0, \beta_2)^T$ 的分隔线.

证明. 设 $\beta_1 < 0, \tilde{\beta}_2 > 0$, 其中 $\tilde{\beta}_2 = \beta_2/\beta_1$. 令

$$\tilde{y}_u(\beta_1, \tilde{\beta}_2) = y_u(\beta_1, \beta_1 \tilde{\beta}_2)/\beta_1, \tag{4.3}$$

则由命题 3.1 可得

$$\tilde{y}_u(\beta_1, \tilde{\beta}_2) = y_u^0 + \mathcal{O}(\beta_1). \tag{4.4}$$

考虑方程 $\Gamma(\beta_1, \tilde{\beta}_2) = 0$, 其中

$$\Gamma(\beta_1, \tilde{\beta}_2) = \tilde{y}_u(\beta_1, \tilde{\beta}_2) - \tilde{\beta}_2. \tag{4.5}$$

由 (4.4) 式可知 $\Gamma(\beta_1, \tilde{\beta}_2) = y_u^0 - \tilde{\beta}_2 + \mathcal{O}(\beta_1)$, 因此 $\Gamma(0, y_u^0) = 0$ 且 $\frac{\partial \Gamma(0, y_u^0)}{\partial \tilde{\beta}_2} = -1$. 于是由隐函数定理, 存在一个 C^r 函数 $\tilde{\beta}_2 = \tilde{\eta}_1(\beta_1)$ 使得

$$\tilde{\eta}_1(0) = y_u^0, \quad \tilde{\eta}_1(\beta_1) = y_u^0 + \mathcal{O}(\beta_1). \tag{4.6}$$

成立. 这意味着若 $\tilde{\beta}_2 = \tilde{\eta}_1(\beta_1)$, 则 $\tilde{y}_u(\beta_1, \tilde{\beta}_2) = \tilde{\beta}_2$.

接下来, 令 $\eta_1(\beta_1) = \beta_1 \tilde{\eta}_1(\beta_1)$, 将 (4.6) 式代入有

$$\eta_1(\beta_1) = y_u^0 \beta_1 + \mathcal{O}(\beta_1^2)$$

即 (4.2) 式成立且 $\tilde{\beta}_2 = \tilde{y}_u(\beta_1, \tilde{\beta}_2)$, 这说明系统 (2.15) 鞍点的不稳定流形与 Σ 的交点 $(0, y_u(\beta))^T$ 和可视折点 $(0, \beta_2)^T$ 碰撞, 即在 $\eta_1(\beta_1)$ 这条余维 1 分支曲线上, 系统 (2.15) 存在一个连接鞍点 S 和可视折点 $(0, \beta_2)^T$ 的分隔线. 证毕. \square

定理4.3. 设 $\beta_1 < 0$ 以及 $\beta_2 < 0$, 那么对于充分小的 $\|\beta\|$, 存在一个 C^r 函数

$$\eta_2(\beta_1) = y_s^0 \beta_1 + \mathcal{O}(\beta_1^2), \quad (4.7)$$

使得系统 (2.15) 有一个连接鞍点 S 和可视折点 $(0, \beta_2)^T$ 的分隔线.

证明. 该定理的证明与定理 4.2 的证明类似, 因此省略. 证毕. \square

5. 结论

本文利用规范型和滑模动力学对一般平面 Filippov 系统中全滑模切换线上的余维 2 边界鞍点-可视折点分支进行了详细的分析. 结果表明, 在鞍点-可视折点附近可以产生伪边界-鞍点分支和两个可视折点的碰撞 VV_1 分支. 此外, 我们还得到了在 $\beta_1 < 0$ 的参数子区域内, 会产生两条分支曲线, 使得所研究系统有一个连接鞍点和可视折点的分隔线. 最后, 本文的研究结果也证实了文献 [16] 中分段线性系统的鞍点-折点分支的结论也适用于一般平面 Filippov 系统. 应该指出的是, 本文中我们将注意力限制在其中一种拓扑不等价鞍-折奇点类型上. 事实上, 其他情况也可以进行类似的研究, 这将留给我们未来的工作.

参考文献

- [1] Chen, H., Duan, S., Tang, Y. and Xie, J. (2018) Global Dynamics of a Mechanical System with Dry Friction. *Journal of Differential Equations*, **265**, 5490-5519. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.06.013>
- [2] Banerjee, S. and Verghese, G.C. (2001) *Nonlinear Phenomena in Power Electronics: Bifurcations, Chaos, Control, and Applications*. IEEE Press, New York. <https://doi.org/10.1109/9780470545393>
- [3] Wang, J., Zhang, F. and Wang, L. (2016) Equilibrium, Pseudoequilibrium and Sliding-Mode Heteroclinic Orbit in a Filippov-Type Plant Disease Model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **31**, 308-324. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2016.01.017>
- [4] di Bernardo, M., Nordmark, A. and Olivar, G. (2008) Discontinuity-Induced Bifurcations of Equilibria in Piecewise-Smooth and Impacting Dynamical Systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **237**, 119-136. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.08.008>
- [5] Angulo, F., Olivar, G., Osorio, G.A., Escobar, C.M., Ferreira, J.D. and Redondo, J.M. (2012) Bifurcations of Non-Smooth Systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, 4683-4689. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.07.021>
- [6] Chen, X. and Han, M. (2022) Further Study on Horozov-Iliev's Method of Estimating the Number of Limit Cycles. *Science China Mathematics*, **65**, 2255-2270. <https://doi.org/10.1007/s11425-021-1933-7>

-
- [7] Han, M. and Zhang, W. (2010) On Hopf Bifurcation in Non-Smooth Planar Systems. *Journal of Differential Equations*, **248**, 2399-2416. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.10.002>
- [8] Novaes, D.D., Teixeira, M.A. and Zeli, I.O. (2018) The Generic Unfolding of a Codimension-Two Connection to a Two-Fold Singularity of Planar Filippov Systems. *Nonlinearity*, **31**, 2083-2104. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/aaaaf7>
- [9] Shao, Y., Li, S. and Wu, K. (2021) Global Phase Portraits of Planar Piecewise Linear Refracting Systems of Saddle-Saddle Type. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **62**, Article 103381. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103381>
- [10] Freire, E., Ponce, E. and Torres, F. (2012) Canonical Discontinuous Planar Piecewise Linear Systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **11**, 181-211. <https://doi.org/10.1137/11083928X>
- [11] Freire, E., Ponce, E. and Torres, F. (2014) A General Mechanism to Generate Three Limit Cycles in Planar Filippov Systems with Two Zones. *Nonlinear Dynamics*, **78**, 251-263. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1437-7>
- [12] Freire, E., Ponce, E. and Torres, F. (2015) On the Critical Crossing Cycle Bifurcation in Planar Filippov Systems. *Journal of Differential Equations*, **259**, 7086-7107. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.08.013>
- [13] Wang, J., Huang, C. and Huang, L. (2019) Discontinuity-Induced Limit Cycles in A General Planar Piecewise Linear System of Saddle-Focus Type. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **33**, 162-178. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2019.03.004>
- [14] Filippov, A.F. (1988) *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*. Kluwer Academic Publishers, London.
- [15] Kuznetsov, Y.A., Rinaldi, S. and Gragnani, A. (2003) One-Parameter Bifurcations in Planar Filippov Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **13**, 2157-2188. <https://doi.org/10.1142/S0218127403007874>
- [16] Guardia, M., Seara, T. and Teixeira, M. (2011) Generic Bifurcations of Low Codimension of Planar Filippov Systems. *Journal of Differential Equations*, **250**, 1967-2023. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.11.016>
- [17] Wang, J. and Huang, L. (2021) Limit Cycles Bifurcated from a Focus-Fold Singularity in General Piecewise Smooth Planar Systems. *Journal of Differential Equations*, **304**, 491-519. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.10.006>
- [18] Wiggins, S. (2003) *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer-Verlag, New York.