Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(4), 1663-1670
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134158

Hans汉斯

Robin 边值问题三个正解的存在性

唐旭莹

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年3月25日；录用日期：2024年4月23日；发布日期：2024年4月30日

摘 要

本文运用 Leggett-Williams 不动点定理讨论了具有平均曲率算子 Robin 边值问题

$$\begin{cases} \Delta(\varphi(\Delta u(t-1))) + f(t,u(t)) = 0, & t \in [1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ \Delta u(0) = 0, & u(T+1) = 0, \end{cases}$$

三个正解的存在性，其中，$\mathbb{Z}$ 表示整数集，$[1,T]_{\mathbb{Z}} := \{1,2,...,T-1,T\}$，$T \geq 2$ 是正整数，$\varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$，$s \in (-1,1)$，非线性项 $f : [1,T]_{\mathbb{Z}} \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ 连续，Δ 是前项差分算子。

关键词

Leggett-Williams 不动点定理，平均曲率算子，Robin 边值问题，三个正解

Existence of Three Positive Solutions for Robin Boundary Value Problems

Xuying Tang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 25^{th}, 2024; accepted: Apr. 23^{rd}, 2024; published: Apr. 30^{th}, 2024

文章引用: 唐旭莹. Robin边值问题三个正解的存在性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1663-1670.
DOI: 10.12677/aam.2024.134158

Abstract

In this paper, by using the Leggett-Williams fixed point theorem, we give the existence of three positive solutions for the following Robin boundary value problem with mean curvature operator

$$\begin{cases} \Delta(\varphi(\Delta u(t-1))) + f(t, u(t)) = 0, \quad t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}, \\ \Delta u(0) = 0, \quad u(T+1) = 0, \end{cases}$$

where $\mathbb{Z}$ **denotes the integer set,** $[1, T]_{\mathbb{Z}} := \{1, 2, ..., T-1, T\}$**,** $T \geq 2$ **is an integer,** $\varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$**,** $s \in (-1, 1)$**, Nonlinear term** $f : [1, T]_{\mathbb{Z}} \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ **is operator continuous,** Δ **is the forward difference operator.**

Keywords

Leggett-Williams Fixed Point Theorem, Mean Curvature Operator, Robin Boundary Value Problem, Three Positive Solutions

1. 引言

平均曲率问题在余维一的类空间子流形的研究中起着重要的作用 [1,2]. 这类问题在微分几何, 物理, 力学, 天体物理, 相对论及非线性分析等领域有着广泛的应用. 由此引起了越来越多专家和学者的关注, 并取得了许多成果 [2–14], 平均曲率的研究主要采用临界点理论, Leray-Schauder 度, 上下解方法, 拓扑度理论以及变分法等方法.

文 [3]讨论了 Minkowski 空间中具有平均曲率算子的离散边值问题

$$\begin{cases} \Delta\left[\frac{\Delta u(k-1)}{\sqrt{1-(\Delta u(k-1))^2}}\right] + \lambda\mu(k)(u(k))^q = 0, \ k \in [2, n-1]_{\mathbb{Z}}, \\ \Delta u(1) = u(n) = 0, \end{cases}$$

至少有一个或两个正解, 其中 λ 是一个正实参数, $n > 4$, $q > 1$ 且 $\mu : [2, n-1]_{\mathbb{Z}} \to (0, \infty)$.

文 [4]研究了带 p-Laplacian 算子的二阶离散边值问题

$$\begin{cases}\Delta(\phi_p(\Delta y(k-1))) - r(k)\phi_p(y(k)) + f(k, y(k)) = 0,\ k \in [1, T]_{\mathbb{Z}},\\ \Delta y(0) = \Delta y(T) = 0,\end{cases}$$

多重解的存在性, 其中 T是正整数, 非线性项 $f : [1, T]_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续, $p > 1$, $\phi_p(y) := |y|^{p-2}y$, $r : [1, T]_{\mathbb{Z}} \to (0, \infty)$.

文 [5]证明了在 Minkowski 空间中涉及平均曲率算子奇异 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\operatorname{div}(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-\nabla v}}) + f(|x|, v) = 0,\ \ x \in B(1),\\ v = 0 \qquad x \in \partial B(1),\end{cases}$$

正径向解的多重性, 其中 $f : [0, 1] \times [0, 1)\times \to [0, \infty)$ 连续且 f 在 $v = 1$ 处奇异, $B(1) = \{x \in [0, 1] : \|x\| < 1\}$.

受上述文献的启发, 本文运用 Leggett-Williams 不动点定理证明如下 Robin 边值问题

$$\begin{cases}\Delta(\varphi(\Delta u(t-1))) + f(t, u(t)) = 0,\ \ t \in [1, T]_{\mathbb{Z}},\\ \Delta u(0) = 0,\ \ u(T + 1) = 0,\end{cases} \tag{1}$$

至少存在三个正解.

本文总假设

(H1) σ, a, b, c, d 为正常数, 且 $0 < \sigma < 1, 0 < a < b \le \sigma d < d < 1$.

(H2) $f(t, u) \le \frac{\varphi(\frac{a}{T})}{T}$, $\ (t, u) \in [1, T]_{\mathbb{Z}} \times [0, a]$.

(H3) $f(t, u) \le \frac{\varphi(\frac{d}{T})}{T}$, $\ (t, u) \in [1, T]_{\mathbb{Z}} \times [0, d]$.

(H4) $f(t, u) \ge \frac{\varphi(\frac{b}{3})}{T-2}$, $\ (t, u) \in [1, T]_{\mathbb{Z}} \times [b, \frac{b}{\sigma}]$.

2. 预备知识

下面引入本文使用的记号和引理:

记 $X = \{u \mid u \in [1, T + 1]_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R},\ \Delta u(0) = u(T + 1) = 0)\}$, 在范数 $\|u\| = \max\limits_{t\in[1,T+1]_{\mathbb{Z}}} |u(t)|$ 下构成 Banach 空间, $K = \{u \in X \mid u(t) \ge 0,\ \min\limits_{t\in[3,T-2]_{\mathbb{Z}}} u(t) \ge \delta\|u\|\}$ 是 X 上的一个锥, 其中 $\mathbb{R}$ 是一个实数集. 定义

$$K_d = \{u \in K \mid \|u\| < d\},\ K(\gamma, a, b) = \{u \in K \mid \gamma(u) \ge a, \|u\| \le b\}.$$

记 φ 的逆算子为 φ^{-1}, 对任意 $l, m \in \mathbb{Z}$, 且 $m > l$, 有 $\sum\limits_{t=m}^{l} u(t) = 0$.

引理 1 ([3]) 对任意的 $u \in X$ 且 $u(t) \geq 0, \Delta u(t)$ 在$[1, T]_{\mathbb{Z}}$ 上递减, 则存在一个 $0 < \delta < 1$, 使得 $\min\limits_{t \in [3, T-2]_{\mathbb{Z}}} u(t) \geq \delta \|u\|$.

本文所使用的工具如下：

引理 2 ([5]) 令 K 是实 Banach 空间 X 上的一个锥, $A : \bar{K_d} \to \bar{K_d}$ 是全连续的, 且 γ 是 K 上一个非负连续的上凸函数且对任意的 $u \in \bar{K_d}$ 满足 $\gamma(u) \leq \|u\|$. 假设 $0 < a < b < c \leq d$,

(A1) $\{u \in K(\gamma, b, c) : \gamma(u) > b\} \neq \theta$ 且 $\gamma(Au) > b, u \in K(\gamma, b, c)$,

(A2) $\|Au\| < a, \|u\| \leq a$,

(A3) $\gamma(Au) > b, u \in K(\gamma, b, c), \|Au\| > c$.

则 A 至少存在三个正的不动点 $u_1, u_2, u_3 \in \bar{K_d}$, 并且满足以下条件：

$$\|u_1\| < a,\ \gamma(u_2) > b,\ \|u_3\| > a,\ \gamma(u_3) < b.$$

3. 主要结果

在 K 上定义一个非线性算子 A,

$$Au(t) = \sum_{\tau=t}^{T} \varphi^{-1}\big[\sum_{j=1}^{\tau} f(j, u(j))\big],\ t \in [1, T+1]_{\mathbb{Z}}.$$

显然, 如果 $u \in K$ 是 A 的一个不动点, 则 u 是问题 (1) 的一个正解, 易得 $Au(t) \in X$. 对任意的 $u \in K$, 通过简单的计算, 有

$$\Delta Au(t) = -\varphi^{-1}\big[\sum_{j=1}^{t} f(j, u(j))\big] \leq 0,\ t \in [1, T]_{\mathbb{Z}},$$

故 $Au(t)$ 在 $[1, T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上单调递减, 从而

$$Au(t) \geq Au(T+1) = 0,$$

对任意的 $u \in K$, 有

$$\Delta(\varphi(\Delta u(t-1))) = -f(t, u(t)) \leq 0,\ t \in [1, T]_{\mathbb{Z}},$$

故 $\varphi(\Delta u(t-1)) = -\sum_{j=1}^{t} f(j, u(j))$ 在 $[1, T]_{\mathbb{Z}}$ 上递减, 又因 φ 是递增的, 所以, $\Delta(Au)(t)$ 在 $[1, T]_{Z}$ 单调递减, 故由引理 1 可得

$$\min_{t \in [3, T-2]_{\mathbb{Z}}} Au(t) \geq \delta \|Au\|,$$

显然, 易证 A 在 K 上是全连续的.

定理 1 假设 (H1)-(H4) 成立, 则问题 (1) 至少有三个正解 $u_1, u_2, u_3 \in \bar{K_d}$ 且满足以下条件

$$\|u_1\| < a,\ \min_{t\in[3,T-2]_{\mathbb{Z}}} u_2(t) > b,\ \|u_3\| > a,\ \min_{t\in[3,T-2]_{\mathbb{Z}}} u_3(t) < b.$$

证明 不妨设

$$\gamma(u) = \min_{t\in[3,T-2]_{\mathbb{Z}}} u(t),\ u \in K,$$

显然 γ 是 K 上一个非负连续上凸函数且 $\gamma(u) \le \|u\|,\ u \in K$.

对于 $b < \sigma d$ 的情况, 设 $c = \frac{b}{\sigma}$, 则 $d > c$. 首先, 我们证明 $A : \bar{K_d} \to \bar{K_d}$. 对任意的 $u \in \bar{K_d}$, 由 (H3), 有

$$\begin{aligned}\|Au\| &= \max_{t\in[1,T+1]_{\mathbb{Z}}} |Au(t)| \\ &= \sum_{\tau=1}^{T} \varphi^{-1}\big[\sum_{j=1}^{\tau} f(j, u(j))\big] \\ &\le \sum_{\tau=1}^{T} \varphi^{-1}\big[\sum_{j=1}^{\tau} \frac{\varphi(\frac{d}{T})}{T}\big] \\ &\le T\varphi^{-1}\big[T\frac{\varphi(\frac{d}{T})}{T}\big] = d\end{aligned}$$

故 $A : \bar{K_d} \to \bar{K_d}$. 其次, 我们证明 $\|Au\| < a$, 对任意的 $u \in \bar{K_a}$, 由 (H2), 有

$$\begin{aligned}\|Au\| &= \max_{t\in[1,T+1]_{\mathbb{Z}}} |Au(t)| \\ &= \sum_{\tau=1}^{T} \varphi^{-1}\big[\sum_{j=1}^{\tau} f(j, u(j))\big] \\ &\le \sum_{\tau=1}^{T} \varphi^{-1}\big[\sum_{j=1}^{\tau} \frac{\varphi(\frac{a}{T})}{T}\big] \\ &\le T\varphi^{-1}\big[T\frac{\varphi(\frac{a}{T})}{T}\big] = a,\end{aligned}$$

因此,引理 2 的 (A2) 成立.

现在我们证明引理 2 的 (A1) 成立. 令 $u = \sigma(b + c)$, 则 $u \in K$ 且

$$c \ge \max_{t\in[1,T+1]_{\mathbb{Z}}} \|u\| \ge u(t) \ge \min_{t\in[3,T-2]_{\mathbb{Z}}} u(t) = \gamma(u) > b,$$

这就意味着

$$\{u \in K(\gamma, b, c) : \gamma(u) > b\} \neq \theta,$$

并且, 对于 $u \in K(\gamma, b, c)$, 有

$$b \leq u(t) \leq c = \frac{b}{\sigma},\ t \in [1, T+1]_{\mathbb{Z}},$$

则通过 (H4) 和引理 1, 有

$$\begin{aligned}
\gamma(Au(t)) &= \min_{t \in [3, T-2]_{\mathbb{Z}}} Au(t) \\
&= Au(T-2) \\
&\geq \sum_{\tau=T-2}^{T} \varphi^{-1}\Big[\sum_{j=1}^{\tau} \frac{\varphi(\frac{b}{3})}{T-2}\Big] \\
&= \sum_{\tau=T-2}^{T} \varphi^{-1}\Big[\tau \frac{\varphi(\frac{b}{3})}{T-2}\Big] \\
&\geq 3\varphi^{-1}\Big[(T-2)\frac{\varphi(\frac{b}{3})}{T-2}\Big] \\
&= b,
\end{aligned}$$

最后我们证明引理 2 的 (A3) 条件成立. 假设 $u \in K(\gamma, b, d)$, $\|Au\| > c$, 则

$$\gamma(Au(t)) = \min_{t \in [3, T-2]_{\mathbb{Z}}} Au(t) \geq \sigma\|Au\| > \sigma c = b.$$

对于情况 $b = \sigma d$, 可得 $c = d$. 同理, 引理 2 的 (A1)-(A3) 也成立. 综上所述, 引理 2 成立. 因此, 问题 (1) 至少有三个正解

$$\|u_1\| < a,\ \min_{t \in [3, T-2]_{\mathbb{Z}}} u_2(t) > b,\ \|u_3\| > a,\ \min_{t \in [3, T-2]_{\mathbb{Z}}} u_3(t) < b.$$

4. 应用举例

作为定理 1 的一个应用, 下面给出一个例子.

例 4.1 在问题 (1) 中, 假设 (H1) 成立, 且 $f(t, u) = \frac{tu^p}{(1-u^2)^q}$,

$$\frac{T^2 u^p \sqrt{T^2 - u^2}}{u(1-u^2)^q} \leq 1,\ u \in [0, d],\ \frac{1}{2} \leq q \leq 1,\ p \geq 1, \tag{2}$$

一方面, 由 (2) 可推出

$$\frac{tu^p}{(1-u^2)^q} \le \frac{Tu^p}{(1-u^2)^q} \le \frac{u}{T\sqrt{T^2-u^2}} \le \frac{a}{T\sqrt{T^2-a^2}} = \frac{\varphi(\frac{a}{T})}{T},\ (t,u) \in [1,T]_{\mathbb{Z}} \times [0,a]\ ,$$

$$\frac{tu^p}{(1-u^2)^q} \le \frac{Tu^p}{(1-u^2)^q} \le \frac{u}{T\sqrt{T^2-u^2}} \le \frac{d}{T\sqrt{T^2-d^2}} = \frac{\varphi(\frac{d}{T})}{T},\ (t,u) \in [1,T]_{\mathbb{Z}} \times [0,d]\ .$$

另一方面, 对任意的 $(t,u) \in [1,T]_{\mathbb{Z}} \times [b, \frac{b}{\sigma}]$, 有 $\frac{t^2u^p}{(1-u^2)^q} \ge \frac{b^p}{(1-b^2)^q} \ge \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} \ge \frac{\frac{b}{3}}{\sqrt{1-(\frac{b}{3})^2}} \ge \frac{\varphi(\frac{b}{3})}{T-2}$, 因此定理 1 的 (H1)-(H4) 成立, 故问题

$$\begin{cases} \Delta(\varphi(\Delta u(t-1))) + \frac{tu^p}{(1-u^2)^q} = 0,\ \ t \in [1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ \Delta u(0) = 0,\ \ u(T+1) = 0, \end{cases}$$

至少有三个正解

$$\|u_1\| < a,\ \min_{t\in[3,T-2]_{\mathbb{Z}}} u_2(t) > b,\ \|u_3\| > a,\ \min_{t\in[3,T-2]_{\mathbb{Z}}} u_3(t) < b.$$

5. 总结与讨论

本文讨论了 Robin 差分边值问题三个正解的存在性, 其中差分方程可以看作是连续函数导数的离散化, 随着科学技术的发展, 差分方程在物理, 化学, 工程信息, 人工智能等方面有着至关重要的作用, 因此, 差分方程的研究是有意义的. 本文将 Leggett-Williams 不动点定理运用于离散化的微分方程, 并得出至少存在三个正解的结果. 然而, 我们只说明了正解的存在性, 解的具体型式并没有给出. 因此, 这个问题我们还需进一步深入地去研究.

基金项目

甘肃省青年科技基金计划项目(21JR1RA230)，甘肃省高等学校创新能力提升项目(2021A-006)。

参考文献

[1] Bartnik, R. and Simon, L. (1982) Spacelike Hypersurfaces with Prescribed Boundary Values and Mean Curvature. *Communications in Mathematical Physics*, **87**, 131-152. https://doi.org/10.1007/BF01211061

[2] Pei, M. and Wang, L. (2020) Positive Radial Solutions of a Mean Curvature Equation in Lorentz-Minkowski Space with Strong Singularity. *Applicable Analysis*, **99**, 1631-1637. https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1555322

[3] Chen, T., Ma, R. and Liang, Y. (2019) Multiple Positive Solutions of Second-Order Nonlinear Difference Equations with Discrete Singular φ-Laplacian. *Journal of Difference Equations and Applications*, **25**, 38-55. https://doi.org/10.1080/10236198.2018.1554064

[4] Tian, Y. and Ge, W. (2008) The Existence of Solutions for a Second-Order Discrete Neumann Problem with a p-Laplacian. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **26**, 333-340. https://doi.org/10.1007/s12190-007-0012-5

[5] Liang, Z., Duan, L. and Ren, D. (2019) Multiplicity of Positive Radial Solutions of Singular Minkowski-Curvature Equations. *Archiv der Mathematik*, **113**, 415-422. https://doi.org/10.1007/s00013-019-01341-6

[6] Gurban, D. and Jebelean, P. (2019) Positive Radial Solutions for Multiparameter Dirichlet Systems with Mean Curvature Operator in Minkowski Space and Lane-Emden Type Nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, **266**, 5377-5396. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.10.030

[7] Bereanu, C., Jebelean, P. and Torres, P.J. (2013) Positive Radial Solutions for Dirichlet Problems with Mean Curvature Operators in Minkowski Space. *Journal of Functional Analysis*, **264**, 270-287. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2012.10.010

[8] 段磊, 陈天兰. 带平均曲率算子的离散混合边值问题凸解的存在性[J]. 数学物理学报, 2022, 42(2): 379-386.

[9] Gurban, D., Jebelean, P. and Serban, C. (2020) Non-Potential and Non-Radial Dirichlet Systems with Mean Curvature Operator in Minkowski Space. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **40**, 133-151. https://doi.org/10.3934/dcds.2020006

[10] Liang, Z. and Yang, Y. (2019) Radial Convex Solutions of a Singular Dirichlet Problem with the Mean Curvature Operator in Minkowski Space. *Acta Mathematica Scientia. Series B*, **39**, 395-402. https://doi.org/10.1007/s10473-019-0205-7

[11] Long, Y. and Chen, J. (2018) Existence of Multiple Solutions to Second-Order Discrete Neumann Boundary Value Problems. *Applied Mathematics Letters*, **83**, 7-14. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.03.006

[12] Mawhin, J. (2011) Radial Solutions of Neumann Problem for Periodic Perturbations of the Mean Extrinsic Curvature Operator. *Milan Journal of Mathematics*, **79**, 95-112. https://doi.org/10.1007/s00032-011-0148-5

[13] Su, X. and Ma, R. (2020) Multiple Positive Solutions of Second-Order Nonlinear Difference Equations with Discrete Singular φ-Laplacian. *Advances in Difference Equations*, **2020**, Article No. 677. https://doi.org/10.1186/s13662-020-03135-5

[14] Wang, S. and Zhou, Z. (2024) Heteroclinic Solutions for a Difference Equation Involving the Mean Curvature Operator. *Applied Mathematics Letters*, **147**, Article 108827. https://doi.org/10.1016/j.aml.2023.108827