Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(4), 1882-1904
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134177

Hans汉斯

$\mathbb{R}^3$ 中 p-curl-div 系统解的存在性

杨 洋，滕凯民

太原理工大学数学学院，山西 晋中

收稿日期：2024年3月28日；录用日期：2024年4月23日；发布日期：2024年4月30日

摘 要

本文采用变分法研究如下的 p-curl-div 方程

$$\nabla \times (|\nabla \times u|^{p-2}\nabla \times u) - \nabla(|\mathrm{div} u|^{p-2}\mathrm{div} u) = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

非平凡解的存在性，其中，$1 < p < 3$，$f(x,u) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 满足一些合理性假设。

关键词

p-curl-div系统，变分发，弱解

Existence of Nontrivial Solutions for p-curl-div System in $\mathbb{R}^3$

Yang Yang, Kaimin Teng

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jizhong Shanxi

Received: Mar. 28th, 2024; accepted: Apr. 23rd, 2024; published: Apr. 30th, 2024

文章引用: 杨洋, 滕凯民. $\mathbb{R}^3$ 中 p-curl-div 系统解的存在性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1882-1904.
DOI: 10.12677/aam.2024.134177

Abstract

In this paper, we study the following p-curl-div system

$$\nabla \times (|\nabla \times u|^{p-2}\nabla \times u) - \nabla(|\mathrm{div}u|^{p-2}\mathrm{div}u) = f(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

and establish the existence of solution, where $1 < p < 3$, $f(x,u) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ satisfies some reasonable hypothesis.

Keywords

p-curl-div System, Variational Approach, Weak Solution

1. 引言

本文研究如下 p-curl-div 方程

$$\nabla \times (|\nabla \times u|^{p-2}\nabla \times u) - \nabla(|\mathrm{div}u|^{p-2}\mathrm{div}u) = f(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

其中 $1 < p < 3$, $f(x,u) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. 含旋度算子的偏微分方程组在数学物理领域有着广泛的应用, 其中 p-curl-curl 方程组与描述硬超导体临界状态的 Bean 模型有着密不可分的关联. 本文所研究的系统来源于高温超导体 [1] 中的磁感应模型, 其中 u 表示磁场, $\nabla \times u$ 表示总电流密度, f 表示内部磁电流, 以及 $|\nabla \times u|^{p-2}\nabla \times u$ 表示电场.

p-curl-curl 方程组本身典型的拟线性结构, 奇异或退化性质, 及其在超导体临界状态方面的应用引起很多人的研究兴趣. 例如, 在 [2] 中, Yin 用能量估计的方法研究了如下系统

$$\begin{cases} \partial_t H + \nabla \times (|\nabla \times H|^{p-2}\nabla \times H) = F(x,t), \quad \mathrm{div}H = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ |\nabla \times H|^{p-2}\nabla \times H \times \mathbf{n} = 0, \quad H \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\ H(x,0) = H_0, \qquad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

解的存在性、唯一性和正则性. 当 $H(x,t)$ 与时间 t 无关时, 可得如下稳态的 p-curl-curl 系统

$$\begin{cases} \nabla\times\left(|\nabla\times H|^{p-2}\nabla\times H\right)=F(x), & x\in\Omega, \\ \operatorname{div}H=0, & x\in\Omega, \\ H\times\mathbf{n}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Yin [3] 研究了系统 (1.3) 在有界单连通区域上弱解的正则性, 给出了最优正则性弱解是属于 $C^{1+\alpha}$, 其中 $\alpha\in(0,1)$. 在 [4] 中, Laforest 采用亥姆霍兹分解证明了系统 (1.3) 在有界域上弱解的存在唯一性. 在 [5] 中, Wu和Bian证明了 (1.3) 的弱解的存在性和 L^∞ 估计. 在 [6] 中, Xiang研究了一类 $p(x)$-curl-curl 系统

$$\begin{cases} \nabla\times(|\nabla\times u|^{p(x)-2}\nabla\times u)+\alpha(x)|u|^{p(x)-2}u=f(x,t), & \operatorname{div}u=0, & x\in\Omega, \\ |\nabla\times u|^{p(x)-2}\nabla\times u\times\mathbf{n}=0, & u\cdot\mathbf{n}=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 Ω 是在 $\mathbb{R}^3$ 中具有 $C^{1,1}$ 边界的连通区域; $1<p(x)<3$, 并且在 Ω 上连续, 作者采用山路定理, 证明了该系统解的存在性和多重性.

特别地,当 $p=2$时, 具有如下形式的含有curl-curl算子的可变分方程

$$\nabla\times\nabla\times u+V(x)u=g(x,u),\quad x\in\mathbb{R}^3 \tag{1.5}$$

解的存在性和多重性引起了学者们的研究兴趣. 此类问题主要困难在于问题 (1.5) 对应的能量泛函的强不定性, 以及工作空间 $H^1(curl,\Omega)$ 一般情形下不具有 Sobolev 嵌入关系, 对特定区域具有嵌入关系. Benci 和 Fortunato 在文 [7] 中第一次提出 Born-Infeld 静态磁模型

$$\nabla\times\nabla\times A=W'(|A|^2)A,\qquad x\in\mathbb{R}^3, \tag{1.6}$$

并且在 f 的适当增长性条件下, 证明了 (1.6) 的非平凡有限能量解的存在性.

本文主要目的是研究系统 (1.1) 解存在性, 主要困难是在全空间中缺失紧性, 而山路结构得到的(PS)序列不具有有界性, 受文 [8] 的启发, 通过扰动的方法得到(PSP)序列, 而该序列可以得到其有界性, 再利用全局紧性引理恢复紧性. 但本文仅考虑了在 $\mathbb{R}^3$ 上的非平凡解的存在性, 对于更高维空间解的相关性质需要进一步寻求新的解决方法.

本文结构分布如下: 第二部分, 介绍了工作空间以及一些主要引理; 第三部分, 证明在山路几何水平结构 C_{mp} 处存在一列 (PSP) 序列, 并且说明该序列在通过合适的扰动之后可以收敛到问题 (1.1) 的解; 第四部分, 证明了 $(\mathrm{PSP})_b$ 序列的集中紧性型结果, 第五部分中, 将前一节的结果应用于山路水平 C_{mp} 的 $(\mathrm{PSP})_b$ 序列. 当 $(\mathrm{PSP})_b$ 序列收敛到能量泛函临界点时，构造路径并检查这些路径上的能量, 证明了山路值 C_{mp} 与 C_{po}, E_{po} 相等.

为了陈述我们的主要结果, 对 f 做如下假设:

(F_1) $f(x,u)\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, 且 $f(x,-u)=-f(x,u)$;

(F_2) $-\infty<\liminf_{|u|\to0}\frac{f(x,u)u}{|u|^p}\le\limsup_{|u|\to0}\frac{f(x,u)u}{|u|^p}<0$;

(F_3) $\lim_{|u|\to\infty}\frac{|f(x,u)|}{|u|^{p^*-1}}=0$, 其中 $p^*=\frac{3p}{3-p}$;

(F_4) $\partial_u F(x,u) = f(x,u)$, 且存在 ξ_0, 使得对所有的 $x \in \mathbb{R}^3$ 都有 $F(x,\xi_0) > 0$.

主要结果陈述如下:

定理 1.1

若 f 满足条件 $(F_1) - (F_4)$, 则问题 (1.1) 至少存在一个非平凡解 $u \in X^p(\mathbb{R}^3)$, 并且该解满足如下 Pohozave 等式

$$P(u) = \frac{3-p}{p}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla\times u|^p + |\mathrm{div}u|^p)\mathrm{d}x - 3\int_{\mathbb{R}^3} F(x,u)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1.7}$$

2. 变分框架

定义 Sobolev 空间

$$W^{1,p}(\mathrm{curl},\mathbb{R}^3) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^3) | \nabla\times u \in L^p(\mathbb{R}^3)\},\ 1 < p < 3,$$

其上赋予如下范数

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathrm{curl},\mathbb{R}^3)} := (|u|^p_{L^p} + |\nabla\times u|^p_{L^p})^{1/p},$$

设

$$W^{1,p}(\mathrm{div},\mathbb{R}^3) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^3) | \mathrm{div}u \in L^p(\mathbb{R}^3)\},$$

其上范数定义为

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathrm{div},\mathbb{R}^3)} := (|u|^p_{L^p} + |\mathrm{div}u|^p_{L^p})^{1/p},$$

在这些范数定义下, $W^{1,p}(\mathrm{curl},\mathbb{R}^N)$ 和 $W^{1,p}(\mathrm{div},\mathbb{R}^3)$ 均为 Banach 空间.

注2.1 空间 $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ 在 $W^{1,p}(\mathrm{curl},\mathbb{R}^3)$ 和 $W^{1,p}(\mathrm{div},\mathbb{R}^3)$ 内稠密.

进一步, 设

$$m_0 = -\frac{1}{2}\limsup_{|u|\to 0}\frac{f(x,u)u}{|u|^p} \in (0,\infty),$$

定义

$$X^p(\mathbb{R}^3) := W^{1,p}(\mathrm{curl},\mathbb{R}^3) \cap W^{1,p}(\mathrm{div},\mathbb{R}^3).$$

其上的范数定义为

$$\|u\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} := (|\nabla\times u|^p_{L^p} + |\mathrm{div}u|^p_{L^p} + m_0|u|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}},$$

引理 2.2 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 连续嵌入 $W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, 且存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C\Big(|v|_{L^p} + |\nabla\times v|_{L^p} + |\mathrm{div}v|_{L^p}\Big).$$

证 通过应用Harmonic analysis 的经典估计, 同理于文 [9] 引理 2.3 证明过程, 易证.

由 Sobolev 嵌入定理, $W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ 可以嵌入到 $L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $q \in (p,p^*)$, 可知, $X^p(\mathbb{R}^3)$ 嵌入 $L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

问题 (1.1) 对应的能量泛函 $J: X^p(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla\times u|^p + |\mathrm{div}u|^p)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} F(x,u)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

经计算, 类似于文 [10] 中命题 B.10 的证明, 可得 J 的如下性质.

引理2.3 泛函 $J(u)$ 的 Gâteaux 导数为, $\forall\varphi\in X_0^p(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} J'(u)[\varphi] = &\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla\times u|^{p-2}\nabla\times u)\cdot(\nabla\times\varphi) + (|\mathrm{div}u|^{p-2}\mathrm{div}u)\cdot(\mathrm{div}\varphi)\,\mathrm{d}x \\ &-\int_{\mathbb{R}^3} f(x,u)\cdot\varphi\,\mathrm{d}x, \quad \forall\varphi\in X^p(\mathbb{R}^3), \end{aligned} \tag{2.2}$$

且 $J(u)$ 在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 上是 C^1 的.

根据引理 2.3, 易得如下的变分原理.

命题 2.4 $u\in X^p(\mathbb{R}^3)$ 是系统 (1.1) 的弱解当且仅当 u 是泛函 J 的临界点.

设 $h(x,u)\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, 且 $h(x,u) = m_0|u|^{p-2}u + f(x,u)$, 则 $h(x,u)$ 满足下列条件:

(h_1) $h(x,u)\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, 且 $h(x,-u) = -h(x,u)$, 其中 $\partial_u H(x,u) = h(x,u)$;

(h_2) $-\infty < \liminf_{|u|\to 0}\frac{|h(x,u)|}{|u|^{p-1}} \le \limsup_{|u|\to 0}\frac{|h(x,u)|}{|u|^{p-1}} = -m_0 < 0$;

(h_3) $\lim_{|u|\to\infty}\frac{|h(x,u)|}{|u|^{p^*-1}} = 0$;

根据 $h(x,u)$ 定义易知问题 (1.1) 以及其能量泛函 $J(u)$ 等价于

$$\nabla\times(|\nabla\times u|^{p-2}\nabla\times u) - \nabla(|\mathrm{div}u|^{p-2}\mathrm{div}u) + m_0|u|^{p-2}u = h(x,u) \tag{2.3}$$

$$J(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} - \int_{\mathbb{R}^3} H(x,u)\,\mathrm{d}x, \tag{2.4}$$

引理 2.5 若 $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}\subset X^p(\mathbb{R}^3)$ 在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中有界, 且当 $j\to\infty$ 时 v_j 在 $L^q(\mathbb{R}^3)$ 中强收敛到 0, 其中 $q\in(p,p^*)$, 则有下式成立

$$\int_{\mathbb{R}^3}(h(x,v_j)\cdot v_j)\mathrm{d}x \to 0, \quad 当\, j\to\infty.$$

证 根据条件 $(h_1)-(h_3)$ 可知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $C_\varepsilon>0$ 使得

$$(h(x,u)\cdot u) \le C_\varepsilon|u|^q + \varepsilon|u|^{p^*}, \quad u\in\mathbb{R}^3. \tag{2.5}$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^3}(h(x,v_j)\cdot v_j)\mathrm{d}x \le C_\varepsilon|v_j|_{L^q}^q + \varepsilon|v_j|_{L^{p^*}}^{p^*}$$

由 $W^{1,p}(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^3)$, 可知 $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $L^{p^*}(\mathbb{R}^3)$ 中有界, 又由 v_j 在 $L^q(\mathbb{R}^3)$ 中强收敛到 0 可知

$$\limsup_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}(h(x,v_j)\cdot v_j)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon C.$$

由 ε 的任意性可得 $\int_{\mathbb{R}^3}(h(x,v_j)\cdot v_j)\,\mathrm{d}x\to 0$, 证毕.

引理 2.6 ([8]) 若 $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}\subset X^p(\mathbb{R}^3)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^3)$ 中有界, 且当 $j\to\infty$ 时 v_j 在 $L^q(\mathbb{R}^3)$ 中强收敛到 v_0, 其中 $q\in(p,p^*)$, 则有下式成立

$$\limsup_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}h(x,v_j)(v_j-v_0)\,\mathrm{d}x\le 0.$$

引理 2.7 ([11]) 对所有的 $y,z\in\mathbb{R}^3$, 都存在一个常数 $C>0$ 使得下面不等式成立:

其中 $p\ge 2$ 时

$$|y-z|^p\le C(|y|^{p-2}y-|z|^{p-2}z)(y-z),$$

$1<p\le 2$ 时

$$|y-z|^2\le C[(|y|^{p-2}y-|z|^{p-2}z)(y-z)](|y|+|z|)^{2-p}.$$

由此引理可推得

$$(|y|^{p-2}y-|z|^{p-2}z)(y-z)\ge 0. \tag{2.6}$$

引理 2.8 ([8]) 令 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ 中的可测集, $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $L^p(\Omega,\mathbb{R}^3)$ 中有界, 且 $\eta_0(x)\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^3)$. 则当

$$\int_{\Omega}(|\eta_j|^{p-2}\eta_j-|\eta_0|^{p-2}\eta_0)(\eta_j-\eta_0)\to 0,$$

时, 有下式成立

$$\|\eta_j-\eta_0\|_{L^p(\Omega)}\to 0, 当\ j\to\infty.$$

推论 2.9 令 $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}\subset X^p(\mathbb{R}^3)$ 满足 $v_j\rightharpoonup v_0$, 当 $j\to\infty$时, 若

$$\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla\times v_j|^{p-2}\nabla\times v_j-|\nabla\times v_0|^{p-2}\nabla\times v_0)(\nabla\times v_j-\nabla\times v_0)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}(|\mathrm{div}v_j|^{p-2}\mathrm{div}v_j-$$
$$|\mathrm{div}v_0|^{p-2}\mathrm{div}v_0)(\mathrm{div}v_j-\mathrm{div}v_0)\mathrm{d}x+m_0\int_{\mathbb{R}^3}(|v_j|^{p-2}v_j-|v_0|^{p-2}v_0)(v_j-v_0)\mathrm{d}x\to 0$$

则,

$$\|v_j-v_0\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}\to 0.$$

证 分别令 $\eta_j=v_j$, $\eta_j=\nabla\times v_j$, $\eta_j=\mathrm{div}v_j$, 同理于引理 2.8, 令 $\Omega=\mathbb{R}^3$, 可得 $\|v_j-v_0\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}\to 0$.

推论 2.10 令 $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}\subset X^p(\mathbb{R}^3)$ 满足 $v_j\rightharpoonup v_0$, 当 $j\to\infty$时, 若

$$\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla\times v_j|^{p-2}\nabla\times v_j-|\nabla\times v_0|^{p-2}\nabla\times v_0)(\nabla\times v_j-\nabla\times v_0)\mathrm{d}x\to 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}(|\mathrm{div}v_j|^{p-2}\mathrm{div}v_j-|\mathrm{div}v_0|^{p-2}\mathrm{div}v_0)(\mathrm{div}v_j-\mathrm{div}v_0)\mathrm{d}x\to 0,$$

则，通过选取子列重新定义为 $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$, 有下列式子成立

$$v_j \to v_0, \quad \text{in } X^p_{loc}(\mathbb{R}^3),$$

$$v_j(x) \to v_0(x), \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^3,$$

$$\nabla \times v_j(x) \to \nabla \times v_0(x), \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^3,$$

$$\text{div} v_j(x) \to \text{div} v_0(x), \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^3.$$

证 在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中 $v_j \rightharpoonup v_0$ 可知, 通过选取子列仍记为 $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$, 满足在 $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ 中 $v_j \to v_0$. 利用引理 2.8, 同理可得在 $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ 中 $\nabla \times v_j \to \nabla \times v_0$, $\text{div} v_j \to \text{div} v_0$, 故 v_j 在 $X^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ 中强收敛到 v_0. 进而利用 Riese定理可得几乎处处收敛成立.

推论 2.11 令 $\{v_j^1\}_{j=1}^{\infty}$, $\{v_j^2\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中有界, 当 $j \to \infty$ 时, 若

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla \times v_j^1|^{p-2} \nabla \times v_j^1 - |\nabla \times v_j^2|^{p-2} \nabla \times v_j^2)(\nabla \times v_j^1 - \nabla \times v_j^2) \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} (|\text{div} v_j^1|^{p-2} \text{div} v_j^1 - |\text{div} v_j^2|^{p-2} \text{div} v_j^2)(\text{div} v_j^1 - \text{div} v_j^2) \mathrm{d}x + m_0 \int_{\mathbb{R}^3} (|v_j^1|^{p-2} v_j^1 - |v_j^2|^{p-2} v_j^2)(v_j^1 - v_j^2) \mathrm{d}x \to 0$$

则,

$$\|v_j^1 - v_j^2\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} \to 0.$$

证 结合式 (2.6) 以及引理 2.8 可知, $\|v_j^1 - v_j^2\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \to 0$, $\|\nabla \times v_j^1 - \nabla \times v_j^2\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \to 0$, $\|\text{div} v_j^1 - \text{div} v_j^2\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \to 0$, 故 $\|v_j^1 - v_j^2\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} \to 0$, 命题得证.

3. 山路几何结构

定义 3.1 定义

$$C_{mp} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)), \tag{3.1}$$

其中

$$\Gamma = \{\gamma(t) \in (C[0,1], X^p(\mathbb{R}^3)) | \gamma(0) = 0, J(\gamma(1)) < 0\}.$$

定义具有 Pohozaev 性质的临界点中的最小能级为

$$E_{po} = \inf\{J(u) | u \in X^p(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}, J'(u) = 0, P(u) = 0\}. \tag{3.2}$$

定义 $J(u)$ 在 Pohozaev 流形 $\mathcal{P} = \{u \in X^p(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}, P(u) = 0\}$ 上的最小值为

$$C_{po} = \inf_{u \in \mathcal{P}} J(u). \tag{3.3}$$

引理 3.2 若 f 满足$(F_1) - (F_4)$, 则 $J(u)$ 满足下面结果

(i) $J(0) = 0$,

(ii)存在 ρ_0, $\delta_0 > 0$, 使得 $J(u) \geq \delta_0$, 其中 $\|u\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} = \rho_0$, (iii)存在 $u_0 \in X^p(\mathbb{R}^3)$ 使得 $\|u_0\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} > \rho_0$, 且$J(u) < 0$.

证 (i)显然, 下证(ii). 由假设 $(h_1) - (h_3)$ 知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得对所有的 s 都有下式成立

$$h(x,u)u \leq \varepsilon |u|^p + C_\varepsilon |u|^{p*},$$

则,

$$H(x,u) \leq \frac{C\varepsilon}{p}|s|^p + C'_\varepsilon |s|^{p*}.$$

根据 $X^p(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^3)$, 可得对所有的 $u \in X^p(\mathbb{R}^3)$ 有

$$J(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)} - \frac{\varepsilon}{p}|u|^{L^p}_p - C'_\varepsilon |u|^{p*}_{L^{p*}} \geq \frac{1-\varepsilon}{p}\|u\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)} - C''_\varepsilon \|u\|^{p*}_{X^p(\mathbb{R}^3)},$$

因此取 $\varepsilon \in (0,1)$ 且 $\rho_0 > 0$ 充分小时, 式 (ii) 成立.

下证 (iii) . 当 $R > 0$ 时, 定义 $\phi_R \in X^p(\mathbb{R}^N)$ 为如下形式

$$\phi_R(x) = \begin{cases} \xi_0, & \text{当 } |x| \leq R, \\ (R+1-|x|)\xi_0, & \text{当 } R < |x| < R+1, \\ 0, & \text{当 } |x| \geq R+1, \end{cases}$$

其中 $\xi_0 = (\xi_0^1, \xi_0^2, \xi_0^3)$, 则当 R 足够大时有 $\|\phi_R\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} > m_0 \int_{|x|\leq R} |\xi_0| \,\mathrm{d}x > \rho_0$. 又有

$$\begin{aligned} \nabla \times ((R+1-|x|)\xi_0) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ (R+1-|x|)\xi_0^1 & (R+1-|x|)\xi_0^2 & (R+1-|x|)\xi_0^3 \end{vmatrix} \\ &= (-\frac{x_2}{|x|}\xi_0^3 + \frac{x_3}{|x|}\xi_0^2, -\frac{x_3}{|x|}\xi_0^1 + \frac{x_1}{|x|}\xi_0^3, -\frac{x_1}{|x|}\xi_0^2 + \frac{x_2}{|x|}\xi_0^1). \end{aligned}$$

$$|\nabla \times ((R+1-|x|)\xi_0)|^2 = \frac{1}{|x|^2}[(x_3\xi_0^2 - x_2\xi_0^3)^2 + (x_1\xi_0^3 - x_3\xi_0^1)^2 + (x_2\xi_0^1 - x_1\xi_0^2)^2] \leq 2|\xi_0^2|.$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{R}+1-|\mathrm{x}|)\xi_0) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}}\big((\mathrm{R}+1-|\mathrm{x}|)\xi_0^{\mathrm{i}}\big) = -\sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \frac{\mathrm{x^i}}{|\mathrm{x}|}\xi_0^{\mathrm{i}} = -\frac{(\mathrm{x},\xi_0)}{|\mathrm{x}|}.$$

即 $|\mathrm{div}(\mathrm{R}+1-|\mathrm{x}|)\xi_0)| \leq |\xi_0|$. 进而

$$\begin{aligned} &\int_{R<|x|<R+1} |\nabla \times ((R+1-|x|)\xi_0)|^p + |\mathrm{div}((R+1-|x|)\xi_0)|^p \,\mathrm{d}x \\ =&\int_{R<|x|<R+1} |\frac{1}{|x|}|(x_2{\xi_0}^3 + x_3{\xi_0}^2, -x_3\xi_0^1 + x_1\xi_0^3, -x_1\xi_0^2 + x_2\xi_0^1)|^p + \frac{1}{|x|^p}|x_1\xi_0^1 + x_2\xi_0^2 + x_3\xi_0^3|^p \,\mathrm{d}x \\ \leq&\int_{R<|x|<R+1} (\sqrt{2}|\xi_0|)^p + |\xi_0|^p \,\mathrm{d}x \\ =&(1+2^{\frac{p}{2}})|\xi_0|^p \frac{4}{3}\pi[(R+1)^3 - R^3] \leq CR^2. \end{aligned}$$

又由 (F_4) 知存在常数 $\delta, C_1, C_2 > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(x, \phi_R(x))\,\mathrm{d}x \geq \delta|B_R| - |B_{R+1} - B_R|(\max_{R<|x|<R+1,\tau\in[0,\xi_0]} |F(x,\tau)|) \geq C_1R^3 - C_2R^2,$$

则,

$$J(\phi_R) = \frac{1}{p}\int_{R<|x|<R+1} |\nabla \times \big((R+1-|x|)\xi_0\big)|^p + |\mathrm{div}\big((R+1-|x|)\xi_0\big)|^p\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} F(x,\phi_R(x))\,\mathrm{d}x$$

$$\leq CR^2 - (C_1R^3 - C_2R^2) = C_3R^2 - C_1R^3.$$

故当 $R > 0$ 足够大时, 可得 $J(\phi_R) < 0$, 得证.

注 3.3 类似于 (ii) 证明过程，可得存在 $\varepsilon \in (0,1)$ 和 q, 其中 $q > p$ 使得当 $\|u\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} \leq 1$ 时有下式成立

$$J'(u)[u] = \|u\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)} - \int_{\mathbb{R}^3} h(x,u)u\,\mathrm{d}x \geq (1-\varepsilon)\|u\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)} - C_\varepsilon\|u\|^q_{X^p(\mathbb{R}^3)}, \tag{3.4}$$

则存在 $C > 0$ 使得对所有式 (1.1)的非平凡解都有 $\|u\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} \geq C$.

定义 3.4 若序列 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \in X^p(\mathbb{R}^3)$ 满足下列条件

(i) $J(u_j) \to b$,

(ii) $\|J'(u_j)\|_{X^{p'}(\mathbb{R}^3)} \to 0$,

(iii) $P(u_j) \to 0$,

则称该序列为 $J(u)$ 的 $(PSP)_b$ 序列.

下面定义映射 $J(\theta,u) : \mathbb{R} \times X^p(\mathbb{R}^3)$ 为

$$J(\theta,u) = \frac{1}{p}e^{(3-p)\theta}(|\nabla \times u|^p_{L^p} + |\mathrm{div}u|^p_{L^p}) - e^{3\theta}\int_{\mathbb{R}^3} F(x,u)\,\mathrm{d}x,$$

则下式成立

$$J(\theta,u) = J(u(\frac{x}{e^\theta})),$$

$$\partial_\theta J(\theta,u) = \frac{3-p}{p}e^{(3-p)\theta}(|\nabla \times u|^p_p + |\mathrm{div}u|^p_p) - 3e^{3\theta}\int_{\mathbb{R}^3} F(x,u)\,\mathrm{d}x = P(u(\frac{x}{e^\theta})),$$

$$\partial_u J(\theta,u) = e^{(3-p)\theta}(|\nabla \times u|^{p-2}\nabla \times u \cdot \nabla \times v + |\mathrm{div}u|^{p-2}\mathrm{div}u \cdot \mathrm{div}v) - e^{3\theta}\int_{\mathbb{R}^3} f(x,u)v\,\mathrm{d}x$$

$$= J'(u(\frac{x}{e^\theta}))v(\frac{x}{e^\theta}), \quad \text{其中 } v \in X^p(\mathbb{R}^3).$$

因此,

$$J(0,u) = J(u), \quad \partial_\theta J(0,u) = P(u), \quad \partial_u J(0,u)v = J'(u)v.$$

下面定义标准内积范数 $\|(\theta,u)\|_{\mathbb{R}\times X^p(\mathbb{R}^3)}=(|\theta|^p+\|u\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)})^{\frac{1}{p}}$. 其对偶范数 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}\times X^{p'}(\mathbb{R}^3)}$ 为

$$\|g\|_{\mathbb{R}\times X^{p'}(\mathbb{R}^3)}=\sup_{\|(\theta,u)\|_{\mathbb{R}\times X^p(\mathbb{R}^3)}\leq 1}|g(\theta,u)|,\quad 其中\ g\in\mathbb{R}\times X^{p'}(\mathbb{R}^3).$$

下面记 $D=(\partial_\theta,\partial_u)$, 则

$$\begin{aligned}DJ(\theta,u)(\kappa,v)&=\partial_\theta J(\theta,u)\kappa+\partial_u J(\theta,u)v,\quad 其中\ (\kappa,v)\in\mathbb{R}\times X^p(\mathbb{R}^3)),\\ \|DJ(\theta,u)\|_{\mathbb{R}\times X^{p'}(\mathbb{R}^3)}&=(|\partial_\theta J(\theta,u)|^{p'}+\|\partial_u J(\theta,u)\|^{p'}_{X^{p'}(\mathbb{R}^3)})^{\frac{1}{p'}}\\ &=(|P(u(\frac{x}{e^\theta}))|^{p'}+\|\partial_u J(\theta,u)\|^{p'}_{X^{p'}(\mathbb{R}^3)})^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

定义关于 $J(\theta,u)$ 的山路值为

$$\widetilde{C}_{mp}=\inf_{\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}}\max_{t\in[0,1]}J(\widetilde{\gamma}(t)),$$

其中 $\widetilde{\Gamma}=\{\widetilde{\gamma}(t)\in C([0,1],\mathbb{R}\times X^p(\mathbb{R}^3))|\widetilde{\gamma}(0)=(0,0),J(\widetilde{\gamma}(1))<0\}$.

引理 3.5 $\widetilde{C}_{mp}=C_{mp}$.

证 对任意的 $\gamma\in\Gamma$, 都有 $(0,\gamma(t))\in\widetilde{\Gamma}$, 故 $\Gamma\subset\widetilde{\Gamma}$, 则 $C_{mp}\geq\widetilde{C}_{mp}$. 接下来说明 $\widetilde{C}_{mp}\geq C_{mp}$. 对任意的 $\widetilde{\gamma}(t)=(\theta(t),\eta(t))\in\widetilde{\Gamma}$, 令$\gamma(t)(x)=\eta(t)(\frac{x}{e^{\theta(t)}})$. 则, $\gamma(t)\in\Gamma$ 且 $J(\gamma(t))=J(\widetilde{\gamma}(t))$. 因此, $\widetilde{C}_{mp}\geq C_{mp}$.

引理 3.6 泛函 $J(u)$ 存在 $(PSP)_{C_{mp}}$ 序列.

证 根据 C_{mp} 定义知，存在 $\{\gamma_j(t)\}_{j=1}^\infty\subset\Gamma$ 使得$\max_{t\in[0,1]}J(\gamma_j(t))\leq C_{mp}+\frac{1}{j}$. 利用文 [12] 引理 4.3 变形的 Ekeland变分原理可知, 存在 $\{\theta_j,v_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathbb{R}\times X^p(\mathbb{R}^3)$ 使得

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{R}\times X^p(\mathbb{R}^3)}((\theta_j,v_j),\{0\}\times\gamma_j([0,1]))\leq\frac{2}{\sqrt{j}},\tag{3.6}$$

$$|J(\theta_j,v_j)-C_{mp}|\leq\frac{1}{j},\tag{3.7}$$

$$\|DJ(\theta_j,v_j)\|_{\mathbb{R}\times X^{p'}(\mathbb{R}^3)}\leq\frac{2}{\sqrt{j}},\tag{3.8}$$

其中 $\mathrm{dist}_{\mathbb{R}\times X^p(\mathbb{R}^3)}((\theta,u),A)=\inf_{(\kappa,v)\in A}(|\theta-\kappa|^p+\|u-v\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)})^{\frac{1}{p}}$. 由 (3.6) 知, 当 $j\to\infty$ 时, $\theta_j\to 0$, 由 (3.7) 知

$$J(v_j(\frac{x}{e^{\theta_j}}))\to C_{mp},\tag{3.9}$$

由 (3.8) 知

$$P(v_j(\frac{x}{e^{\theta_j}}))\to 0.\tag{3.10}$$

下面说明下式成立

$$J'(v_j(\frac{x}{e^{\theta_j}}))\to 0,\tag{3.11}$$

根据 $J(\theta,u)$ 定义可知 $J'(v_j(\frac{x}{e^{\theta_j}}))\varphi(x)=\partial_u J(\theta_j,v_j)\varphi(e^{\theta_j}x)$, 则,

$$\begin{aligned}\|J'(v_j(\frac{x}{e^{\theta_j}}))\|_{X^{p'}(\mathbb{R}^3)}&=\sup_{\|\varphi\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}\le 1}|\partial_u J(\theta_j,v_j)\varphi(e^{\theta_j}x)|\\&\le\sup_{\|\varphi\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}\le 1}\|\partial_u J(\theta_j,v_j)\|_{X^{p'}(\mathbb{R}^3)}\|\varphi(e^{\theta_j}x)\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

又由

$$\begin{aligned}\|\varphi(e^{\theta_j}x)\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)}&=e^{-(3-p)\theta_j}(|\nabla\times\varphi|^p_{L^p}+|\mathrm{div}\varphi|^p_{L^p})+m_0e^{-3\theta_j}|\varphi|^p_{L^p}\\&\le e^{3|\theta_j|}\|\varphi\|_{X^p(\mathbb{R}^3)},\end{aligned}$$

代入式 (3.12) 得

$$\begin{aligned}\|J'(v_j(\frac{x}{e^{\theta_j}}))\|_{X^{p'}(\mathbb{R}^3)}&\le\sup_{\|\varphi\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}\le 1}\|\partial_u J(\theta_j,v_j)\|_{X^{p'}(\mathbb{R}^3)}e^{\frac{3}{p}|\theta_j|}\|\varphi\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}\\&\le\|\partial_u J(\theta_j,v_j)\|_{X^{p'}(\mathbb{R}^3)}e^{\frac{3}{p}|\theta_j|}.\end{aligned}$$

故, 当 $\theta_j\to 0$, 结合式 (3.5) 以及式 (3.8)知, 式 (3.11)成立. 因此, 令 $u_j=v_j(\frac{x}{e^{\theta_j}})$, 此时 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}\subset X^p(\mathbb{R}^3)$ 为 $(PSP)_{C_{mp}}$ 序列.

4. 集中紧性

引理 4.1 若 f 满足条件 $(F_1)-(F_4)$, 令 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}\subset X^p(\mathbb{R}^3)$ 为 $J(u)$ 的 $(PSP)_b$ 序列, 其中 $b>0$, 则通过选取子列, 重新定义为 $\{u_j\}$, 存在 $k\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, 序列 $\{y_j^1\}_{j=1}^{\infty},\cdots,\{y_j^k\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^3$, 以及 $w_1,\cdots,w_k\subset X^p(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}$ 使得

$$J'(w_j)=0,\quad i=1,\cdots,k,\tag{4.1}$$

$$|y_j^i-y_j^{i'}|\to\infty,\quad i\neq i',\tag{4.2}$$

$$\|u_j(\cdot)-\sum_{i=1}^{k}w_i(\cdot-y_j^i)\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}\to 0,\tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{k}J(w_i)=b,\tag{4.4}$$

$$\sum_{i=1}^{k}P(w_i)=0.\tag{4.5}$$

在证明该命题前先介绍下列引理.

引理 4.2 令 $\mathcal{Q}=[0,1]^3$, $\xi=\xi_1,\cdots,\xi_N\in\mathbb{Z}^3$, $\xi+\mathcal{Q}=[\xi_1,\xi_1+1]\times\cdots\times[\xi_3,\xi_3+1]$. 对任意的

$r \in (p, p*)$, 存在 $C > 0$ 使得对所有的 $u \in X^p(\mathbb{R}^3)$ 都有下式成立

$$|u|_{L^r} \le C(\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3} \|u\|_{L^r(\xi+\mathcal{Q})})^{\frac{r-p}{r}} \|u\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}^{\frac{p}{r}}.$$

证 首先

$$|u|_{L^r}^r = \int_{\mathbb{R}^3} |u|^r \mathrm{d}x = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^3} \|u\|_{L^r(\xi+\mathcal{Q})}^r \le (\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3} \|u\|_{L^r(\xi+\mathcal{Q})}^r)^{r-p} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^3} \|u\|_{L^r(\xi+\mathcal{Q})}^p.$$

利用 Sobolev 不等式知, 存在 $C > 0$ 使得对所有的 $u \in X^p(\mathcal{Q})$ 都有 $\|u\|_{L^r(\mathcal{Q})} \le C\|u\|_{X^p(\mathcal{Q})}$. 因此, $|u|_{L^r}^r \le C(\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3} \|u\|_{L^r(\xi+\mathcal{Q})}^r)^{r-p} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^3} \|u\|_{X^p(\xi+\mathcal{Q})}^p = C(\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3} \|u\|_{L^r(\xi+\mathcal{Q})}^r)^{r-p}\|u\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}^p$.

推论 4.3 令 $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset X^p(\mathbb{R}^3)$ 是一个有界序列, 若当 $j \to \infty$ 时, $\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3} \|u_j\|_{L^p(\xi+\mathcal{Q})} \to 0$, 则对任意的 $r \in (p, p*)$, 当 $j \to \infty$ 时, 有$|u_j|_{L^r} \to 0$.

证 由于 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中是一个有界的, 根据插值不等式以及 Sobolev 不等式可得

$$\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3} \|u_j\|_{L^r(\xi+\mathcal{Q})} \le \sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3} C\|u_j\|_{L^p(\xi+\mathcal{Q})}^\theta \|u_j\|_{L^q(\xi+\mathcal{Q})}^{1-\theta}$$

$$\le \sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3} C'\|u_j\|_{L^p(\xi+\mathcal{Q})}^\theta \|u_j\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}^{1-\theta} \to 0.$$

再利用引理 4.2 知, 当 $j \to \infty$ 时, $|u_j|_r \to 0$.

下面说明 (PSP) 序列的有界性.

引理 4.4 当 $b > 0$, $(PSP)_b$序列在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中是有界的.

证 由条件 $(h_1) - (h_3)$ 知, 对任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在一个 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$(h(x, u)u) \le \varepsilon|u|^p + C_\varepsilon|u|^{p*}.$$

因此, 当 $u \in X^p(\mathbb{R}^3)$ 时

$$J'(u)u \ge |\nabla \times u|_{L^p}^p + |\mathrm{div} u|_{L^p}^p + (m_0 - \varepsilon)|u|_{L^p}^p - C_\varepsilon|u|_{L^{p*}}^{p*}.$$

根据泛函 J, P 的定义可知 $|\nabla \times u_j|_{L^p}^p + |\mathrm{div} u_j|_{L^p}^p = 3J(u) - P(u)$, 又由 $\{u_j\}$ 是 (PSP) 序列知 $|\nabla \times u_j|_{L^p}^p + |\mathrm{div} u_j|_{L^p}^p$ 是有界的, 故结合 Sobolev 不等式以及引理 2.2 知 $|u_j|_{L^{p*}}^{p*}$ 是有界的. 由下式

$$|\nabla\times u_j|_{L^p}^p + |\mathrm{div} u_j|_{L^p}^p + (m_0-\varepsilon)|u_j|_{L^p}^p - C_\varepsilon|u_j|_{L^{p*}}^{p*} \le \|J'(u_j)\|_{X^{p'}(\mathbb{R}^3)}(|\nabla\times u_j|_{L^p}^p + |\mathrm{div} u_j|_{L^p}^p + m_0|u_j|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}$$

可得 $|u_j|_{L^p}^p$ 是有界的.

结合上面引理, 可知存在一列 $J(u)$ 的 $(PSP)_b$ 序列 $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset X^p(\mathbb{R}^3)$, 其中 $b > 0$ 且该序列在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 上有界, 下面证明引理 4.1.

引理 4.5

$$\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3}\|u_j\|_{L^p(\xi+\mathcal{Q})}\nrightarrow 0.$$

证 由 $b>0$ 易知在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_j\nrightarrow 0$. 反证法, 若$\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3}\|u_j\|_{L^p(\xi+\mathcal{Q})}\to 0$, 则由推论 4.3 知对任意的 $r\in(p,p*)$, 当 $j\to\infty$ 时, 有$|u_j|_{L^r}\to 0$, 故, 由式 (2.5) 知

$$\|u_j\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)}\le J'(u_j)u_j+C_\varepsilon|u_j|^q_{L^q}+\varepsilon|u_j|^{p*}_{L^{p*}},$$

其中 $q\in(p,p*)$, 由于 $J'(u_j)\to 0$, $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 在 $L^{p*}(\mathbb{R}^3)$ 中有界, 进而当 $j\to\infty$ 时,$\|u_j\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)}\to 0$, 矛盾, 证毕.

由引理 4.5 知, 存在 $\{y_j^1\}_{j=1}^\infty\subset\mathbb{Z}^3$ 使得 $\|u_j\|_{L^p(y_j^1+\mathcal{Q})}\to c$, 其中 $c>0$. 由定义 $\|u_j\|^p_{L^p(y_j^1+\mathcal{Q})}=\|u_j(\cdot+y_j^1)\|^p_{L^p(\mathcal{Q})}$, 可知, 存在 $w_1\in X^p(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}$ 使得在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_j(x+y_j^1)\rightharpoonup w_1(x)$. 下面将说明 w_1 为我们所求泛函 J 的临界点。

引理 4.6 w_1 满足 $J'(w_1)=0$.

证 首先说明在任意的紧支集 $K\subset\mathbb{R}^3$ 中都有下式成立

$$\int_K|\nabla\times u_j(x+y_j^1)-\nabla\times w_1(x)|^p+|\mathrm{div}u_j(x+y_j^1)-\mathrm{div}w_1(x)|^p\mathrm{d}x\to 0,\quad 当\, j\to\infty. \tag{4.6}$$

由引理 2.8 知只需说明当 $j\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&\int_K[|\nabla\times u_j(x+y_j^1)|^{p-2}(\nabla\times u_j(x+y_j^1))-|\nabla\times w_1(x)|^{p-2}(\nabla\times w_1(x))](\nabla\times u_j(x+y_j^1)\\&-\nabla\times w_1(x))\mathrm{d}x\to 0,\end{aligned}\tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}&\int_K[|\mathrm{div}u_j(x+y_j^1)|^{p-2}(\mathrm{div}u_j(x+y_j^1))-|\mathrm{div}w_1(x)|^{p-2}\mathrm{div}w_1(x)](\mathrm{div}u_j(x+y_j^1)-\mathrm{div}w_1(x))\mathrm{d}x\\&\to 0.\end{aligned}\tag{4.8}$$

这里, 记 $A=|\nabla\times u_j(x+y_j^1)|^{p-2}(\nabla\times u_j(x+y_j^1))-|\nabla\times w_1(x)|^{p-2}(\nabla\times w_1(x))$,

$$B=|\mathrm{div}u_j(x+y_j^1)|^{p-2}(\mathrm{div}u_j(x+y_j^1))-|\mathrm{div}w_1(x)|^{p-2}\mathrm{div}w_1(x),$$

取 $R>0$ 使得 $K\subset B(0;R)=\{x\in\mathbb{R}^3\mid|x|\le R\}$. 令 $\rho\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ 为截断函数, 使得

$$\rho(x)=\begin{cases}(1,1,1) & 当\,|x|\le R\\ (0,0,0) & 当\,|x|\ge R+1\end{cases}$$

且对所有的 $x\in\mathbb{R}^3$ 都有 $|\nabla\rho(x)|\le C$. 根据引理 2.9 可知

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_K A(\nabla \times u_j(x+y_j^1) - \nabla \times w_1(x)) + B(\mathrm{div} u_j(x+y_j^1) - \mathrm{div} w_1(x))\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{B(0;R)} A(\nabla \times u_j(x+y_j^1) - \nabla \times w_1(x)) + B(\mathrm{div} u_j(x+y_j^1) - \mathrm{div} w_1(x))\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{B(0;R+1)} A(\nabla \times u_j(x+y_j^1) - \nabla \times w_1(x))\rho + B(\mathrm{div} u_j(x+y_j^1) - \mathrm{div} w_1(x))\rho\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} A\nabla \times \big(\rho(u_j(x+y_j^1) - w_1(x))\big) + B\mathrm{div}\big(\rho(u_j(x+y_j^1) - w_1(x))\big)\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^3} A(u_j(x+y_j^1) - w_1(x))\nabla \times \rho - B(u_j(x+y_j^1) - w_1(x))\mathrm{div}\rho\,\mathrm{d}x = (\mathrm{I}) - (\mathrm{II}).
\end{aligned}
$$

其中,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \times u_j(x+y_j^1)|^{p-2}(\nabla \times u_j(x+y_j^1))\nabla \times (\rho(u_j(x+y_j^1) - w_1(x))) \\
&\qquad + |\mathrm{div} u_j(x+y_j^1)|^{p-2}(\mathrm{div} u_j(x+y_j^1))\mathrm{div}(\rho(u_j(x+y_j^1) - w_1(x)))\,\mathrm{d}x \\
=& J'(u_j(x+y_j^1))\rho(x)(u_j(x+y_j^1) - w_1(x)) + \int_{\mathbb{R}^3} h(u_j(x+y_j^1))\rho(x)(u_j(x+y_j^1) - w_1(x))\,\mathrm{d}x \\
&\qquad - m_0 \int_{\mathbb{R}^3} |u_j(x+y_j^1)|^{p-2}(u_j(x+y_j^1))\rho(x)(u_j(x+y_j^1) - w_1(x))\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

由于 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中有界, 则

$$
\begin{aligned}
&|J'(u_j(x+y_j^1))\rho(x)(u_j(x+y_j^1) - w_1(x))| \\
\leq& \|J'(u_j)\|_{X^{p'}(\mathbb{R}^3)} \|\rho(x-y_j^1)(u_j - w_1(x-y_j^1))\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} \to 0.
\end{aligned}
$$

根据 $u_j(x+y_j^1) \to w_1$, 在 $L^r_{loc}(\mathbb{R}^3)$ 中, 其中 $r \in [1, p*)$, 可得

$$
\begin{aligned}
&m_0 \int_{\mathbb{R}^3} |u_j(x+y_j^1)|^{p-2} u_j(x+y_j^1) \cdot \rho(x)[u_j(x+y_j^1) - w_1(x)]\,\mathrm{d}x \\
\leq& C\|u_j(x+y_j^1)\|^{\frac{p-1}{p}}_{L^p_{loc}(K)} \|u_j(x+y_j^1) - w_1(x)\|_{L^p_{loc}(K)} \to 0,
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} h(u_j(x+y_j^1)) \cdot \rho(x)(u_j(x+y_j^1) - w_1(x))\,\mathrm{d}x \\
\leq& \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\varepsilon|u_j(x+y_j^1)|^{p*-1} + C_\varepsilon|u_j(x+y_j^1)|^{q-1}) \cdot (u_j(x+y_j^1) - w_1(x))\,\mathrm{d}x \\
\leq& C_1\|u_j(x+y_j^1)\|^{\frac{p*-1}{p*}}_{L^{p*}_{loc}(K)} \|u_j(x+y_j^1) - w_1(x)\|_{L^{p*}_{loc}(K)} \\
&+ C_2\|u_j(x+y_j^1)\|^{\frac{q-1}{q}}_{L^q_{loc}(K)} \|u_j(x+y_j^1) - w_1(x)\|_{L^q_{loc}(K)} \to 0.
\end{aligned}
$$

将上述不等式代入 (4.9)中, 可得当 $j\to\infty$ 时

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\times u_j(x+y_j^1)|^{p-2}\nabla\times u_j(x+y_j^1)\nabla\times(\rho(u_j(x+y_j^1)-w_1(x)))$$

$$+|\mathrm{div}u_j(x+y_j^1)|^{p-2}\mathrm{div}u_j(x+y_j^1)\mathrm{div}(\rho(u_j(x+y_j^1)-w_1(x)))\,\mathrm{d}x\to 0.$$

利用 $u_j(x+y_j^1)$ 在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中弱收敛到 $w_1(x)$ 可知 (I) $\to 0$. 由于 $\nabla\times u$ 以及 $\mathrm{div}u$ 在 $L^p(\mathbb{R}^3)$ 中有界, $(u_j(x+y_j^1)-w_1(x))\nabla\times\rho$ 以及 $(u_j(x+y_j^1)-w_1(x))\mathrm{div}\rho$ 在 $L^p(\mathbb{R}^3)$ 中强收敛到 0, 则 $|(\mathrm{II})|\to 0$, 进而式 (4.7), (4.8)成立. 则对任意的 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 有 $J'(u_j(x+y_j^1)\varphi\to J'(w_1)\varphi$. 又因在 $X^{p'}(\mathbb{R}^3)$ 中 $J'(u_j)\to 0$, 得 $J'(w_1)=0$.

引理 4.7 存在 $k\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, 序列 $\{y_j^1\}_{j=1}^\infty,\cdots,\{y_j^k\}_{j=1}^\infty\subset\mathbb{R}^3$, 以及 $w_1,\cdots,w_k\subset X^p(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}$ 使得

$$\text{当} j\to\infty\text{且}i\neq i'\text{时},\quad |y_j^i-y_j^{i'}|\to\infty, \tag{4.10}$$

$$\text{在}X^p(\mathbb{R}^3)\text{中, 当} j\to\infty\text{时},\quad u_j(x+y_j^1)\rightharpoonup w_1(x), \tag{4.11}$$

$$J'(w_i)=0, \tag{4.12}$$

且当 $j\to\infty$ 时, 若满足 $\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3}\|u_j(\cdot)-\sum_{i=1}^k w_i(\cdot-y_j^i)\|_{L^p(\xi+\mathcal{Q})}\to 0$, 此时有下式成立

$$\|u_j(\cdot)-\sum_{i=1}^k w_i(\cdot-y_j^i)\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}\to 0.$$

证 在推论 2.11 中, 令 $v_j^1(x)=u_j$, $v_j^2(x)=\sum_{i=1}^k w_i(x-y_j^i)$, 令 $r_j(x)=v_j^1-v_j^2$, 当

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\big(|\nabla\times u_j|^{p-2}\nabla\times u_j-|\nabla\times\sum_{i=1}^k w_i(x-y_j^i)|^{p-2}\nabla\times\sum_{i=1}^k w_i(x-y_j^i)\big)(\nabla\times r_j)\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\big(|\mathrm{div}u_j|^{p-2}\mathrm{div}u_j-|\mathrm{div}\sum_{i=1}^k w_i(x-y_j^i)|^{p-2}\mathrm{div}\sum_{i=1}^k w_i(x-y_j^i)\big)(\mathrm{div}r_j)\,\mathrm{d}x\\
&\quad+m_0\int_{\mathbb{R}^3}(|u_j|^{p-2}u_j-|\sum_{i=1}^k w_i(x-y_j^i)|^{p-2}\sum_{i=1}^k w_i(x-y_j^i))\cdot r_j\,\mathrm{d}x\\
&\to 0,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

此时, 有下式成立

$$\|r_j\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}=\|u_j(\cdot)-\sum_{i=1}^k w_i(\cdot-y_j^i)\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}\to 0.$$

故, 下面只需说明式 (4.13) 成立. 利用推论 4.3, 根据已知条件, 由 $\{r_j\}_{j=1}^\infty$ 在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中有界可知在 $L^r(\mathbb{R}^3)$ 中 $r_j\to 0$, 其中 $r\in(p,p*)$. 由式 (2.6) 知

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \int_{\mathbb{R}^3} \big(|\nabla \times u_j|^{p-2}\nabla \times u_j - |\nabla \times \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)|^{p-2}\nabla \times \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)\big)(\nabla \times r_j)\,\mathrm{d}x \\
& + \int_{\mathbb{R}^3} \big(|\mathrm{div} u_j|^{p-2}\mathrm{div} u_j - |\mathrm{div} \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)|^{p-2}\mathrm{div} \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)\big)(\mathrm{div} r_j)\,\mathrm{d}x \\
& + m_0 \int_{\mathbb{R}^3} (|u_j|^{p-2}u_j - |\sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)|^{p-2} \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)) \cdot r_j\,\mathrm{d}x \\
= & \Big\{ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \times u_j|^{p-2}\nabla \times u_j \nabla \times r_j\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} |\mathrm{div} u_j|^{p-2}\mathrm{div} u_j \mathrm{div} r_j\,\mathrm{d}x + m_0 \int_{\mathbb{R}^3} |u_j|^{p-2}u_j \cdot r_j\,\mathrm{d}x \Big\} \\
& - \Big\{ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \times \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)|^{p-2}\nabla \times \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)(\nabla \times r_j)\,\mathrm{d}x \\
& - \int_{\mathbb{R}^3} |\mathrm{div} \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)|^{p-2}\mathrm{div} \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)(\mathrm{div} r_j)\,\mathrm{d}x \\
& - m_0 \int_{\mathbb{R}^3} |\sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)|^{p-2} \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i) \cdot r_j\,\mathrm{d}x \Big\} = (\mathrm{I}) - (\mathrm{II}).
\end{aligned}
$$

下面说明 $\limsup_{j\to\infty}(\mathrm{I})-(\mathrm{II}) \leq 0$. 关于 (I) 有, $(\mathrm{I}) = J'(u_j)r_j + \int_{\mathbb{R}^3} h(x,u_j)\cdot r_j\,\mathrm{d}x$. 由于在 $X^{p'}(\mathbb{R}^3)$ 中 $J'(u_j) \to 0$, 在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中 $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ 有界, 则当 $j\to\infty$ 时, $J'(u_j)r_j \to 0$. 通过引理 2.6, 可知 $\limsup_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3} h(x,u_j)\cdot r_j\,\mathrm{d}x \leq 0$, 故, $\limsup_{j\to\infty}(\mathrm{I}) \leq 0$. 下面讨论当 $j\to\infty$ 时 $(\mathrm{II}) \to 0$. 取 $S_j(x) = \sum_{i=1}^{k} \nabla\times w_i(x-y_j^i)$, $T_j(x) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{div} w_i(x-y_j^i)$,则对任意的 $R>0$, 有

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\times \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)|^{p-2}\nabla \times \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)(\nabla\times r_j)\,\mathrm{d}x \\
& \qquad - \int_{\mathbb{R}^3} |\mathrm{div} \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)|^{p-2}\mathrm{div} \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)(\mathrm{div} r_j)\,\mathrm{d}x \\
\leq & \sum_{i=1}^{k} \int_{B(y_j^i;R)} |S_j|^{p-1}|\nabla\times r_j| + |T_j|^{p-1}|\mathrm{div} r_j|\,\mathrm{d}x \\
& \qquad + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B(y_j^i;R)} |S_j|^{p-1}|\nabla\times r_j| + |T_j|^{p-1}|\mathrm{div} r_j|\,\mathrm{d}x = (\mathrm{III}) + (\mathrm{IV}),
\end{aligned}
$$

其中, $B(y_j^i;R) = \{x\in\mathbb{R} \mid |x-y_j^i| \leq R\}$. 关于 (III), 由 $|y_j^i - y_j^{i'}| \to \infty$, $i \neq i'$, 则在 $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, $\nabla\times w_i(x+y_j^{i'}-y_j^i) \to 0$, $\mathrm{div} w_i(x+y_j^{i'}-y_j^i) \to 0$, 且在 $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ 中, $\nabla\times r_j(x+y_j^i) \to 0$, $\mathrm{div} r_j(x+y_j^i) \to 0$, 进而

$$
\begin{aligned}
|(\mathrm{III})| &\leq \sum_{i=1}^{k} \int_{B(0;R)} |S_j(x+y_j^i)|^{p-1}|\nabla\times r_j(x+y_j^i)| + |T_j(x+y_j^i)|^{p-1}|\mathrm{div} r_j(x+y_j^i)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\|S_j(\cdot+y_j^i)\|_{L^p(B(0;R))}^{p-1}\|\nabla\times r_j(\cdot+y_j^i)\|_{L^p(B(0;R))} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k}\|T_j(\cdot+y_j^i)\|_{L^p(B(0;R))}^{p-1}\|\mathrm{div} r_j(\cdot+y_j^i)\|_{L^p(B(0;R))} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\big(\|\nabla\times w_i\|_{L^p(B(0;R))}^{p-1}+o(1)\big)\cdot o(1) + \sum_{i=1}^{k}\big(\|\mathrm{div} w_i\|_{L^p(B(0;R))}^{p-1}+o(1)\big)\cdot o(1)\to 0.
\end{aligned}
$$

关于 (IV),

$$
\begin{aligned}
|(\mathrm{IV})| &\leq \|S_j\|_{L^p(\mathbb{R}^3\setminus\bigcup_{i=1}^k B(y_j^i;R))}^{p-1}|\nabla\times r_j|_{L^p} + \|T_j\|_{L^p(\mathbb{R}^3\setminus\bigcup_{i=1}^k B(y_j^i;R))}^{p-1}|\mathrm{div} r_j|_{L^p} \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{k}\|\nabla\times w_i(x-y_j^i)\|_{L^p(\mathbb{R}^3\setminus\bigcup_{i=1}^k B(y_j^i;R))}\Big)^{p-1}|\nabla\times r_j|_{L^p} \\
&\quad + \Big(\sum_{i=1}^{k}\|\mathrm{div} w_i(x-y_j^i)\|_{L^p(\mathbb{R}^3\setminus\bigcup_{i=1}^k B(y_j^i;R))}\Big)^{p-1}|\mathrm{div} r_j|_{L^p} \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{k}\|\nabla\times w_i\|_{L^p(\mathbb{R}^3\setminus\bigcup_{i=1}^k B(0;R))}\Big)^{p-1}|\nabla\times r_j|_{L^p} \\
&\quad + \Big(\sum_{i=1}^{k}\|\mathrm{div} w_i\|_{L^p(\mathbb{R}^3\setminus\bigcup_{i=1}^k B(0;R))}\Big)^{p-1}|\mathrm{div} r_j|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

由 $|\nabla\times r_j|_{L^p}$, $|\mathrm{div} r_j|_{L^p}$ 有界可知

$$
\begin{aligned}
&|(\mathrm{III})+(\mathrm{IV})| \\
\leq\, & C_1\Big(\sum_{i=1}^{k}\|\nabla\times w_i\|_{L^p(\mathbb{R}^3\setminus\bigcup_{i=1}^k B(0;R))}\Big)^{p-1} + C_2\Big(\sum_{i=1}^{k}\|\mathrm{div} w_i\|_{L^p(\mathbb{R}^3\setminus\bigcup_{i=1}^k B(0;R))}\Big)^{p-1} + o(1).
\end{aligned}
$$

由 $R>0$ 的任意性可得当 $R\to\infty$ 时

$$
\|\nabla\times w_i\|_{L^p(\mathbb{R}^3\setminus\bigcup_{i=1}^k B(0;R))}\to 0, \quad \|\mathrm{div} w_i\|_{L^p(\mathbb{R}^3\setminus\bigcup_{i=1}^k B(0;R))}\to 0,
$$

则当 $j\to\infty$ 时, $(\mathrm{III})+(\mathrm{IV})\to 0$. 进而

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\times\sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)|^{p-2}\nabla\times\sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)(\nabla\times r_j)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad -\int_{\mathbb{R}^3}|\mathrm{div}\sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)|^{p-2}\mathrm{div}\sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)(\mathrm{div} r_j)\,\mathrm{d}x\to 0.
\end{aligned}
$$

同理可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)|^{p-2} \sum_{i=1}^{k} w_i(x-y_j^i)\cdot r_j \,\mathrm{d}x \to 0, \quad 当\, j\to\infty, (i=1,2,\cdots).$$

因此, (II) $\to 0$. 综上, 当 $j\to\infty$ 时,$\|u_j(\cdot)-\sum_{i=1}^{k} w_i(\cdot - y_j^i)\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} \to 0$.命题得证.

下面我们说明引理 4.1 成立.

同理于式 (4.6)证明过程, 对任意的紧支集 $K\subset\mathbb{R}^3$, 下式成立

$$\int_K |\nabla\times u_j(x+y_j^i)-\nabla\times w_1(x)|^p + |\mathrm{div} u_j(x+y_j^i)-\mathrm{div} w_1(x)|^p \,\mathrm{d}x \to 0, \quad 当\, j\to\infty.$$

因此, 在 $\mathbb{R}^3$ 中, $\nabla\times u_j(x+y_j^i)\to\nabla\times w_1(x)$, $\mathrm{div} u_j(x+y_j^i)\to\mathrm{div} w_1(x)$ 几乎处处成立. 由于在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_j(x+y_j^i)\rightharpoonup w_1(x)$, 可知在 $\mathbb{R}^3$ 中, $u_j(x+y_j^i)$ 几乎处处强收敛到 $w_1(x)$. 进而通过利用 Brezis-Lieb 引理可得, 当$j\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}
0\le&\|u_j(\cdot)-\sum_{i=1}^{k} w_i(\cdot-y_j^i)\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)}\\
=&\|u_j(\cdot+y_j^1)-\sum_{i=2}^{k} w_i(\cdot+y_j^1-y_j^i)-w_1(\cdot)\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)}\\
=&\|u_j(\cdot+y_j^1)-\sum_{i=2}^{k} w_i(\cdot+y_j^1-y_j^i)\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)}-\|w_1(\cdot)\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)}+o(1)\\
=&\|u_j(\cdot+y_j^2)-\sum_{i=3}^{k} w_i(\cdot+y_j^2-y_j^i)\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)}-\|w_2(\cdot)\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)}-\|w_1(\cdot)\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)}+o(1)\\
=&\cdots\\
=&\|u_j\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)}-\sum_{i=1}^{k}\|w_i\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)}+o(1).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

由于 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中有界, 则存在 $M>0$ 使得 $\|u_j\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}\le M$, 又由注 3.3 知存在与 w_i 无关的 $C>0$ 使得 $\|w_i\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}\ge C$. 因此 k 一定是有限数.

根据引理 4.7, 当 $k=1$ 时, 若

$$\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3}\|u_j(\cdot)-w_1(\cdot-y_j^1)\|_{L^p(\xi+\mathcal{Q})}\to 0, \tag{4.15}$$

则,

$$\|u_j(\cdot)-w_1(\cdot-y_j^1)\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}\to 0.$$

即式 (4.3)在 $k=1$ 时成立. 若式 (4.15)不成立, 则存在 $\{y_j^2\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^3$ 使得 $c'>0$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^3}\|u_j(\cdot)-w_1(\cdot-y_j^1)\|_{L^p(y_j^2+\mathcal{Q})}\to c', \tag{4.16}$$

其中 $c' > 0$, $|y_j^2 - y_j^1| \to \infty$, 且存在 $w_2 \in X^p(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ 使得

$$u_j(x + y_j^2) \rightharpoonup w_2(x), \quad \text{在 } X^p(\mathbb{R}^3)\text{中},$$

$$\nabla \times u_j(x + y_j^2) \to \nabla \times w_2(x), \quad a.e. \text{ 在 } \mathbb{R}^3\text{中},$$

$$\mathrm{div} u_j(x + y_j^2) \to \mathrm{div} w_2(x), \quad a.e. \text{ 在 } \mathbb{R}^3\text{中}.$$

同理于引理 4.6, 可知 $J'(w_2) = 0$. 若当 $k = 2$ 时,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{Z}^3} \|u_j(\cdot) - w_1(\cdot - y_j^1) - w_2(\cdot - y_j^2)\|_{L^p(\xi + \mathcal{Q})} \to 0, \tag{4.17}$$

否则, 重复上述步骤, 可得存在 $\{y_j^3\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^3$, 且 $|y_j^3 - y_j^1|, |y_j^3 - y_j^2| \to \infty$,

$$u_j(x + y_j^3) \rightharpoonup w_3(x), \quad \text{在 } X^p(\mathbb{R}^3)\text{中},$$

$$\nabla \times u_j(x + y_j^3) \to \nabla \times w_3(x), \quad a.e. \text{ 在 } \mathbb{R}^3\text{中},$$

$$\mathrm{div} u_j(x + y_j^3) \to \mathrm{div} w_3(x), \quad a.e. \text{ 在 } \mathbb{R}^3\text{中},$$

其中 w_3 为 $J(u)$ 的非平凡临界点. 综上, 以此类推, 由于正整数 k 为有限的, 故当 $j \to \infty$ 时, 有$\sup_{\xi \in \mathbb{Z}^3} \|u_j(\cdot) - \sum_{i=1}^k w_i(\cdot - y_j^i)\|_{L^p(\xi + \mathcal{Q})} \to 0$, 根据引理 4.7 可得

$$\|u_j(\cdot) - \sum_{i=1}^k w_i(\cdot - y_j^i)\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} \to 0.$$

由 (4.14), 可知 $\|u_j(\cdot)\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}^p \to \sum_{i=1}^k \|w_i\|_{X^p(\mathbb{R}^3)}^p$, 又 $J'(w_i) = 0$, $i \in [1, k]$ 可知 $\int_{\mathbb{R}^3} H(x, u_j)\mathrm{d}x \to \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^3} H(x, w_i)\mathrm{d}x$. 故式 (4.4) 和 (4.5) 成立, 即引理 4.1 得证.

5. 定理 1.1 的证明

综上所述, 可知存在一列 $J(u)$ 的 $(PSP)_b$ 序列, 并且该序列的极限 $(w_i)_{i=1}^k \subset X^p(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ 满足

$$J'(w_i) = 0, \quad i = 1, \cdots, k, \tag{5.1}$$

$$\sum_{i=1}^k J(w_i) = b, \tag{5.2}$$

$$\sum_{i=1}^k P(w_i) = 0. \tag{5.3}$$

下面说明 $b = C_{mp}$, 且 C_{mp} 是泛函 J 的临界值.

引理 5.1 令 $b > 0$, $k \in \mathbb{R}^3$ 以及 $w_1, \cdots, w_k \subset X^p(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ 满足式 (5.1)-(5.3), 若 $k \geq 2$, 则

DOI: 10.12677/aam.2024.134177

$C_{mp} < b$, 也就是说, 存在 $\gamma \in \Gamma$ 使得

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) < b. \tag{5.4}$$

证 情形一: 若对所有的 $i \in \{1,\cdots,k\}$ 有 $P(w_i) = 0$, 则 $J(w_i) = \frac{1}{3}(|\nabla\times w_i|^p_{L^p} + |\mathrm{div} w_i|^p_{L^p}) > 0$. 由 (5.2) 可知 $J(w_i) < b$. 定义 $\gamma(t) \in C([0,\infty), X^p(\mathbb{R}^3))$ 为

$$\gamma(t)(x) = \begin{cases} w_1(\frac{x}{t}), & \text{当 } t > 0, \\ 0, & \text{当 } t = 0. \end{cases}$$

则当 $t > 0$ 时,

$$\|\gamma(t)\|^p_{X^p(\mathbb{R}^3)} = (|\nabla\times w_1|^p_{L^p} + |\mathrm{div} w_1|^p_{L^p})t^{3-p} + m_0|w_1|^p_{L^p}t^3,$$

且当 $t \to 0$ 时, $\|\gamma(t)\|_{X^p(\mathbb{R}^3)} \to 0$.

由 $P(w_1) = 0$ 可知, 当 $t > 0$ 时

$$J(\gamma(t)) = \frac{1}{p}(|\nabla\times w_1|^p_{L^p} + |\mathrm{div} w_1|^p_{L^p})t^{3-p} - \frac{3-p}{3p}(|\nabla\times w_1|^p_{L^p} + |\mathrm{div} w_1|^p_{L^p})t^3.$$

故, 当 $t \in (0,1)$ 时, $\frac{d}{dt}J(\gamma(t)) > 0$; 当 $t > 1$ 时, $\frac{d}{dt}J(\gamma(t)) < 0$, 且 $\max_{t\geq 0} J(\gamma(t)) = J(w_1) < b$. 因此, 对足够大的 $L > 1$, 令 $\gamma(t) = \gamma(Lt)$, 此时 γ 满足 (5.4).

情形二: 存在 $i_0 \in \{1,\cdots,k\}$ 使得 $P(w_{i_0}) \neq 0$, 不妨设 $i_0 = 1$. 根据式 (5.3), 不妨设 $P(w_1) < 0$. 对 $t > 0$, 定义

$$\Phi(t) = \frac{1}{p}\Big(\sum_{i=1}^k(|\nabla\times w_i|^p_{L^p} + |\mathrm{div} w_i|^p_{L^p})\Big)t^{3-p} - \Big(\sum_{i=1}^k\int_{\mathbb{R}^3} F(x,w_i)\,\mathrm{d}x\Big)t^3.$$

$$\Phi_1(t) = \frac{1}{p}\big(|\nabla\times w_1|^p_{L^p} + |\mathrm{div} w_1|^p_{L^p}\big)t^{3-p} - \Big(\int_{\mathbb{R}^3} F(x,w_1)\,\mathrm{d}x\Big)t^3.$$

$$\Phi_2(t) = \frac{1}{p}\Big(\sum_{i=2}^k(|\nabla\times w_i|^p_{L^p} + |\mathrm{div} w_i|^p_{L^p})\Big)t^{3-p} - \Big(\sum_{i=2}^k\int_{\mathbb{R}^3} F(x,w_i)\,\mathrm{d}x\Big)t^3.$$

由 (5.3) 可知

$$\frac{3-p}{p}\Big(\sum_{i=1}^k(|\nabla\times w_i|^p_{L^p} + |\mathrm{div} w_i|^p_{L^p})\Big) - N\Big(\sum_{i=1}^k\int_{\mathbb{R}^3} F(x,w_i)\,\mathrm{d}x\Big) = \sum_{i=1}^k P(w_i) = 0.$$

因此,

$$\Phi'(t) = \frac{3-p}{p}\Big(\sum_{i=1}^k(|\nabla\times w_i|^p_{L^p} + |\mathrm{div} w_i|^p_{L^p})\Big)(t^{2-p} - t^2).$$

故 $\Phi(t) \leq \Phi(1) = \sum_{i=1}^k J(w_i) = b$. 此外, 有

$$\Phi_1'(t) = \frac{3-p}{p}\big(|\nabla\times w_1|_{L^p}^p + |\mathrm{div} w_1|_{L^p}^p\big)t^{2-p} - 3\Big(\int_{\mathbb{R}^3} F(x,w_1)\,\mathrm{d}x\Big)t^2.$$

由 $\Phi_1'(1) = P(w_1) < 0$ 可知, 存在 $t_1 \in (0,1)$ 使得当 $t\in(0,t_1)$ 时, $\Phi_1'(t) > 0$; 当 $t > t_1$ 时, $\Phi_1'(t) < 0$. 故 $\max_{t>0}\Phi_1(t) = \Phi_1(t_1)$. 由于 $\sum_{i=2}^k P(w_i) = -P(w_1) > 0$,

$$\begin{aligned}\Phi_2'(t) &= \frac{3-p}{p}\Big(\sum_{i=2}^k(|\nabla\times w_i|_{L^p}^p + |\mathrm{div} w_i|_{L^p}^p)\Big)t^{2-p} - \Big(\frac{3-p}{p}\Big(\sum_{i=2}^k(|\nabla\times w_i|_{L^p}^p + |\mathrm{div} w_i|_{L^p}^p)\Big) - \sum_{i=2}^k P(w_i)\Big)t^2 \\ &> \frac{3-p}{p}\Big(\sum_{i=2}^k(|\nabla\times w_i|_{L^p}^p + |\mathrm{div} w_i|_{L^p}^p)\Big)(t^{2-p}-t^2),\end{aligned}$$

故当 $t\in(0,1]$ 时, $\Phi_2(t) > 0$. 因此

$$\max_{t>0}\Phi_1(t) = \Phi_1(t_1) < \Phi_1(t_1) + \Phi_2(t_1) = \Phi(t_1) \le \Phi(1) = b.$$

记 $J(w_1(\frac{x}{t})) = \Phi_1(t)$. 因此, 对 $t>0$, 当 $L>1$ 足够大, 令 $\gamma(t) = w_1(\frac{x}{Lt})$, 且 $\gamma(0)=0$, 此时 $\gamma\in\Gamma$ 满足式 (5.4).

引理 5.2 令 C_{mp} 满足式 (3.1), 则 C_{mp} 为 $J(u)$ 的一个临界值, 即存在一个 $J(u)$ 的临界点 $w_1 \in X^p(\mathbb{R}^3)$ 满足 $J(w_1) = C_{mp}$, 且 w_1 满足 Pohozaev 等式 $P(w_1) = 0$.

证 由引理 3.6 知, 存在一列 $(PSP)_{C_{mp}}$ 序列 $\{u_j\}_{j=1}^\infty \in X^p(\mathbb{R}^3)$, 结合引理 4.1, 存在 $k\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 以及 $w_1,\cdots,w_k \subset X^p(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}$ 满足

$$J'(w_i) = 0, \quad i = 1,\cdots,k, \tag{5.5}$$

$$\sum_{i=1}^k J(w_i) = C_{mp}, \tag{5.6}$$

$$\sum_{i=1}^k P(w_i) = 0. \tag{5.7}$$

通过引理 5.1 知 k 值只能为 1, 故存在 $w_1 \in X^p(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}$ 满足

$$J'(w_1) = 0, \quad J(w_1) = C_{mp}, \quad P(w_1) = 0.$$

引理 5.3

$$C_{mp} = C_{po} = E_{po}. \tag{5.8}$$

证 根据 C_{po} 以及 E_{po} 定义可知 $C_{po} \le E_{po}$. 由引理 5.2 知, 当 $k=1$ 时, $J(w_1) = C_{mp}$, 且 $P(w_1) = 0$, 而当 $k\ge 2$ 时, $C_{mp} < b$, 故 $E_{po} \le C_{mp}$. 对固定的 $u\in\mathcal{P}$, 类似于引理 5.1 可以构造出 $\gamma_u\in\Gamma$ 满足 $\max_{t\in[0,1]} J(\gamma_u(t)) = J(u)$. 故, $C_{mp} \le C_{po}$, 证毕.

定理 1.1 的证明: 根据 C_{mp} 的定义可知, 存在 $\{\gamma_j(t)\}_{j=1}^\infty \subset \Gamma$ 满足 $\max_{t\in[0,1]} J(\gamma_j(t)) \le C_{mp} + \frac{1}{j}$.

由引理 3.6 知, 存在 $(\theta_j, v_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \times X^p(\mathbb{R}^3)$ 使得

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{R}\times X^p(\mathbb{R}^3)}((\theta_j, v_j), \{0\} \times \gamma_j([0,1])) \leq \frac{2}{\sqrt{j}}, \tag{5.9}$$

$$|J(\theta_j, v_j) - C_{mp}| \leq \frac{1}{j},$$

$$\|DJ(\theta_j, v_j)\|_{\mathbb{R}\times X^{p'}(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{2}{\sqrt{j}}.$$

令 $u_j(x) = v_j(\frac{x}{e^{\theta_j}})$, 同理于引理 3.6, 可知 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $J'(u_j) \to 0$, $J(u_j) \to C_{mp}$, $P(u_j) \to 0$. 由引理 4.1 以及引理 5.3 可知, 存在 $\{y_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^3$ 和 $w \in X^p(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ 满足在 $X^p(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_j(x+y_j) \to w(x)$, 且 $J(w) = C_{mp} = C_{po} = E_{po}$, $J'(w) = 0$, $P(w) = 0$, 命题得证.

基金项目

山西省自然科学基金面上项目(202303021211056)。

参考文献

[1] Chapman, S.J. (2000) A Hierarchy of Models for Type-II Superconductors. *SIAM Review*, **42**, 555-598. https://doi.org/10.1137/S0036144599371913

[2] Yin, H.M., Li, B.Q. and Zou, J. (2002) A Degenerate Evolution System Modeling Bean's Critical-State Type-II Superconductors. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **8**, 781-794. https://doi.org/10.3934/dcds.2002.8.781

[3] Yin, H.M. (2006) Regularity of Weak Solution to a p-Curl-System. *Differential and Integral Equations*, **4**, 361-368.

[4] Laforest, M. (2018) The p-CurlCurl: Spaces, Traces, Coercivity and a Helmholtz Decomposition in L^p. arXiv:1808.05976v1

[5] Wu, H. and Bian, B. (2019) Global Boundedness of the Curl for a p-Curl System in Convex Domains. arXiv:1909.00159v1

[6] Xiang, M.Q., Wang, F.L. and Zhang, B.L. (2017) Existence and Multiplicity of Solutions for $p(x)$-Curl Systems Arising in Electromagnetism. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **448**, 1600-1617. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.11.086

[7] Benci, V. and Fortunato, D. (2004) Towards a Unified Field Theory for Classical Electrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **173**, 379-414. https://doi.org/10.1007/s00205-004-0324-7

[8] Saito, T. (2022) Existence of a Positive Solution for Some Quasilinear Elliptic Equations in R^N. *Journal of Differential Equations*, **338**, 591-635. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.08.029

[9] Liu, S., Xu, X. and Zhang, J. (2020) Global Well-Posedness of Strong Solutions with Large Oscillations and Vacuum to the Compressible Navier-Stokes-Poisson Equations Subject to Large and Non-Flat Doing Profile. *Journal of Differential Equations*, **269**, 8468-8508. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.06.006

[10] Rabinowtiz, P.H. (1986) Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. American Mathematical Society, Providence.

[11] Glowinski, R. and Marroco, A. (1975) Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **9**, 41-76. https://doi.org/10.1051/m2an/197509R200411

[12] Hirata, J., Ikoma, N. and Tanaka, K. (2010) Nonlinear Scalar Field Equations in R^N: Mountain Pass and Symmetric Mountain Pass Approaches. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **35**, 253-276.