Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(4), 1433-1447
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134134

Hans汉斯

关于矩阵秩不等式问题的证明与应用

何雪萍

兰州市西固区临洮街学校，甘肃 兰州

收稿日期：2024年3月19日；录用日期：2024年4月17日；发布日期：2024年4月24日

摘 要

本文主要利用等价标准形分解或满秩分解定理、列向量的极大无关组、分块初等变换、线性空间的维数、齐次方程组的基础解系、打洞原理等研究了一些常见的矩阵秩的不等式的证明，并列举出一些常见的矩阵秩的不等式的应用。

关键词

矩阵，秩，不等式，证明，应用

The Proof and Application of Inequality Problem Related to Matrix Rank

Xueping He

Xigu District Lintao Street School, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 19^{th}, 2024; accepted: Apr. 17^{th}, 2024; published: Apr. 24^{th}, 2024

Abstract

In this paper, the proofs of some common matrix rank inequalities are studied mainly using equivalent normal form decomposition or full rank decomposition theorem,

文章引用: 何雪萍. 关于矩阵秩不等式问题的证明与应用[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1433-1447.
DOI: 10.12677/aam.2024.134134

maximal independent group of column vectors, block elementary transformation, the dimension of linear space and the basic solution system of homogeneous equations, and lists the application of some common matrix rank inequalities.

Keywords

Matrix, Rank, Inequality, Proof, Application

1. 引言及主要结果

1.1. 研究背景

矩阵自身所带来的特征性取决于其内部元素，最初的矩阵主要被认为是一种数学工具，但在历史上经过两个多世纪的演变，现在已经发展成一门独立的数学学科分支，即矩阵理论。矩阵的研究和应用也可以说是相当广泛的，不仅仅被广泛地应用到了数学领域，还在物理、力学、科技等各项工作中都起着非常重要的作用 [1,2]。矩阵秩的不等式主要作为矩阵理论研究的重要属性，在高等代数、数学分析、解析几何等各个领域中都已经得到了广泛的应用。例如矩阵分析法对于营销活动评价、企业战略管理、射击培训效果评价、教学效率评估、供应链管理技术等方面均起着举足轻重的作用。在解析几何中，矩阵秩的不等式被广泛应用于判断两平面及直线和平面之间中两条直线、空间中两条直线、两平面及其他直线和平面之间的关系，在线性控制理论中，它们可以被用来决定一个线性系统在物理学上是否能够被观察到或者是能够被控制。此外还可以被用来判断向量组的线性相关性、求一个向量组的极大不相关组、两个向量组之间的线性相关性等价、求齐次线性方程组的基本解系、向量组的线性表示、求解非齐次线性方程组等 [3,4]。

1.2. 研究意义

理论意义：高等代数学作为数学专业的一门基础，矩阵理论又是它主要的组成部分，其中矩阵秩的不等式在实践中是一个具有特殊重要性，它直接反映着矩阵本身性质的概念。不论是数学专业或者是非数学专业的学生，掌握了矩阵的秩不等式的性质和定义，有助于学习者更好地解决一些矩阵秩的相关问题。现实意义：矩阵秩的不等式贯穿于矩阵理论的发展始末，是矩阵的一个特别重要的本质属性，在求解线性方程组，判断线性空间中点线面的位置关系，以及在求解线性几何中，判断两个直线之间位置的关系等方法上均有着广泛的研究和应用 [5]。

矩阵是数学中的一个重要的基本概念，是现代数学的一个主要研究对象，也是数学研究和应用的一个重要工具 [6]。最初，矩阵概念的产生是作用于解线性方程组，英国数学家凯莱在矩阵秩的不等式问题的研究中作出了巨大贡献，定义了矩阵的秩、初等因子、矩阵初等变换等概念，同时，弗罗伯纽斯的贡献也是不可磨灭的，在凯莱的基础上，引进了正交矩阵、矩阵的相似变换等概念，并讨论了正交矩阵与合同矩阵的一些重要性质。使其推广和应用到其它领域之中，使之能够成为我们学习和研究便利的工具。所以矩阵秩的不等式依然有着很大的研究价值 [7]。

2. 矩阵秩的相关的不等式及其性质

矩阵秩的有关性质

性质一 [8] 矩阵积的秩不大于各因子秩; 可逆矩阵与另一矩阵乘积时, 积的秩等于另一阵矩的秩.

性质二 [9]

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B).$$

性质三 [7] 对分块矩阵进行初等变换是不改变矩阵的秩.

性质四 [9]

$$r\begin{pmatrix} AB & C \\ B & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix} = r(B) + r(C).$$

证明：因为

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & C \\ B & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$r\begin{pmatrix} AB & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix} = r(B) + r(C).$$

又

$$r\begin{pmatrix} AB & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \geq r(B) + r(C),$$

则

$$r\begin{pmatrix} AB & C \\ B & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 2.1 设 A 与 B 均是 $n \times m$ 阶矩阵, 则不等式 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ 成立.

定理 2.2 设 A 是 $m \times n$ 的矩阵 B 是 $n \times s$ 的矩阵, 则 $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$ 成立.

定理 2.3 设 A, B 是任意的两个矩阵, 则有不等式如下成立.

$$r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

定理 2.4 A, B 分别是 $s \times n$ 与 $n \times m$ 的矩阵, 且 $AB = 0$. 则有不等式 $r(A) + r(B) \leq n$.

定理 2.5 设 A 与 B 都是 $n \times m$ 的矩阵, 则有 $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$.

定理 2.6 设矩阵 A, B, C 分别是 $m \times n, n \times s, s \times t$ 矩阵, 则 $r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$. 这个不等式给出了三个矩降相乘的秩的下界, 它为 (2.2) 的推广.

定理 2.7 $r(A, B) \leq r(A) + r(B)$.

定理 2.8 设 A 是 n 阶矩降, A^* 是它的伴随矩降, 则有伴随矩阵秩的不等式

$$r\left(A^*\right)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 0, & r(A)=n-1 \\ 1, & r(A) \leq n-1 \end{cases}$$

定理 2.9 设 A, B 都是 n 阶方阵则 $r(AB-I) \leq r(A-I) + r(B-I)$.

定理 2.10 (打洞原理不等式) 已知 A, D 分别是 n 阶和 m 阶矩阵. 且 A 可逆. B, C 分别是 $n \times m$ 与 $m \times n$ 矩阵, 利用打洞原理有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

所以

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r\left(D-CA^{-1}B\right) = n + r\left(D-CA^{-1}B\right).$$

3. 矩阵秩不等式的证明方法

矩阵秩不等式证明常有以下六种方法:

一、利用等价标准形分解或满秩分解定理，这两个分解定理是证明矩阵秩的不等式问题中常用到的方法之一。

二、利用分块初等变换，在证明抽象矩阵秩的不等式问题中常常利用分块矩阵的初等变换。

三、利用列向量的极大无关组，矩阵的秩等于矩阵的行向量组的秩(行秩)，也等于矩阵的列向量组的秩(列秩)，所以用矩阵的列向量组的极大无关组用于证明矩阵秩的不等式也是一种常用的证明方法 [10]。

四、利用齐次方程组的基础解系，齐次方程 $Bx = 0$ 的基础解系包括 $n - r(B)$ 个线性无关的解向量, 这个结论也常常用于证明矩阵秩的不等式。

五、利用线性空间的维数，设 δ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，δ 在 V 的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ 下的矩阵是 B, 则 δ 的值域的维数是等于矩阵 B 的秩, 核空间的维数是等于齐次方程组 $BX = 0$ 的解空间的维数, 即

$$\dim \operatorname{Im} \sigma = r(B), \dim \ker \sigma = n - r(B)$$

根据这个结论, 我们可以将矩阵秩的问题转化为线性空间与线性变换的问题, 其中的两个维数公式为

$$\dim \operatorname{Im} \sigma + \dim \ker \sigma = \dim V,\ \dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).$$

这两个维数公式起着桥梁的作用, 这里的 V_1, V_2 分别是 V 的子空间, 其中第一个维数公式.当 σ 是 $V \to U$ 的线性映射时仍然成立。

六、利用打洞原理 [11]。

在矩阵中，做一次初等行(列)变换其实就对应左(右)乘以一个初等矩阵，这个性质对分块矩阵也是适用的，只不过在分块矩阵里面，左乘与右乘是严格区分的，如第三类变换

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ P & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0.3cm]C + PA & D + PB \end{pmatrix}$$

这里就要求 PA, PB 有意义。

也就说明 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B \\ C + PA & D + PB \end{pmatrix}$ 是等价的。同样地，我们给 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 右乘一个广义初等矩阵 $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ 得到 $\begin{pmatrix} A & B + AQ \\ C & D + CQ \end{pmatrix}$，这就体现了列变换对应右乘。

总体写出来就是

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C + PA & D + PB \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B + AQ \\ C & D + CQ \end{pmatrix}.$$

我们考虑一些特殊问题，称之为打洞原理。当 A 可逆时，可以通过行变换消掉 C 如下

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

写成矩阵等式

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

同时，可以继续对 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ 做列变换用 A 消掉 B，

$$\text{即} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

同理，当 D 可逆时，可通过 D 消去 B, C，得到

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

当然以上就说明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\left|D-CA^{-1}B\right| = |D|\left|A-BD^{-1}C\right|.$$

4. 主要结果的证明

定理 2.1 的证明 (利用分块矩阵初等变换)

方法一：

因为

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ A+B & B \end{pmatrix}$$

所以 $r(A+B) \le r(A)+r(B)$.

其中用到了分块矩阵的初等变换(分块初等变换不改变矩阵的秩) 第一个矩阵第一行的负 A 加到第二行得到第二个矩阵; 第二个矩阵的第二列加到第一列得到得到第三个矩阵。

方法二

$$\text{因为} \begin{pmatrix} A & B \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A+B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$
$$r(A+B) \le r\begin{pmatrix} 0 & A+B \\ 0 & A \end{pmatrix} \le r\begin{pmatrix} A & B \\ A & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} = r(A)+r(B).$$

又因为$r(A) = r((A-B)+B) \le r(A-B)+r(B)$.

定理2.1 证毕.

推论 1 设 A 与 B 均是 $n\times m$ 阶矩阵, 则有 $r(A)-r(B) \le r(A-B)$ 成立。

推论 2 设 A 与 B 均是$n\times m$ 阶矩阵, 则有 $r(A\pm B) \ge |r(A)-r(B)|$ 成立。

证明 因为 $r(A) = r(A-B+B) \le r(-B)+r(B+A) = r(B+A)+r(B)$,

所以 $r(A)-r(B) \le r(A+B)$.

又因为 $r(B) = r(A-A+B) \le r(-A)+r(B+A) = r(B+A)+r(A)$,

所以 $r(B)-r(A) \le r(A+B)$, 故$r(A\pm B) \ge |r(A)-r(B)|$.

同理可证明 $|r(A)-r(B)| \le r(A-B)$.

定理 2.2 的证明

方法一:

因为

$$\begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_s & O \\ B & I_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & I_n \end{pmatrix},$$

所以

$$r(A)+r(B) \leq r\begin{pmatrix} O & A \\ & - \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} AB & A \\ n & \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} AB & 0 \\ & \ddots \end{pmatrix}=r(AB)+r\left(I_n\right)=r(AB)+n.$$

所以

$$r(A)+r(B) \leq r\begin{pmatrix} O & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}=r(AB)+r\left(I_n\right)=r(AB)+n.$$

其中等三个等号用到了分块初等变换: 给等二行乘以负 A 加到第一行去, 最后一步用到一些基本性质里的性质四. 此时, 若 $AB=0$, 则有如下公式 $r(A)+r(B) \leq n$.

方法二:

利用线性空间维数, 当 $m=n=s$ 时的特殊情形. 设 τ, σ 都是 n 维线性空间 V 的线性变换，且在基 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ 下的矩阵分别是 A, B. 则

$$\operatorname{dim} \operatorname{Im} \sigma+\operatorname{dim} \operatorname{Im} \tau-n \leq \operatorname{dim} \operatorname{Im}(\sigma \tau) \leq \min \{\operatorname{dim} \operatorname{Im} \sigma, \operatorname{dim} \operatorname{Im} \tau\}$$

先证不等式的左边部分，对任意 $\alpha \in V, \sigma \tau(\alpha)=\sigma(\beta)$, 其中 $\beta=\tau(\alpha) \in \operatorname{Im} \tau$, 定义 $\left.\sigma\right|_\tau(\beta)=\sigma \tau(\alpha)$, 则 $\left.\sigma\right|_\tau$ 是 $\operatorname{Im} \tau \rightarrow \operatorname{Im}\left(\left.\sigma\right|_\tau\right)=\operatorname{Im}(\sigma \tau)$ 的线性映射.

由维数公式得

$$\operatorname{dim} \operatorname{Im} \tau=\operatorname{dim} \operatorname{Im}(\sigma \tau)+\operatorname{dim} \operatorname{ker}(\sigma \tau).$$

对 $\forall \alpha \in \operatorname{ker}(\sigma \tau)$, 则 $\sigma \tau(\alpha)=0$. 即 $\tau(\alpha) \in \operatorname{ker} \sigma$, 故 $\operatorname{ker}(\sigma \tau)=\operatorname{ker} \sigma \cap \operatorname{Im} \tau$.

因此

$$\operatorname{dim} \operatorname{ker}(\sigma \tau) \leq \operatorname{dim} \operatorname{ker} \sigma=n-\operatorname{dim} \operatorname{Im} \sigma.$$

再证明右边部分, 事实上，由 $\operatorname{Im}(\sigma \tau) \subset \operatorname{Im} \sigma$ 可知, $\operatorname{dim} \operatorname{Im}(\sigma \tau) \leq \operatorname{dim} \operatorname{Im} \sigma$. 另一方面, $\forall \alpha \in \operatorname{ker}, \tau(\alpha)=0$ 都有 $\sigma \tau(\alpha)=0$. 即 $\operatorname{ker} \tau \subset \operatorname{ker}(\sigma \tau)$, 故 $n-\operatorname{dim} \operatorname{Im} \tau=\operatorname{dim} \operatorname{ker} \tau \leq \operatorname{dim} \operatorname{ker}(\sigma \tau)=n-\operatorname{dim} \operatorname{Im}(\sigma \tau)$. 从而得到 $\operatorname{dim} \operatorname{Im}(\sigma \tau) \leq \operatorname{dim} \operatorname{Im} \tau$. 当 A, B 都是 n 阶满秩矩阵时, 不等式的等号成立.

定理 2.3 的证明 若 A, B 中有一个秩为 0 , 则结论显然成立. 因此设 $r(A)=r \neq 0, r(B)=r \neq 0$, 则 A, B 分别是有 r, t 阶子式$M_t \neq 0, M_s \neq 0$, 于是 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ 就有 $r+t$ 阶子式$\begin{vmatrix} M_s & 0 \\ 0 & M_t \end{vmatrix} \neq 0$.

定理 2.4 的证明 因为$AB=0$, 所以$\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix}$, 由2.3 得

$$r(A)+r(B)\le r\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix}\le r\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}=r\left(I_n\right)=n.$$

定理 2.5 的证明 方法一

$$r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & B \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A & A\pm B \\ 0 & B \end{pmatrix}\ge r(A\pm B).$$

其中第二个等号与第三个等号都分别用到了分块初等变换.

方法二 利用例向量的极大无关组设

$$A\left(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\right),B\left(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\right),$$

则有

$$A\pm B=\left(\alpha_1\pm\beta_1,\alpha_2\pm\beta_2,\cdots\alpha_n\pm\beta_n\right);$$

$r(A)=s,r(B)=t\Rightarrow\alpha_{i1}\cdots\alpha_{is},\beta_{j1}\cdots\beta_{jt}$ 分别是 $\alpha_1\cdots\alpha_n,\beta_1\cdots\beta_n$ 极大无关组;

$$\Rightarrow\alpha_1\pm\beta_1\cdots\alpha_n\pm\beta_n\ \text{可由}\alpha_{i1}\cdots\alpha_{in},\beta_{j1}\cdots\beta_{jn}\ \text{线性表示}$$

$$\Rightarrow r(A\pm B)\le r\left(\alpha_{i1}\cdots\alpha_{in},\beta_{j1}\cdots\beta_{jn}\right)\le s+t=r(A)+r(B).$$

方法三 利用齐次方程组的基础解析考虑如下两个线性方程组, 方程组一 $(A+B)x=0$. 方程组二 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x=0$, 等价于 $Ax=0$ 且 $Bx=0$. 显然, 方程组二的解一定是方程组一的解, 即方程组二的解集含于方程组一的解集中, 故 $n-r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\le n-r(A\pm B)$, 从而

$$r(A\pm B)\le r(A)+r(B).$$

定理 2.6 的证明 方法一由于(注意左乘和右乘)

$$r(ABC)+r(B)=r\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ BC & B \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ BC & B \end{pmatrix}\ge r(AB)+r(BC),$$

所以 $r(ABC)\ge r(AB)+r(BC)-r(B)$. 其中等二个, 等三个等号都用到分块矩阵初等变换; 等二个等号后的矩阵, 给等二行乘以负 A 加到等一行.

方法二 因为$\begin{pmatrix} AB & ABC \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix}$, 所以

$$r(BC)+r(AB)\leq r\begin{pmatrix} BC & 0 \\ B & AB \end{pmatrix}\leq r\begin{pmatrix} BC & ABC \\ B & 0 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 0 & ABC \\ B & 0 \end{pmatrix}=r(ABC)+r(B).$$

定理 2.7 的证明 方法一(直接利2.2, 2.3 证明更加简洁)

由于

$$(I,I)\begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix}=(B,A),$$

根据性质二可知

$$r(A,B)\leq r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B).$$

方法二 利用等价标准形分解证明设 A,B 的秩分别是 r_1,r_2, 则存在可逆矩阵 P_1,P_2 是 m 阶矩阵. Q_1,Q_2 分别是 t,s 阶矩阵, 使得 $A=P_1\begin{pmatrix} I_{r1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1, B=P_2\begin{pmatrix} I_{r2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_2$, 记 $\mathrm{A}_1=\begin{pmatrix} I_{r1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_2=\begin{pmatrix} I_{r2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则

$$(A,B)=(P_1,P_2)\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix},$$

由 (2.2, 2.3) 可知

$$r(A,B)\leq r\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_2 \end{pmatrix}=r_1+r_2.$$

方法三 满秩分解证明设 A,B 的秩分别是 r_1,r_2, 则存在 $m\times r_1$ 列满秩矩阵 $P_1, r_1\times t$ 行满秩矩阵 Q_1 和 $m\times r_2$ 列满秩矩阵 $P_2, r_2\times s$ 行满秩矩阵 Q_2, 使得 $A=P_1Q_1, B=P_2Q_2$, 再由 $(A,B)=(P_1,P_2)\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$, 及 (2.2, 2.3) 可得 $r(A,B)=r\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}=r_1+r_2$.

定理 2.8 的证明 当 $r(A)=n$ 时, 由于 $A^*=|A|A^{-1}$ 是可逆的. 所以 $r(A^*)=n$. 当 $r(A)=n-1$ 时, 有A至少有一个 $n-1$ 级子式非零, 所以A^* 非零, 那么 $r(A^*)\geq 1$. 另外, 而 $AA^*=|A|I=0$, 由定理 2.7 可得 $r(A)+r(A^*)\leq n$, 又 $r(A)=n-1$所以$r(A)\leq 1$, 从而 $r(A^*)=1$. 当 $r(A)\leq n-2$ 时, 我们知道 A 的所有 $n-1$ 级子式都为零, 从而 $A^*=0$, 即 $r(A^*)=0$.

定理 2.9 的证明 因为

$$\begin{pmatrix} A-I & B-I \\ A-I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & AB-I \\ 0 & AB-B \end{pmatrix},$$

所以

$$r(AB-I)\le r\begin{pmatrix}0 & B\\0 & I\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}0 & AB-I\\0 & AB-B\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}A-I & B-I\\A-I & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow=r\begin{pmatrix}0 & B-I\\ \\ A-I & 0\end{pmatrix}=r(A-I)+r(B-I).$$

定理 2.10 的证明　利用了分块矩阵初等变换不改变矩阵的秩, 使得矩阵

$$\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix}$$

经过一些列初等变换得到矩阵

$$\begin{pmatrix}A & 0\\0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix},$$

则有

$$r\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix}=r(A)+r\left(D-CA^{-1}B\right)$$

成立. 又因为矩阵A可逆, 有$r(A)=n$, 所以有$r\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix}=r(A)+r\left(D-CA^{-1}B\right)=n+r\left(D-CA^{-1}B\right)$ 成立.

5. 矩阵秩的不等式取边界值

矩阵秩的不等式等号成立的条件, 会使这些矩阵秩的不等式表达得更加完善, 运用起来更加方便.

例题 1 [12]　设 A 是 $m\times n$ 的矩阵 B 是$n\times s$ 的矩阵, 则 $r(A)+r(B)-n=r(AB)$ 成立的充分条件为

$$r\begin{pmatrix}A & I\\0 & B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & 0\\0 & B\end{pmatrix}.$$

证明　由

$$\begin{pmatrix}I & -A\\0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\I & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -B\\0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -AB\\I & 0\end{pmatrix}.$$

得

$$r\begin{pmatrix}A & 0\\I & B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}0 & -AB\\I & 0\end{pmatrix}$$

又

$$r\begin{pmatrix}0 & -AB\\I & 0\end{pmatrix}=n+r(AB),r\begin{pmatrix}A & 0\\0 & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B).$$

例题 2 [13] 设 A, B, C 分别为 $m \times n, n \times l, l \times m$ 的矩阵, 而 B 的一个满秩分解是 $B = P$, 即 P 是列满秩矩阵, Q 是行满秩矩阵, 则 $r(ABC) = r(AB) + r(BC) - r(B)$ 的充要条件是存在矩阵 X, Y 使得 $XAP + QCY = I_r$.

证明 设 $r(B) = r$, 因为 $B = PQ$ 是满秩分解, 所以有

$$r(AB) = r(APQ) = r(AP)) \qquad r(BC) = r(PQC) = r(QC).$$

则

$$r(ABC) = r(AB) + r(BC) - r(B) \Leftrightarrow r(APQC) = r(AP) + r(QC) - r.$$

得以证明.

例题 3 [14] 设 $A \in P^{n\times n}, f(x), g(x)$ 是数域 P 上的多项式. 如果 $f(x)$ 与 $g(x))$ 互素, 则 $r[f(A)] + r[g(A)] = n + r[f(A)g(A)]$.

证明 由 $(f, g) = 1$, 存在 $u(x), v(x) \in P[x]$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$, 因此有

$$u(A)f(A) + g(A)v(A) = I,$$

即得

$$r[f(A)] + r[g(A)] = n + r[f(A)g(A)].$$

例题 4 [15] 设 A 是 n 阶矩阵, 则 $A^3 = A$ 的充分必要条件是$r(A) = r\left(A - A^2\right) + r\left(A + A^2\right)$.

证明 必要性: 一方面, 由 $(I - A)A(I + A) = 0$ 及 FrobInius 不等式. 得

$$0 \geq r[(I - A)A] + r[A(I + A)] - r(A),$$

即

$$r(A) \geq r\left(A - A^2\right) + r\left(A + A^2\right).$$

另一方面, 由

$$r\left(A - A^2\right) + r\left(A + A^2\right) \geq r\left[\left(A - A^2\right) + \left(A + A^2\right)\right] = r(2A) = r(A),$$

即得必要性.

充分性, 若 $r(A) = r\left(A - A^2\right) + r\left(A + A^2\right)$, 设 $r(A) = r$, A 的满秩分解是 $A = HL$, 则存在 X, Y 使 $(2X)H = I_r, L(2Y) = I_r$ 成立. 则

$$X(I - A)H + L(I + A)Y = (XH + LY) - (XHLH - LHLY) = I_r - 0 = I_r.$$

由例题 2 得

$$r[(I - A)A(I + A)] = r[(I - A)A] + r[A(I + A)] - r(A) = 0,$$

即得 $(I-A)A(I+A)=0$, 从而有 $A^3=A$.

6. 矩阵秩的不等式问题的应用

分别利用分块矩阵初等变换、齐次方程组基础解系、极大无关组、线性空间的维数、打洞原理证明矩阵秋的不等式问题的应用 [16].

例 1 已知 A,B 为 n 阶方阵. 则 $r(A-ABA)=r(A)+r(E-BA)-n$.

证明 方法一

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-BA \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ BA & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-ABA & 0 \\ BA & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-ABA & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

证明 方法二

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ B & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ A & I-BA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -BA & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-ABA & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

例 2 已知 A 是n阶矩阵, 证明$r(A)+r\left(A^3\right) \geq 2r\left(A^2\right)$.

证明 由于 $r\left(A^3\right)=r(AAA)$, 又可根据定理 2.6 得出 $r(AAA) \geq r(AA)+r(AA)-r(A)$, 移项可得原不等式成立.

例 3 已知 A,B 都是 n 阶方阵, 且 $AB=BA=0, r\left(A^2\right)=r(A)$, 证明 $r(A+B)=r(A)+r(B)$.

证明 由于 $r\left(A^2\right)=r(A)$, 则有

$$r\left(A^2\right)=r(A) \Rightarrow r(A)=r\left(A^2\right)=r\left(A^3\right)=\cdots I$$

首先证明 $\geq$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ A^2+AB & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ A^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} A+B & A^2+BA \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & A^2 \\ 0 & A^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

注意: 第一个箭头表示第 1 行左乘 A 加到第 2 行; 第二个箭头表示第 1 列右乘 A 加到第二列; 第三个箭头表示第 2 列右乘负 P 加到第 1 列.

综上所述就可以知道 $r\left(A^2\right)=r\left(A^2A\right)$, 所以就说明矩阵方程组 $A^2X=A$ 有解, 设为 p, 即有 $A^2P=A$. 原因是$r\left(A^2,A\right)=r(A(A,I)) \leq r(A)=r\left(A^2\right)$, 同时 $r\left(A^2,A\right) \geq r\left(A^2\right)$, 所以得到 $r\left(A^2,A\right)=r\left(A^2\right)$, 这就说明 $AX^2=A$ 是有解的. 可以进行下一步变换

$$\begin{pmatrix} A+B & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & A \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}.$$

这样就可得出秩关系

$$r(A+B) = r\begin{pmatrix} B & A \\ 0 & A^3 \end{pmatrix} \geq r\left(A^3\right) + r(B) = r(A) + r(B).$$

而 $\leq$ 是显然的.

例 4 设三个向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$; $\beta_1 \cdots \beta_t$; $\alpha_1 \cdots \alpha_s$; $\beta_1 \cdots \beta_t$ 的秩分别 r_1, r_2, r_3, 证明 $\max\{r_1 r_2\} \leq r_3 \leq r_1 + r_2$.

证明 先证明(左边) $\alpha_1 \cdots \alpha_s$; 可以被 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$, $\beta_1 \cdots \beta_t$ 线性表示, 则有 $r_1 \leq r_3$. 同理可知 $\beta_1 \cdots \beta_t$也可被 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$, $\beta_1 \cdots \beta_t$ 的线性表示, 则有$r_2 \leq r_3$ 所以左边成立 $\max\{r_1,\ r_2\} \leq r_3$.

再证明(右边)首先 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$, $\beta_1 \cdots \beta_t$; 的极大线性无关组 $\alpha_{i1} \cdots \alpha_{ir1}, \beta_{j1} \cdots \beta_{jr2}$ 可以线性表示 $\alpha_1 \cdots \alpha_s, \beta_1 \cdots \beta_t$; 则有$r_3 \leq r_1 + r_2$.

例 5 设 A, B 是数域 P 上的 n 阶矩阵且 $AB = BA$, 证 $r(A) + r(B) \geq r(AB) + r(A+B)$.

证明 方法一 设方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 的解空间分别是 V_1, V_2, 方程 $ABX = BAX = 0$ 与 $(A+B)X = 0$ 的解空间分别为 W_1, W_2, 则 $V_1 \subseteq W_1, V_2 \subseteq W_2$, 从而 $V_1 \cap V_2 \subseteq W_1$, 同时 $V_1 \cup V_2 \subseteq W_2$, 利用维数公式就有

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim\left(V_1 + V_1\right) + \dim\left(V_1 \cap V_2\right) \leq \dim W_1 + \dim W_2.$$

即

$$(n - r(A)) + (n - r(B)) \leq (n - r(AB)) + (n - r(A+B)).$$

即

$$r(A) + r(B) \geq r(AB) + r(A+B).$$

证明 方法二 用分块矩阵的方法我们知道

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix},$$

结合$AB = BA$, 我们知道

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ -A & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & A+B \end{pmatrix}.$$

于是

$$r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r\begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & A+B \end{pmatrix} \geq r(AB)+r(A+B).$$

例 6 已知 A 是一个 $s\times n$ 矩阵, 证明 $r\left(I_n-A^TA\right)-r\left(I_s-AA^T\right)=n-s$.

证明 方法(利用打洞原理) 对 $\begin{pmatrix} I_n & A^T \\ A & I_s \end{pmatrix}$ 利用打洞原理可得

$$\begin{pmatrix} I_n-A^TA & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} I_n & A^T \\ A & I_s \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I-AA^T \end{pmatrix}$$

所以

$$r\begin{pmatrix} I-A^TA & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I-AA^T \end{pmatrix}.$$

即

$$s+r\left(I-A^TA\right)=n+r\left(I-AA^T\right),$$

所以 $r\left(I-A^TA\right)-r\left(I-AA^T\right)=n-s$ 成立.

7. 总结

矩阵秩的不等式问题的证明与应用非常广泛。在本文中，主要讨论了矩阵秩的不等式以及不等式的证明方法。文中利用等价标准形分解或满秩分解定理、列向量的极大无关组、分块初等变换、线性空间的维数、齐次方程组的基础解系、打洞原理等主要的六种方法进行了证明。有了这些方法和结论，就可以将矩阵的秩的等式及不等式的命题更好地应用到实际数学问题中。关于矩阵秩的不等式问题证明与应用，进行了充分的总结及研究。但是，仍会有不足之处，这一点将会在以后学习中继续学习深入了解。

参考文献

[1] 安军. 矩阵秩的性质及不等式的五种证法[J]. 高等数学研究, 2020, 23(4): 96-99.

[2] 徐小萍. 矩阵秩的不等式及其应用[J]. 廊坊师范学院学报: 自然科学版, 2010, 12(5): 19-21.

[3] 杜美华. 行阶梯与行最简形矩阵在线性代数中的应用及其在MATLAB中的实现[J]. 齐齐哈尔大学学报, 自然科学版, 2015, 31(3): 90-94.

[4] 杨凤书. 多项式方程组的新解法——四元消法[J]. 辽宁师专学报, 自然科学版, 2013, 15(1): 1-3, 73.

[5] 杨子胥. 高等代数习题集[M]. 济南: 山东科技出版社, 2002.

[6] 杜瑞芝. 数学史辞典新编[M]. 济南: 山东教育出版社, 2017.

[7] 刘洪星. 考研高等代数总复习精选名校真题[M]. 北京: 北京机械工业出版社, 2018.

[8] 张禾瑞. 高等代数[M]. 北京: 北京高等教有出版社, 2003.

[9] 陈国庆, 史秀英. 利用分块矩阵证明矩阵秩的不等式[J]. 赤峰教育学院学报, 1999(4): 61-62.

[10] 张振良. 线性代数21世纪普通高等教育应用型规划教材[M]. 北京: 化学工业出版社, 2011.

[11] 闫金亮, 郑思慧. 矩阵的秩的性质及秩的(不)等式的证明方法[J]. 武夷学院学报, 2023, 42(3): 27-33.

[12] 胡付高. 关于一类矩阵秩的恒等式注记[J]. 武汉科技大学报, 2004, 27(3): 322-323.

[13] 徐国进. 矩阵秩的Frobenius定理的一个注记与应用[J]. 甘肃联合大学学报: 自然科学版, 2005, 19(2): 3-5.

[14] 王品超. 高等代数新方法[M]. 济南: 山东教有出版社, 1989.

[15] 左可正. 关于若干个矩阵和的秩等式与不等式[J]. 湖北师院学院学报: 自然科学版, 2010, 30(1): 1-4.

[16] 李炯生, 查建国. 线性代数[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1989.