Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(5), 2110-2124
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135199

具有 Stein-Weiss 卷积部分的临界椭圆型方程的正解

顾啸风

浙江师范大学，数学科学学院，浙江　金华

收稿日期：2024 年 4 月 28 日；录用日期：2024 年 5 月 21 日；发布日期：2024 年 5 月 29 日

摘　要

本文研究了具有 Stein-Weiss 卷积部分的临界椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda|u|^{p-2}u + \frac{1}{|x|^{\alpha}}\left(\int_{\Omega}\frac{|u(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x-y|^{\mu}|y|^{\alpha}}dy\right)|u|^{2^*_{\alpha,\mu}-2}u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}, \tag{1}$$

其中 $\alpha \geq 0$，$N > 4$，$0 < \mu < N$，$0 < 2\alpha + \mu < 4$，$2^*_{\alpha,\mu} = \frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$ **且** Ω **是** $\mathbb{R}^N$ **中包含原点的** C^1 **开有界域。我们证明了当** > 0 **且** $2 < p < 2^*_{\alpha,\mu}$ **时，方程** (1) **存在一个正的基态解。**

关键词

临界椭圆方程，Stein-Weiss 卷积项，Nehari 流形，基态解

Positive Solution for the Critical Elliptic Equation with Stein-Weiss Type Convolution Parts

Xiaofeng Gu

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

文章引用: 顾啸风. 具有 Stein-Weiss 卷积部分的临界椭圆型方程的正解 [J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2110-2124.
DOI: 10.12677/aam.2024.135199

Received: Apr. 28^{th}, 2023; accepted: May 21^{st}, 2023; published: May 29^{th}, 2023

Abstract

In this paper, we investigate the following critical elliptic equation with Stein-Weiss type convolution parts

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda|u|^{p-2}u + \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\int_\Omega \frac{|u(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x-y|^\mu |y|^\alpha}dy\right)|u|^{2^*_{\alpha,\mu}-2}u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}, \tag{1}$$

where $\alpha \geq 0, N > 4, 0 < \mu < N, 0 < 2\alpha + \mu < 4, 2^*_{\alpha,\mu} = \frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$ **and** Ω **is a** C^1 **open bounded domain in** $\mathbb{R}^N$ **that contains the origin. We show that when** > 0 **and** $2 < p < 2^*_{\alpha,\mu}$**, problem** (1) **possesses a positive ground state solution.**

Keywords

Critical Elliptic Equation, Stein-Weiss Convolution Part, Nehari Manifold, Ground State Solution

1. 引言

近年来, 许多学者对如下临界椭圆方程进行了研究

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u + \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}, \tag{2}$$

其中 > 0, Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ 是临界 Sobolev 指数. Brézis 和 Nirenberg [1] 证明了若 $N \geq 4$ 且 $\in (0,{}_1)$, 其中 ${}_1$ 是 $-\Delta$ 的第一个特征值, 则方程 (2) 存在一个非平凡解. 若 $N = 3$, 则存在一个常数 ${}^* \in (0,{}_1)$, 其中 $\lambda^* = \frac{\pi^2}{4{R_0}^2}$, $R_0 = \sup\{R \mid x \in \Omega, B_R(x) \subset \Omega\}$, 使得对于任意 $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1)$, 方程 (2) 都存在一个正解. 随后, Capozzi, Fortunato 和 Palmieri [2] 证明了若 $N \geq 4$, 则对于任意 $\lambda > 0$, 方程 (2) 都存在一个非平凡解. 关于临界指数的椭圆问题已有大量的研

究工作, 具体可参考文献 [3–6].

在本文中, 我们将考虑以下非局部方程解的存在性:

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda|u|^{p-2}u+\frac{1}{|x|^{\alpha}}\left(\int_{\Omega}\frac{|u(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x-y|^{\mu}|y|^{\alpha}}dy\right)|u|^{2^*_{\alpha,\mu}-2}u \\ u\in H_0^1(\Omega) \end{cases}, \tag{3}$$

其中 $\alpha\geq 0, N>4, 0<\mu<N, 0<2\alpha+\mu<4, 2^*_{\alpha,\mu}=\frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$ 且 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中包含原点的 C^1 开有界域. 方程 (3) 与如下具有 Stein-Weiss 卷积项的非线性椭圆方程密切相关:

$$-\Delta u=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(y)|^{2^*_{,\mu}}}{|x||x-y|^{\mu}|y|dy}\right)|u|^{2^*_{,\mu}-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{4}$$

事实上, 方程 (3) 的变分方法源自于 Stein 和 Weiss 在 1958 年提出的加权 H-L-S 不等式.

命题 1. (加权 H-L-S 不等式 [7]) 假设 $1<t,r<\infty$, $0<\mu<N$, $+\geq 0$, $0<++\mu\leq N$, $f\in L^t\left(\mathbb{R}^N\right)$ 且 $h\in L^r\left(\mathbb{R}^N\right)$, 那么存在一个最佳常数 $C_{t,r,,,\mu,N}$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(x)h(y)}{|x|^{\alpha}|x-y|^{\mu}|y|^{\beta}}dxdy\leq C(t,r,\alpha,\beta,\mu,N)\|f\|_t\|h\|_r,$$

其中 $\frac{1}{t}+\frac{1}{r}+\frac{\alpha+\beta+\mu}{N}=2$ 且 $1-\frac{1}{t}-\frac{\mu}{N}<\frac{\alpha}{N}<1-\frac{1}{t}$, C 不依赖于 f 和 h.

当 $=$ 且 $t=r$ 时, 若 $|u|^p\in L^t\left(\mathbb{R}^N\right)$, 则有

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^p|u(y)|^p}{|x|^{\alpha}|x-y|^{\mu}|y|^{\alpha}}dxdy\leq C(t,N,\alpha,\mu)\|u\|_{pt}^p\|u\|_{pt}^p,$$

其中 t 满足

$$\frac{2}{t}+\frac{2\alpha+\mu}{N}=2.$$

此外, 如果 $u\in\dot{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, 结合 Sobolev 嵌入定理我们可以得到

$$2\leq pt\leq\frac{2N}{N-2},$$

从而

$$2-\frac{2+\mu}{N}\leq p\leq\frac{2N-2-\mu}{N-2}.$$

在这里, 称 $2_{*,\mu}=2-\frac{2+\mu}{N}$ 为下临界指数及 $2^*_{,\mu}:=\frac{2N-2-\mu}{N-2}$ 为上临界指数. 结合加权 H-L-S 不等式, 可以得到

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^{2^*_{,\mu}}|u(y)|^{2^*_{,\mu}}}{|x|^{\alpha}|x-y|^{\mu}|y|^{\alpha}}dxdy\leq C(N,,\mu)\|u\|_{\frac{2N}{N-2}}^{2\cdot 2^*_{,\mu}}\leq C(N,,\mu)\|\nabla u\|_2^{2\cdot 2^*_{,\mu}}. \tag{5}$$

我们定义

$$\|u\|_{,\mu}^{2\cdot 2^*_{,\mu}} := \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{2^*_{,\mu}}|u(y)|^{2^*_{,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|dxdy},$$

并且用 $S_{,\mu}$ 来表示最佳常数, 其中

$$S_{,\mu} := \inf_{u\in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\},\|u\|_{,\mu}=1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

对于任意的 $u \in \dot{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, 有

$$\|u\|_{,\mu}^2 \leq C(N,,\mu)^{\frac{1}{2^*_{,\mu}}}\|u\|_{2^*}^2.$$

从而

$$S_{,\mu} \geq \frac{S}{C(N,,\mu)^{\frac{1}{2^*_{,\mu}}}} > 0,$$

其中 S 是最佳 Sobolev 常数. 不难发现方程 (4) 是如下 Hartree 方程的加权形式:

$$-\Delta u = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^\mu}dy\right)|u|^{p-2}u, \quad p=\frac{2N-\mu}{N-2}, \quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{6}$$

对于方程 (6), Liu [8], Lei [9], Du 和 Yang [10] 通过对正则性、对称性以及唯一性的讨论, 将其正解进行了完整分类, 并得到正解的具体表达形式. 在他们结果的基础上, Gao 和 Yang [6] 研究了如下带有 Hartree 项的非局部 Brezis-Nirenberg 型问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + \left(\int_\Omega \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^\mu}dy\right)|u|^{p-2}u \\ u\in H_0^1(\Omega) \end{cases}, \tag{7}$$

得到了在一定条件下方程 (7) 正解的存在性与不存在性.

自然地, 我们想问, 对于具有 Stein-Weiss 卷积部分的方程 (4) 能否得到类似的结果. 然而, 由于 Stein-Weiss 卷积项的存在, 我们不能得到正解的具体表达形式, 这对我们解决问题造成了很大的困难. 幸运地是, Du, Gao 和 Yang [11] 利用第二集中紧性原理得到方程 (4) 有一个正的基态解 U, 并且有 $U\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Melgaard, Yang 和 Zhou 在 [12] 中证明 U 在无穷远处拥有合适的衰减性

$$U(x) \leq \frac{C}{|x|^{N-2}}, \qquad \forall |x|\geq 1. \tag{8}$$

再利用标准的梯度估计, 我们可以得到

$$|\nabla U(x)| \leq \frac{C}{|x|^{N-1}}, \qquad \forall |x|\geq 1. \tag{9}$$

受著名的文献 [1] 的启发, 并结合以上基态解 U 的渐进估计, 我们得到了在一定条件下方程 (3) 正的基态解的存在性.

2. 预备知识

在本文中, 我们定义

$$\dot{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)=\left\{u\in L^{2^*}\left(\mathbb{R}^N\right):|\nabla u|\in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right\},\quad \|u\|_{\dot{H}^1}=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$H_0^1(\Omega)=\left\{u\in L^2(\Omega):|\nabla u|\in L^2(\Omega)\right\},\quad \|u\|=\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|u(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy,$$

$$|u|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}=\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{|u(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|u(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy.$$

方程 (1) 对应的能量泛函为 $I:H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$, 其中

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{\lambda}{p}|u|_p^p-\frac{1}{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}|u|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}. \tag{10}$$

方程 (5) 对应的能量泛函为 $E:\dot{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)\to\mathbb{R}$, 其中

$$E(u)=\frac{1}{2}\|u\|_{\dot{H}^1}^2-\frac{1}{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}\|u\|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}. \tag{11}$$

与 I 和 E 相关的 Nehari 流形记为

$$\mathcal{N}:=\left\{u\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}:0=J(u)=\langle I'(u),u\rangle=\|u\|^2-\lambda|u|_p^p-|u|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}\right\}, \tag{12}$$

$$\mathcal{M}:=\left\{u\in\dot{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)\backslash\{0\}:0=F(u)=\langle E'(u),u\rangle=\|u\|_{\dot{H}^1}^2-\|u\|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2}2^*_{\alpha,\mu}\right\}. \tag{13}$$

3. 主要结果及证明

我们知道, 利用变分方法, 找一个方程的解等价于找它对应的能量泛函的临界点. 因此在本文中, 找方程 (1) 的正解等价于找能量泛函 (10) 的基态解. 但是, 对于有界区域上的临界椭圆方程, 存在的困难之一在于紧性缺失. 通过 Brezis 和 Nirenberg [1] 发展出来的方法, 我们知道紧性门槛值依赖于所对应的极限问题的能量, 即

$$m(\mathbb{R}^N)=\inf\left\{E(u):u\in\mathcal{M}\right\}. \tag{14}$$

为了证明能量泛函 $I(u)$ 满足 $(PS)_c$ 条件, 即当 $n\to\infty$ 时, 对于任意满足

$$I(u_n)\to c,\quad I'(u_n)\to 0 \tag{15}$$

的序列 $u_n \subset H_0^1(\Omega)$, 都存在一个收敛子列, 我们需要证明 (10) 所对应的基态解的能量严格小于它所对应的极限问题的能量 (见引理 9) .

为了清楚地证明我们的主要结果, 本节首先介绍一些与变分法相关的重要引理.

引理 1. 假设 $N \geq 4, \alpha \geq 0, 0 < \mu < N, 0 < 2\alpha + \mu < 4, 2 < p < 2_{\alpha,\mu}^*$ 且 $\lambda > 0$, 则当 $\mathcal{N}$ 为闭集且下有界时, 对任意 $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, 都存在唯一的 $t_u > 0$ 使得 $t_u u \in \mathcal{N}$.

证明. $\mathcal{N}$ 显然是闭的. 由 Sobolev 不等式以及 (5) 式可知, 对任意 $u \in \mathcal{N}$, 都存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|u\|^2 = \lambda |u|_p^p + |u|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*} \leq C\left(\|u\|^p + \|u\|^{2_{\alpha,\mu}^*}\right).$$

因为 $p > 2$ 且 $2_{\alpha,\mu}^* > 2$, 所以存在 $\delta > 0$ 满足

$$\|u\| \geq \delta, \quad \forall u \in \mathcal{N}, \tag{16}$$

则 $\mathcal{N}$ 关于 0 有下界.

对任意 $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ 以及 $t > 0$, 记

$$g(t) := I(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda t^p}{p}|u|_p^p - \frac{t^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*}}{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*}|u|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*}.$$

那么可以得到

$$g'(t) = t\|u\|^2 - \lambda t^{p-1}|u|_p^p - t^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*-1}|u|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*} = t\left(\|u\|^2 - \lambda t^{p-2}|u|_p^p - t^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*-2}|u|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*}\right).$$

如果能够证明对任意满足 $g'(t_0) = 0$ 的 t_0 都有 $g''(t_0) < 0$, 那么 t_0 就是 $g'(t) = 0$ 的唯一解. 事实上,

$$\begin{aligned} g''(t_0) &= \|u\|^2 - \lambda(p-1){t_0}^{p-2}|u|_p^p - \left(2\cdot 2_{\alpha,\mu}^* - 1\right){t_0}^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*-2}|u|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*} \\ &= \lambda(2-p)t_0^{p-2}|u|_p^p + \left(2 - 2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*\right)t_0^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*-2}|u|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*} \leq C\lambda(2-p){t_0}^{p-2}|u|_p^p < 0. \end{aligned}$$

因此, 对任意 $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, 都存在唯一的 $t_u > 0$ 使得 $t_u u \in \mathcal{N}$ 且

$$I(t_u u) = \sup_{t>0} I(tu).$$

证毕. □

引理 2. 在引理 1 的假设下, 如果 $\{u_n\}$ 为 I 的 $(PS)_c$ 序列, 那么 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界.

证明. 设 $\{u_n\}$ 为 I 的 $(PS)_c$ 序列, 即

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{p}|u_n|_p^p - \frac{1}{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*}|u_n|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*} = c + o(1),$$

$$J\left(u_n\right)=\left\|u_n\right\|^2-\lambda\left|u_n\right|_p^p-\left|u_n\right|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*}=o(1)\left\|u_n\right\|.$$

由假设 $2<p<2_{\alpha,\mu}^*$ 可以得到

$$c+o(1)\left(1+\left\|u_n\right\|\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left\|u_n\right\|^2-\left(\frac{1}{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*}-\frac{1}{p}\right)\left|u_n\right|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*}\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left\|u_n\right\|^2,$$

所以 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. □

引理 3. 在引理 1 的假设下, 设 $\{u_n\}$ 为 $I|_{\mathcal{N}}$ 的 $(PS)_c$ 序列, 即 $I\left(u_n\right)\to c$, 且在 $H^{-1}(\Omega)$ 中有 $I'|_{\mathcal{N}}\left(u_n\right)\to 0$, 那么 $\{u_n\}$ 也为 I 的 $(PS)_c$ 序列.

证明. 由 (12) 式和 (16) 式, 对任意 $u\in\mathcal{N}$, 可以得到

$$\begin{aligned}\langle J'(u),u\rangle&=2\|u\|^2-\lambda p|u|_p^p-2\cdot 2_{\alpha,\mu}^*\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*}|u(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy\\&\leq(2-p)\|u\|^2\leq-(p-2)\delta^2<0.\end{aligned}\tag{17}$$

设 $\{\mu_n\}$ 是一列拉格朗日乘子序列满足

$$I'|_{\mathcal{N}}\left(u_n\right)=I'\left(u_n\right)+\mu_n J'\left(u_n\right).$$

取 $u_n\in\mathcal{N}$ 作为试验函数, 则当 $n\to\infty$ 时有

$$\mu_n J'\left(u_n\right)\to 0.$$

除此之外, 由 (17) 式可得当 $n\to\infty$ 时有 $\mu_n\to 0$. 与引理 2 中证明类似, 我们可以得到 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 因此, 在 $H^{-1}(\Omega)$ 中有 $I'\left(u_n\right)\to 0$.

定义

$$c_1=\inf\{I(u):u\in\mathcal{N}\},\tag{18}$$

$$c_2=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\sup_{t>0}I(tu),\tag{19}$$

$$c_3=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(\gamma(t)),\tag{20}$$

其中

$$\Gamma:=\left\{\gamma\in C\left([0,1],H_0^1(\Omega)\right):\gamma(0)=0,I(\gamma(1))\leq 0,\gamma(1)\neq 0\right\}.$$

类似于 (定理 4.2 [13]) 中的证明, 可以得到

$$c_1=c_2=c_3.\tag{21}$$

□

下面介绍在文献 (引理 2.2 [11]) 中证明的 Brezis-Lieb 引理.

引理 4. *(Brezis-Lieb 引理)* 设 $N \geq 3, \alpha \geq 0, 0 < \mu < N$, 若 $\{u_n\}$ 为 $L^{\frac{2Np}{2N-2\alpha-\mu}}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中有界序列, 且当 $N \to \infty$ 时在 $\mathbb{R}^N$ 中几乎处处有 $u_n \to u$, 那么当 $n \to \infty$ 时有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|u_n(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy-\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|(u_n-u)(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|(u-u_n)(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy\\ \to\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|u(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy.\end{aligned} \tag{22}$$

由引理 4 可以得到以下的结果.

引理 5. 在引理 1 的假设下, 若 $c < m\left(\mathbb{R}^N\right)$, 则泛函 I 满足 $(PS)_c$ 条件.

证明. 设 $\{u_n\}$ 为 I 的 $(PS)_c$ 序列, 由引理 2 可得 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 设 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ 为序列 $\{u_n\}$ 的弱极限, 那么

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ 于 } H_0^1(\Omega);\quad u_n \to u_0 \text{ 几乎处处于 } \Omega;\quad u_n \to u_0 \text{ 于 } L^p(\Omega).$$

设 $v_n := u_n - u_0$, 则由 Brezis-Lieb 引理可得

$$\|u_n\|^2 = \|v_n\|^2 + \|u_0\|^2 + o(1),$$

$$|u_n|_p^p = |v_n|_p^p + |u_0|_p^p + o(1),$$

$$|u_n|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}} = |v_n|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}} + |u_0|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}} + o(1).$$

进一步可以得到 $I'(u_0) = 0$, 即 u_0 为方程 (1) 的弱解. 由此可得

$$0 = \langle I'(u_0), u_0\rangle = \|u_0\|^2 - \lambda|u_0|_p^p - |u_0|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}.$$

因此,

$$\begin{aligned}I(u_0) &= \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \frac{\lambda}{p}|u_0|_p^p - \frac{1}{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}|u_0|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}\\ &= \lambda\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)|u_0|_p^p + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}\right)|u_0|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}} \geq 0.\end{aligned} \tag{23}$$

因为在 $H_0^1(\Omega)$ 中有 $v_n \rightharpoonup 0$ 且在 $L^P(\Omega)$ 中有 $v_n \to 0$, 所以

$$\begin{aligned}o(1) &= \langle I'(v_n), v_n\rangle = \|v_n\|^2 - \lambda|v_n|_p^p - |v_n|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}\\ &= \|v_n\|^2 - |v_n|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}} + o(1) = \langle E'(v_n), v_n\rangle + o(1)\end{aligned} \tag{24}$$

假设在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n \nrightarrow u_0$, 即在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $v_n \nrightarrow 0$. 将 v_n 延拓到全空间 $\mathbb{R}^n$ 上, 设 v_n 在区域 Ω 外取值为 0. 由 (24) 式可以推出 $\lim\limits_{n\to\infty} E(v_n) \geq m\left(\mathbb{R}^N\right)$. 由 $I(u_n) = E(v_n) + I(u_0) + o(1)$ 以及

(23) 式可以得到

$$c=\lim_{n\to\infty} I\left(u_n\right)\geq \lim_{n\to\infty} E\left(v_n\right)\geq m\left(\mathbb{R}^n\right),$$

这与 $c<m\left(\mathbb{R}^N\right)$ 矛盾. 因此, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有 $u_n\to u_0$. □

下面我们验证引理 5 中的条件. 不妨设当 ρ 充分小时 $B_{2\rho}(0)\subset\Omega$. 设 $\phi\in C_0^\infty$ 为截断函数, 在 $B_\rho(0)$ 上满足 $\phi\equiv 1$. 将 $B_{2\rho}(0)$ 和 $B_\rho(0)$ 简记为 $B_{2\rho}$ 和 B_ρ. 定义

$$U_\varepsilon(x)=\varepsilon^{\frac{2-N}{2}}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\quad u_\varepsilon(x)=\varphi(x)U_\varepsilon(x),$$

其中 $U(x)$ 为 $m\left(\mathbb{R}^n\right)$ 的极小值点, 也就是方程 (4) 的解.

引理 6. 我们得到

$$\int_\Omega \left|\nabla u_\varepsilon\right|^2 dx=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U|^2 dx+O\left(\varepsilon^{N-2}\right)$$

证明. 因为

$$\nabla u_\varepsilon=\nabla\varphi\cdot U_\varepsilon+\varphi\cdot\nabla U_\varepsilon,$$

$$\left|\nabla u_\varepsilon\right|^2=|\nabla\varphi|^2U_\varepsilon^2+2\varphi U_\varepsilon\nabla\varphi\nabla U_\varepsilon+\left|\nabla U_\varepsilon\right|^2\varphi^2.$$

从而有

$$\int_\Omega\left|\nabla U_\varepsilon\right|^2\varphi^2 dx\leq\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla U_\varepsilon\right|^2 dx=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U|^2 dx,$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla\varphi|^2{U_\varepsilon}^2 dx&\leq C\varepsilon^{2-N}\int_{\rho<|x|<2\rho}U^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\leq C\varepsilon^2\int_{\frac{\rho}{\varepsilon}<|y|<\frac{2\rho}{\varepsilon}}U^2(y)dy\\&\leq C\varepsilon^2\int_{\frac{\rho}{\varepsilon}<|y|<\frac{2\rho}{\varepsilon}}|y|^{4-2N}dy=C\varepsilon^2\int_{\frac{\rho}{\varepsilon}}^{\frac{2\rho}{\varepsilon}}r^{3-N}dr=O\left(\varepsilon^{N-2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\varphi U_\varepsilon\nabla\varphi\nabla U_\varepsilon dx\right|&\leq C\int_{\rho<|x|<2\rho}U_\varepsilon\left|\nabla U_\varepsilon\right|dx\leq C\varepsilon^{1-N}\int_{\rho<|x|<2\rho}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left|\nabla U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|dx\\&\leq C\varepsilon\int_{\frac{\rho}{\varepsilon}<|y|<\frac{2\rho}{\varepsilon}}|y|^{3-2N}dy=C\varepsilon\int_{\frac{\rho}{\varepsilon}}^{\frac{2\rho}{\varepsilon}}r^{2-N}dr=O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{aligned}$$

上述估计可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left|\nabla u_\varepsilon\right|^2 dx&=\int_\Omega\left|\nabla U_\varepsilon\right|^2\varphi^2 dx+\int_\Omega|\nabla\varphi|^2U_\varepsilon^2 dx+2\int_\Omega\varphi U_\varepsilon\nabla\varphi\nabla U_\varepsilon dx\\&\leq\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U|^2 dx+O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho^c}\left(1-\varphi^2\right)\left|\nabla U_\varepsilon\right|^2 dx&\leq\int_{B_\rho^c}\left|\nabla U_\varepsilon\right|^2 dx=\varepsilon^{-N}\int_{|x|>\rho}\left|\nabla U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx=\int_{|y|>\frac{\rho}{\varepsilon}}|\nabla U(y)|^2 dy\\&\leq C\int_{|y|>\frac{\rho}{\varepsilon}}|y|^{2-2N}dy=C\int_{\frac{\rho}{\varepsilon}}^\infty r^{1-N}dr=O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{aligned}$$

DOI: 10.12677/aam.2024.135199

因此,

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \int_\Omega |\nabla U_\varepsilon|^2 \varphi^2 dx + \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 U_\varepsilon^2 dx + 2\int_\Omega \varphi U_\varepsilon \nabla \varphi \nabla U_\varepsilon dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\varepsilon|^2 \varphi^2 dx + O\left(\varepsilon^{N-2}\right) \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 dx + O\left(\varepsilon^{N-2}\right).$$

结合以上两个估计, 引理 6 成立. □

引理 7. 我们得到

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|u_\varepsilon(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right).$$

证明. 通过直接计算可得

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|u_\varepsilon(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy \geq \int_{B_\rho}\int_{B_\rho} \frac{|U_\varepsilon(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U_\varepsilon(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U_\varepsilon(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U_\varepsilon(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy - 2\mathbb{D} - \mathbb{E} = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy - 2\mathbb{D} - \mathbb{E},$$

其中

$$\mathbb{D}^{\frac{2N}{2N-2\alpha-\mu}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho}\int_{B_\rho} \frac{|U_\varepsilon(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U_\varepsilon(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy\right)^{\frac{2N}{2N-2\alpha-\mu}}$$

$$\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho} U_\varepsilon(x)^{\frac{2N}{N-2}}dx\right)\left(\int_{B_\rho} U_\varepsilon(y)^{\frac{2N}{N-2}}dy\right)$$

$$\leq O\left(\varepsilon^N\right) + O\left(\varepsilon^N\right)\int_{|z|>\frac{\rho}{\varepsilon}} U(z)^{\frac{2N}{N-2}}dz = O\left(\varepsilon^N\right) + O\left(\varepsilon^{2N}\right) = O\left(\varepsilon^N\right)$$

因此, $\mathbb{D} \leq O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right)$. 并且

$$\mathbb{E}^{\frac{2N}{2N-2\alpha-\mu}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho} \frac{|U_\varepsilon(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U_\varepsilon(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy\right)^{\frac{2N}{2N-2\alpha-\mu}}$$

$$\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho} U_\varepsilon(x)^{\frac{2N}{N-2}}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho} U_\varepsilon(y)^{\frac{2N}{N-2}}dy\right)$$

$$= C\left(\int_{|y|>\frac{\rho}{\varepsilon}} U(y)^{\frac{2N}{N-2}}dy\right)\left(\int_{|z|>\frac{\rho}{\varepsilon}} U(z)^{\frac{2N}{N-2}}dz\right) = O\left(\varepsilon^{2N}\right).$$

因此, $\mathbb{E} \le O\left(\varepsilon^{2N-2\alpha-\mu}\right)$. 由上述估计可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_\varepsilon(x)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}\left|u_\varepsilon(y)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy\\ &\ge \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_\varepsilon(x)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}\left|u_\varepsilon(y)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy \le \int_{B_{2\rho}}\int_{B_{2\rho}} \frac{\left|U_\varepsilon(x)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}\left|U_\varepsilon(y)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy\\ &\le \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\left|U_\varepsilon(x)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}\left|U_\varepsilon(y)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy + 2\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2\rho}}\int_{\beta_{2\rho}} \frac{\left|U_\varepsilon(x)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}\left|U_\varepsilon(y)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2\rho}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2\rho}} \frac{\left|U_\varepsilon(x)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}\left|U_\varepsilon(y)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy + 2\mathbb{F} + \mathbb{G}\end{aligned}$$

类似于对 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{E}$ 的估计, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{F} &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2\rho}}\int_{B_{2\rho}} \frac{\left|U_\varepsilon(x)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}\left|U_\varepsilon(y)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy = O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right),\\ \mathbb{G} &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2\rho}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2\rho}} \frac{\left|U_\varepsilon(x)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}\left|U_\varepsilon(y)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy = O\left(\varepsilon^{2N-2\alpha-\mu}\right).\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_\varepsilon(x)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}\left|u_\varepsilon(y)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy\\ &\le \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U(y)|^{2^*\alpha,\mu}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right) + O\left(\varepsilon^{2N-2\alpha-\mu}\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right).\end{aligned}$$

结合以上两个估计, 可以得到

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_\varepsilon(x)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}\left|u_\varepsilon(y)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right).$$

□

引理 8. 我们得到

$$\int_\Omega u_\varepsilon^p dx = d\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}}\right)$$

其中

$$d=\int_{\mathbb{R}^N}|U(y)|^p dy=\int_{B_1}|U(y)|^p dy+\int_{B_1^c}|U(y)|^p dy\leq C\int_{B_1}dy+\int_{B_1^c}|y|^{(2-N)p}dy$$
$$=C\left(|B_1|+\int_1^{\infty}r^{(2-N)p+N-1}dr\right)\leq C_1.$$

证明. 通过直接计算可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}{u_\varepsilon}^p dx&\geq\int_{B_\rho}U_\varepsilon^p dx=\int_{\mathbb{R}^N}U_\varepsilon^p dx-\int_{B_\rho^c}U_\varepsilon^p dx\\&\geq\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}|U(y)|^p dy-C\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}\int_{|y|>\frac{\rho}{\varepsilon}}|y|^{(2-N)p}dy\\&=d\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}+O\left(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}}\right).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\int_{\Omega}u_\varepsilon^p dx\leq\int_{B_{2\rho}}U_\varepsilon^p dx=\int_{\mathbb{R}^N}U_\varepsilon^p dx-\int_{B_{2\rho}^c}U_\varepsilon^p dx=d\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}+O\left(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}}\right).$$

结合以上两个估计, 引理 8 成立. □

引理 9. 在引理 1 的假设下, 可以得到 $c_1<m(\mathbb{R}^N)$.

证明. 我们知道存在唯一的 $t(\varepsilon)>0$ 使得 $u_\varepsilon\in\mathbb{N}$, 也就是

$$\|u_\varepsilon\|^2=\lambda t(\varepsilon)^{p-2}\left|u_\varepsilon\right|_p^p+t(\varepsilon)^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}-2}\left|u_\varepsilon\right|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}. \tag{25}$$

由引理 6 ∼ 引理8, 可以得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U|^2dx+O\left(\varepsilon^{N-2}\right)&=\lambda t(\varepsilon)^{p-2}\left(d\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}+O\left(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}}\right)\right)\\&\quad+t(\varepsilon)^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}-2}\left(\int_{\mathbb{R}^N\mathbb{R}^N}\frac{|U(x)|^{2^*\alpha,\mu}|U(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy+O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right)\right).\end{aligned}$$

通过对 ε 进行求导, 可以得到

$$\begin{aligned}O\left(\varepsilon^{N-3}\right)&=\lambda(p-2)t'(\varepsilon)t(\varepsilon)^{p-3}\left(d\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}+O\left(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}}\right)\right)\\&\quad+\lambda t(\varepsilon)^{p-2}\left(d\left(N-\frac{(N-2)p}{2}\right)\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}-1}+O\left(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}-1}\right)\right)\\&\quad+\left(2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}-2\right)t'(\varepsilon)t(\varepsilon)^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}-3}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|U(x)|^{2^*,\mu}|U(y)|^2\alpha,\mu}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy+O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right)\right)\\&\quad+t(\varepsilon)^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}-2}\cdot O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}-1}\right).\end{aligned}$$

从而有

$$t'(\varepsilon)=\frac{P(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)},$$

其中

$$\begin{aligned}P(\varepsilon)=&O(\varepsilon^{N-3})-\lambda t(\varepsilon)^{p-2}\left(d\left(N-\frac{(N-2)p}{2}\right)\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}-1}+O(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}-1})\right)\\&-t(\varepsilon)^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}-2}\cdot O(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}+1})\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}Q(\varepsilon)=&\lambda(p-2)t(\varepsilon)^{p-3}\left(d\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}+O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right)\right)\\&+\left(2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}-2\right)t(\varepsilon)^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}-3}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|U(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^{\alpha}|x-y|^{\mu}|y|^{\alpha}}dxdy+O(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}})\right).\end{aligned}$$

根据方程 (25) 及 $U\in\mathbb{M}$ 可得 $t(0)=1$. 因此当 $\varepsilon\to 0$ 时, $t(\varepsilon)\to 1$.

从而若 $\varepsilon\to 0$,

$$P(\varepsilon)=-\lambda d\left(N-\frac{(N-2)p}{2}\right)\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}-1}\left(1+o(1)\right),$$

$$Q(\varepsilon)=\left(2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}-2\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|U(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^{\alpha}|x-y|^{\mu}|y|^{\alpha}}dxdy\right)\left(1+o(1)\right).$$

因此,

$$t'(\varepsilon)=-\Lambda\left(N-\frac{(N-2)p}{2}\right)\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}-1}(1+o(1)),$$

其中

$$\Lambda=\frac{\lambda d}{\left(2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}-2\right)\|U\|_{\alpha,\mu}^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}}.$$

从而有

$$t(\varepsilon)=1-\Lambda\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}(1+o(1)),$$

$$t(\varepsilon)^2=1-2\Lambda\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}(1+o(1)),$$

$$t(\varepsilon)^p=1-p\Lambda\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}(1+o(1)),$$

$$t(\varepsilon)^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}=1-2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}\Lambda\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}(1+o(1)).$$

因此,

$$
\begin{aligned}
c_1 = c_2 &\leq I\left(t(\varepsilon)u_\varepsilon\right) \\
&= \frac{t(\varepsilon)^2}{2}\int_\Omega \left|\nabla u_\varepsilon\right|^2 dx - \frac{\lambda t(\varepsilon)^p}{p}\int_\Omega \left|u_\varepsilon\right|^p dx - \frac{t(\varepsilon)^{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}}{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_\varepsilon(x)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}\left|u_\varepsilon(y)\right|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U|^2dx - \frac{1}{2\cdot 2^*_{\alpha,\mu}}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|U(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}}|U(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy - \frac{\lambda d\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}}{p}(1+o(1)) \\
&= m\left(\mathbb{R}^N\right) - \frac{\lambda d\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}}}{p}(1+o(1)) < m\left(\mathbb{R}^N\right).
\end{aligned}
$$

证毕. □

在本文中, 我们得到问题 (1) 存在一个正基态解的充分条件. 我们的主要结果陈述如下:

定理 1. 假设 $\lambda > 0$ 且 $2 < p < 2^*_{\alpha,\mu}$, 那么问题 (1) 存在一个正的基态解.

证明. 令 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$ 是能量泛函 I 的极小化序列. 引理 5 和引理 9 说明 $\{u_n\}$ 包含一个收敛的子列, 从而定理得证. □

4. 总结与展望

本文主要研究具有 Stein-Weiss 卷积部分的临界椭圆方程 Brezis-Nirenberg 型问题, 其中 Stein-Weiss 卷积部分是文章的创新点. 就此类 Brezis-Nirenberg 型问题, 我们还可以研究在不同扰动项 (例如低阶扰动、高阶扰动、凹凸非线性项) 下, 方程解的存在性和多解性. 此外, 我们还期望通过经典的 Pohožaev 恒等式, 获得方程正解的不存在性.

参考文献

[1] Brézis, H. and Nirenberg, L. (1983) Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **36**, 437-477. https://doi.org/10.1002/cpa.3160360405

[2] Capozzi, A., Fortunato, D. and Palmieri, G. (1985) An Existence Result for Nonlinear Elliptic Problems Involving Critical Sobolev Exponent. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **2**, 463-470. https://doi.org/10.1016/s0294-1449(16)30395-x

[3] Guo, Z. (2016) Ground States for a Nonlinear Elliptic Equation Involving Multiple Hardy-Sobolev Critical Exponents. *Advanced Nonlinear Studies*, **16**, 333-344. https://doi.org/10.1515/ans-2015-5023

[4] Liu, F., Yang, J. and Yu, X. (2023) Positive Solutions to Multi-Critical Elliptic Problems. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **202**, 851-875. https://doi.org/10.1007/s10231-022-01262-2

[5] Cao, D. and Peng, S. (2003) A Note on the Sign-Changing Solutions to Elliptic Problems with Critical Sobolev and Hardy Terms. *Journal of Differential Equations*, **193**, 424-434. https://doi.org/10.1016/S0022-0396(03)00118-9

[6] Gao, F. and Yang, M. (2018) The Brezis-Nirenberg Type Critical Problem for the Nonlinear Choquard Equation. *Science China Mathematics*, **61**, 1219-1242. https://doi.org/10.1007/s11425-016-9067-5

[7] Stein, E.M. and Weiss, G. (1958) Fractional Integrals on N-Dimensional Euclidean Space. *Journal of Mathematics and Mechanics*, **7**, 503-514. https://doi.org/10.1512/iumj.1958.7.57030

[8] Liu, S. (2009) Regularity, Symmetry, and Uniqueness of Some Integral Type Quasilinear Equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, **71**, 1796-1806. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.01.014

[9] Lei, Y. (2013) Qualitative Analysis for the Static Hartree-Type Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **45**, 388-406. https://doi.org/10.1137/120879282

[10] Du, L. and Yang, M. (2019) Uniqueness and Nondegeneracy of Solutions for a Critical Nonlocal Equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **39**, 5847-5866. https://doi.org/10.3934/dcds.2019219

[11] Du, L., Gao, F. and Yang, M. (2022) On Elliptic Equations with Stein-Weiss Type Convolution Parts. *Mathematische Zeitschrift*, **301**, 2185-2225. https://doi.org/10.1007/s00209-022-02973-1

[12] Melgaard, M., Yang, M. and Zhou, X. (2022) Regularity, Symmetry and Asymptotic Behaviour of Solutions for Some Stein-Weiss-Type Integral Systems. *Pacific Journal of Mathematics*, **317**, 153-186. https://doi.org/10.2140/pjm.2022.317.153

[13] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. In: *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Vol. 24, Birkhäuser, Boston.