

具有 Stein-Weiss 卷积部分的临界椭圆型方程的正解

顾啸风

浙江师范大学, 数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2024 年 4 月 28 日; 录用日期: 2024 年 5 月 21 日; 发布日期: 2024 年 5 月 29 日

摘要

本文研究了具有 Stein-Weiss 卷积部分的临界椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda|u|^{p-2}u + \frac{1}{|x|^\alpha} \left(\int_{\Omega} \frac{|u(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x-y|^\mu|y|^\alpha} dy \right) |u|^{2_{\alpha,\mu}^*-2}u, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}, \quad (1)$$

其中 $\alpha \geq 0$, $N > 4$, $0 < \mu < N$, $0 < 2\alpha + \mu < 4$, $2_{\alpha,\mu}^* = \frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$ 且 Ω 是 \mathbb{R}^N 中包含原点的 C^1 开有界域。我们证明了当 $\lambda > 0$ 且 $2 < p < 2_{\alpha,\mu}^*$ 时, 方程 (1) 存在一个正的基态解。

关键词

临界椭圆方程, Stein-Weiss 卷积项, Nehari 流形, 基态解

Positive Solution for the Critical Elliptic Equation with Stein-Weiss Type Convolution Parts

Xiaofeng Gu

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Apr. 28th, 2023; accepted: May 21st, 2023; published: May 29th, 2023

Abstract

In this paper, we investigate the following critical elliptic equation with Stein-Weiss type convolution parts

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{p-2} u + \frac{1}{|x|^\alpha} \left(\int_{\Omega} \frac{|u(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x-y|^\mu |y|^\alpha} dy \right) |u|^{2^*_{\alpha,\mu}-2} u, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}, \quad (2)$$

where $\alpha \geq 0, N > 4, 0 < \mu < N, 0 < 2\alpha + \mu < 4, 2^*_{\alpha,\mu} = \frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$ and Ω is a C^1 open bounded domain in \mathbb{R}^N that contains the origin. We show that when $\lambda > 0$ and $2 < p < 2^*_{\alpha,\mu}$, problem (2) possesses a positive ground state solution.

Keywords

Critical Elliptic Equation, Stein-Weiss Convolution Part, Nehari Manifold, Ground State Solution

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

近年来,许多学者对如下临界椭圆方程进行了研究

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u + \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}, \quad (3)$$

其中 $\lambda > 0$, Ω 是 \mathbb{R}^N 中的有界区域, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ 是临界 Sobolev 指数. Brézis 和 Nirenberg [1] 证明了若 $N \geq 4$ 且 $\lambda \in (0, \lambda_1)$, 其中 λ_1 是 $-\Delta$ 的第一个特征值, 则方程 (3) 存在一个非平凡解. 若 $N = 3$, 则存在一个常数 $\lambda^* \in (0, \lambda_1)$, 其中 $\lambda^* = \frac{\pi^2}{4R_0^2}$, $R_0 = \sup \{R \mid x \in \Omega, B_R(x) \subset \Omega\}$, 使得对于任意 $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1)$, 方程 (3) 都存在一个正解. 随后, Capozzi, Fortunato 和 Palmieri [2] 证明了若 $N \geq 4$, 则对于任意 $\lambda > 0$, 方程 (3) 都存在一个非平凡解. 关于临界指数的椭圆问题已有大量的研

究工作, 具体可参考文献 [3-6].

在本文中, 我们将考虑以下非局部方程解的存在性:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda|u|^{p-2}u + \frac{1}{|x|^\alpha} \left(\int_{\Omega} \frac{|u(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x-y|^\mu|y|^\alpha} dy \right) |u|^{2_{\alpha,\mu}^*-2}u, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}, \quad (4)$$

其中 $\alpha \geq 0, N > 4, 0 < \mu < N, 0 < 2\alpha + \mu < 4, 2_{\alpha,\mu}^* = \frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$ 且 Ω 是 \mathbb{R}^N 中包含原点的 C^1 开有界域. 方程 (4) 与如下具有 Stein-Weiss 卷积项的非线性椭圆方程密切相关:

$$-\Delta u = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x||x-y|^\mu|y|^\alpha} dy \right) |u|^{2_{\alpha,\mu}^*-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (5)$$

事实上, 方程 (4) 的变分方法源自于 Stein 和 Weiss 在 1958 年提出的加权 H-L-S 不等式.

命题 1. (加权 H-L-S 不等式 [7]) 假设 $1 < t, r < \infty, 0 < \mu < N, \alpha \geq 0, 0 < \alpha + \mu \leq N, f \in L^t(\mathbb{R}^N)$ 且 $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$, 那么存在一个最佳常数 $C_{t,r,\alpha,\mu,N}$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x)h(y)}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha} dx dy \leq C(t, r, \alpha, \beta, \mu, N) \|f\|_t \|h\|_r,$$

其中 $\frac{1}{t} + \frac{1}{r} + \frac{\alpha+\beta+\mu}{N} = 2$ 且 $1 - \frac{1}{t} - \frac{\mu}{N} < \frac{\alpha}{N} < 1 - \frac{1}{t}, C$ 不依赖于 f 和 h .

当 $\alpha = 0$ 且 $t = r$ 时, 若 $|u|^p \in L^t(\mathbb{R}^N)$, 则有

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p|u(y)|^p}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha} dx dy \leq C(t, N, \alpha, \mu) \|u\|_{pt}^p \|u\|_{pt}^p,$$

其中 t 满足

$$\frac{2}{t} + \frac{2\alpha + \mu}{N} = 2.$$

此外, 如果 $u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$, 结合 Sobolev 嵌入定理我们可以得到

$$2 \leq pt \leq \frac{2N}{N-2},$$

从而

$$2 - \frac{2 + \mu}{N} \leq p \leq \frac{2N - 2 - \mu}{N - 2}.$$

在这里, 称 $2_{*,\mu} = 2 - \frac{2+\mu}{N}$ 为下临界指数及 $2_{,\mu}^* := \frac{2N-2-\mu}{N-2}$ 为上临界指数. 结合加权 H-L-S 不等式, 可以得到

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{2_{*,\mu}^*}|u(y)|^{2_{*,\mu}^*}}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha} dx dy \leq C(N, \mu) \|u\|_{\frac{2N}{N-2}}^{2 \cdot 2_{*,\mu}^*} \leq C(N, \mu) \|\nabla u\|_2^{2 \cdot 2_{*,\mu}^*}. \quad (6)$$

我们定义

$$\|u\|_{,\mu}^{2;2^*} := \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{2^*} |u(y)|^{2^*}}{|x|^\alpha |x-y|^\mu |y| dx dy},$$

并且用 $S_{,\mu}$ 来表示最佳常数, 其中

$$S_{,\mu} := \inf_{u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, \|u\|_{,\mu} = 1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

对于任意的 $u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\|u\|_{,\mu}^2 \leq C(N, \mu)^{\frac{1}{2^*}} \|u\|_{2^*}^2.$$

从而

$$S_{,\mu} \geq \frac{S}{C(N, \mu)^{\frac{1}{2^*}}} > 0,$$

其中 S 是最佳 Sobolev 常数. 不难发现方程 (5) 是如下 Hartree 方程的加权形式:

$$-\Delta u = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^{p-2} u, \quad p = \frac{2N-\mu}{N-2}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (7)$$

对于方程 (7), Liu [8], Lei [9], Du 和 Yang [10] 通过对正则性、对称性以及唯一性的讨论, 将其正解进行了完整分类, 并得到正解的具体表达形式. 在他们结果的基础上, Gao 和 Yang [6] 研究了如下带有 Hartree 项的非局部 Brezis-Nirenberg 型问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + \left(\int_{\Omega} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^{p-2} u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}, \quad (8)$$

得到了在一定条件下方程 (8) 正解的存在性与不存在性.

自然地, 我们想问, 对于具有 Stein-Weiss 卷积部分的方程 (5) 能否得到类似的结果. 然而, 由于 Stein-Weiss 卷积项的存在, 我们不能得到正解的具体表达形式, 这对我们解决问题造成了很大的困难. 幸运的是, Du, Gao 和 Yang [11] 利用第二集中紧性原理得到方程 (5) 有一个正的基态解 U , 并且有 $U \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Melgaard, Yang 和 Zhou 在 [12] 中证明 U 在无穷远处拥有合适的衰减性

$$U(x) \leq \frac{C}{|x|^{N-2}}, \quad \forall |x| \geq 1. \quad (9)$$

再利用标准的梯度估计, 我们可以得到

$$|\nabla U(x)| \leq \frac{C}{|x|^{N-1}}, \quad \forall |x| \geq 1. \quad (10)$$

受著名的文献 [1] 的启发, 并结合以上基态解 U 的渐进估计, 我们得到了在一定条件下方程 (4) 正的基态解的存在性.

2. 预备知识

在本文中, 我们定义

$$\dot{H}^1(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}, \quad \|u\|_{\dot{H}^1} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : |\nabla u| \in L^2(\Omega) \right\}, \quad \|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{2_{\alpha, \mu}^*} |u(y)|^{2_{\alpha, \mu}^*}}{|x|^\alpha |x-y|^\mu |y|^\alpha} dx dy,$$

$$|u|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{2_{\alpha, \mu}^*} |u(y)|^{2_{\alpha, \mu}^*}}{|x|^\alpha |x-y|^\mu |y|^\alpha} dx dy.$$

方程 (2) 对应的能量泛函为 $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, 其中

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{p} |u|_p^p - \frac{1}{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} |u|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*}. \quad (11)$$

方程 (6) 对应的能量泛函为 $E : \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, 其中

$$E(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{\dot{H}^1}^2 - \frac{1}{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} \|u\|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*}. \quad (12)$$

与 I 和 E 相关的 Nehari 流形记为

$$\mathcal{N} := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : 0 = J(u) = \langle I'(u), u \rangle = \|u\|^2 - \lambda |u|_p^p - |u|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} \right\}, \quad (13)$$

$$\mathcal{M} := \left\{ u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : 0 = F(u) = \langle E'(u), u \rangle = \|u\|_{\dot{H}^1}^2 - \|u\|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} \right\}. \quad (14)$$

3. 主要结果及证明

我们知道, 利用变分方法, 找一个方程的解等价于找它对应的能量泛函的临界点. 因此在本文中, 找方程 (2) 的正解等价于找能量泛函 (11) 的基态解. 但是, 对于有界区域上的临界椭圆方程, 存在的困难之一在于紧性缺失. 通过 Brezis 和 Nirenberg [1] 发展出来的方法, 我们知道紧性门槛值依赖于所对应的极限问题的能量, 即

$$m(\mathbb{R}^N) = \inf \{ E(u) : u \in \mathcal{M} \}. \quad (15)$$

为了证明能量泛函 $I(u)$ 满足 $(PS)_c$ 条件, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对于任意满足

$$I(u_n) \rightarrow c, \quad I'(u_n) \rightarrow 0 \quad (16)$$

的序列 $u_n \subset H_0^1(\Omega)$, 都存在一个收敛子列, 我们需要证明 (11) 所对应的基态解的能量严格小于它所对应的极限问题的能量 (见引理 9).

为了清楚地证明我们的主要结果, 本节首先介绍一些与变分法相关的重要引理.

引理 1. 假设 $N \geq 4, \alpha \geq 0, 0 < \mu < N, 0 < 2\alpha + \mu < 4, 2 < p < 2_{\alpha, \mu}^*$ 且 $\lambda > 0$, 则当 \mathcal{N} 为闭集且下有界时, 对任意 $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, 都存在唯一的 $t_u > 0$ 使得 $t_u u \in \mathcal{N}$.

证明. \mathcal{N} 显然是闭的. 由 Sobolev 不等式以及 (6) 式可知, 对任意 $u \in \mathcal{N}$, 都存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|u\|^2 = \lambda|u|_p^p + |u|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} \leq C \left(\|u\|^p + \|u\|^{2_{\alpha, \mu}^*} \right).$$

因为 $p > 2$ 且 $2_{\alpha, \mu}^* > 2$, 所以存在 $\delta > 0$ 满足

$$\|u\| \geq \delta, \quad \forall u \in \mathcal{N}, \quad (17)$$

则 \mathcal{N} 关于 0 有下界.

对任意 $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ 以及 $t > 0$, 记

$$g(t) := I(tu) = \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda t^p}{p} |u|_p^p - \frac{t^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*}}{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} |u|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*}.$$

那么可以得到

$$g'(t) = t \|u\|^2 - \lambda t^{p-1} |u|_p^p - t^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 1} |u|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} = t \left(\|u\|^2 - \lambda t^{p-2} |u|_p^p - t^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 2} |u|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} \right).$$

如果能够证明对任意满足 $g'(t_0) = 0$ 的 t_0 都有 $g''(t_0) < 0$, 那么 t_0 就是 $g'(t) = 0$ 的唯一解. 事实上,

$$\begin{aligned} g''(t_0) &= \|u\|^2 - \lambda(p-1)t_0^{p-2} |u|_p^p - (2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 1) t_0^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 2} |u|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} \\ &= \lambda(2-p)t_0^{p-2} |u|_p^p + (2 - 2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*) t_0^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 2} |u|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} \leq C\lambda(2-p)t_0^{p-2} |u|_p^p < 0. \end{aligned}$$

因此, 对任意 $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, 都存在唯一的 $t_u > 0$ 使得 $t_u u \in \mathcal{N}$ 且

$$I(t_u u) = \sup_{t > 0} I(tu).$$

证毕. □

引理 2. 在引理 1 的假设下, 如果 $\{u_n\}$ 为 I 的 $(PS)_c$ 序列, 那么 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界.

证明. 设 $\{u_n\}$ 为 I 的 $(PS)_c$ 序列, 即

$$I(u_n) = \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{p} |u_n|_p^p - \frac{1}{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} |u_n|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} = c + o(1),$$

$$J(u_n) = \|u_n\|^2 - \lambda |u_n|_p^p - |u_n|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} = o(1) \|u_n\|.$$

由假设 $2 < p < 2_{\alpha, \mu}^*$ 可以得到

$$c + o(1)(1 + \|u_n\|) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} - \frac{1}{p}\right) |u_n|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|^2,$$

所以 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. □

引理 3. 在引理 1 的假设下, 设 $\{u_n\}$ 为 $I|_{\mathcal{N}}$ 的 $(PS)_c$ 序列, 即 $I(u_n) \rightarrow c$, 且在 $H^{-1}(\Omega)$ 中有 $I'|_{\mathcal{N}}(u_n) \rightarrow 0$, 那么 $\{u_n\}$ 也为 I 的 $(PS)_c$ 序列.

证明. 由 (13) 式和 (17) 式, 对任意 $u \in \mathcal{N}$, 可以得到

$$\begin{aligned} \langle J'(u), u \rangle &= 2\|u\|^2 - \lambda p |u|_p^p - 2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{2_{\alpha, \mu}^*} |u(y)|^{2_{\alpha, \mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy \\ &\leq (2-p)\|u\|^2 \leq -(p-2)\delta^2 < 0. \end{aligned} \quad (18)$$

设 $\{\mu_n\}$ 是一列拉格朗日乘子序列满足

$$I'|_{\mathcal{N}}(u_n) = I'(u_n) + \mu_n J'(u_n).$$

取 $u_n \in \mathcal{N}$ 作为试验函数, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\mu_n J'(u_n) \rightarrow 0.$$

除此之外, 由 (18) 式可得当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\mu_n \rightarrow 0$. 与引理 2 中证明类似, 我们可以得到 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 因此, 在 $H^{-1}(\Omega)$ 中有 $I'(u_n) \rightarrow 0$.

定义

$$c_1 = \inf\{I(u) : u \in \mathcal{N}\}, \quad (19)$$

$$c_2 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{t > 0} I(tu), \quad (20)$$

$$c_3 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t)), \quad (21)$$

其中

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) \leq 0, \gamma(1) \neq 0\}.$$

类似于 (定理 4.2 [13]) 中的证明, 可以得到

$$c_1 = c_2 = c_3. \quad (22)$$

□

下面介绍在文献 (引理 2.2 [11]) 中证明的 Brezis-Lieb 引理.

引理 4. (Brezis-Lieb 引理) 设 $N \geq 3, \alpha \geq 0, 0 < \mu < N$, 若 $\{u_n\}$ 为 $L^{\frac{2Np}{2N-2\alpha-\mu}}(\mathbb{R}^N)$ 中有界序列, 且当 $N \rightarrow \infty$ 时在 \mathbb{R}^N 中几乎处处有 $u_n \rightarrow u$, 那么当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |u_n(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^\alpha |x-y|^\mu |y|^\alpha} dx dy - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|(u_n - u)(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |(u_n - u)(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^\alpha |x-y|^\mu |y|^\alpha} dx dy \\ \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |u(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^\alpha |x-y|^\mu |y|^\alpha} dx dy. \end{aligned} \quad (23)$$

由引理 4 可以得到以下的结果.

引理 5. 在引理 1 的假设下, 若 $c < m(\mathbb{R}^N)$, 则泛函 I 满足 $(PS)_c$ 条件.

证明. 设 $\{u_n\}$ 为 I 的 $(PS)_c$ 序列, 由引理 2 可得 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 设 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ 为序列 $\{u_n\}$ 的弱极限, 那么

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ 于 } H_0^1(\Omega); \quad u_n \rightarrow u_0 \text{ 几乎处处于 } \Omega; \quad u_n \rightarrow u_0 \text{ 于 } L^p(\Omega).$$

设 $v_n := u_n - u_0$, 则由 Brezis-Lieb 引理可得

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \|v_n\|^2 + \|u_0\|^2 + o(1), \\ |u_n|_p^p &= |v_n|_p^p + |u_0|_p^p + o(1), \\ |u_n|_{\alpha,\mu}^{2 \cdot 2_{\alpha,\mu}^*} &= |v_n|_{\alpha,\mu}^{2 \cdot 2_{\alpha,\mu}^*} + |u_0|_{\alpha,\mu}^{2 \cdot 2_{\alpha,\mu}^*} + o(1). \end{aligned}$$

进一步可以得到 $I'(u_0) = 0$, 即 u_0 为方程 (2) 的弱解. 由此可得

$$0 = \langle I'(u_0), u_0 \rangle = \|u_0\|^2 - \lambda |u_0|_p^p - |u_0|_{\alpha,\mu}^{2 \cdot 2_{\alpha,\mu}^*}.$$

因此,

$$\begin{aligned} I(u_0) &= \frac{1}{2} \|u_0\|^2 - \frac{\lambda}{p} |u_0|_p^p - \frac{1}{2 \cdot 2_{\alpha,\mu}^*} |u_0|_{\alpha,\mu}^{2 \cdot 2_{\alpha,\mu}^*} \\ &= \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) |u_0|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2_{\alpha,\mu}^*} \right) |u_0|_{\alpha,\mu}^{2 \cdot 2_{\alpha,\mu}^*} \geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

因为在 $H_0^1(\Omega)$ 中有 $v_n \rightharpoonup 0$ 且在 $L^p(\Omega)$ 中有 $v_n \rightarrow 0$, 所以

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle I'(v_n), v_n \rangle = \|v_n\|^2 - \lambda |v_n|_p^p - |v_n|_{\alpha,\mu}^{2 \cdot 2_{\alpha,\mu}^*} \\ &= \|v_n\|^2 - |v_n|_{\alpha,\mu}^{2 \cdot 2_{\alpha,\mu}^*} + o(1) = \langle E'(v_n), v_n \rangle + o(1) \end{aligned} \quad (25)$$

假设在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n \rightharpoonup u_0$, 即在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $v_n \rightharpoonup 0$. 将 v_n 延拓到全空间 \mathbb{R}^n 上, 设 v_n 在区域 Ω 外取值为 0. 由 (25) 式可以推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(v_n) \geq m(\mathbb{R}^N)$. 由 $I(u_n) = E(v_n) + I(u_0) + o(1)$ 以及

(24) 式可以得到

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} E(v_n) \geq m(\mathbb{R}^n),$$

这与 $c < m(\mathbb{R}^N)$ 矛盾. 因此, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有 $u_n \rightarrow u_0$. □

下面我们验证引理 5 中的条件. 不妨设当 ρ 充分小时 $B_{2\rho}(0) \subset \Omega$. 设 $\phi \in C_0^\infty$ 为截断函数, 在 $B_\rho(0)$ 上满足 $\phi \equiv 1$. 将 $B_{2\rho}(0)$ 和 $B_\rho(0)$ 简记为 $B_{2\rho}$ 和 B_ρ . 定义

$$U_\varepsilon(x) = \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad u_\varepsilon(x) = \varphi(x)U_\varepsilon(x),$$

其中 $U(x)$ 为 $m(\mathbb{R}^n)$ 的极小值点, 也就是方程 (5) 的解.

引理 6. 我们得到

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 dx + O(\varepsilon^{N-2})$$

证明. 因为

$$\nabla u_\varepsilon = \nabla \varphi \cdot U_\varepsilon + \varphi \cdot \nabla U_\varepsilon,$$

$$|\nabla u_\varepsilon|^2 = |\nabla \varphi|^2 U_\varepsilon^2 + 2\varphi U_\varepsilon \nabla \varphi \nabla U_\varepsilon + |\nabla U_\varepsilon|^2 \varphi^2.$$

从而有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla U_\varepsilon|^2 \varphi^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\varepsilon|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 dx, \\ \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 U_\varepsilon^2 dx &\leq C\varepsilon^{2-N} \int_{\rho < |x| < 2\rho} U^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \leq C\varepsilon^2 \int_{\frac{\rho}{\varepsilon} < |y| < \frac{2\rho}{\varepsilon}} U^2(y) dy \\ &\leq C\varepsilon^2 \int_{\frac{\rho}{\varepsilon} < |y| < \frac{2\rho}{\varepsilon}} |y|^{4-2N} dy = C\varepsilon^2 \int_{\frac{\rho}{\varepsilon}}^{\frac{2\rho}{\varepsilon}} r^{3-N} dr = O(\varepsilon^{N-2}), \\ \left| \int_{\Omega} \varphi U_\varepsilon \nabla \varphi \nabla U_\varepsilon dx \right| &\leq C \int_{\rho < |x| < 2\rho} U_\varepsilon |\nabla U_\varepsilon| dx \leq C\varepsilon^{1-N} \int_{\rho < |x| < 2\rho} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left| \nabla U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| dx \\ &\leq C\varepsilon \int_{\frac{\rho}{\varepsilon} < |y| < \frac{2\rho}{\varepsilon}} |y|^{3-2N} dy = C\varepsilon \int_{\frac{\rho}{\varepsilon}}^{\frac{2\rho}{\varepsilon}} r^{2-N} dr = O(\varepsilon^{N-2}). \end{aligned}$$

上述估计可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla U_\varepsilon|^2 \varphi^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 U_\varepsilon^2 dx + 2 \int_{\Omega} \varphi U_\varepsilon \nabla \varphi \nabla U_\varepsilon dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 dx + O(\varepsilon^{N-2}). \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho^c} (1 - \varphi^2) |\nabla U_\varepsilon|^2 dx &\leq \int_{B_\rho^c} |\nabla U_\varepsilon|^2 dx = \varepsilon^{-N} \int_{|x| > \rho} \left| \nabla U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx = \int_{|y| > \frac{\rho}{\varepsilon}} |\nabla U(y)|^2 dy \\ &\leq C \int_{|y| > \frac{\rho}{\varepsilon}} |y|^{2-2N} dy = C \int_{\frac{\rho}{\varepsilon}}^\infty r^{1-N} dr = O(\varepsilon^{N-2}). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla U_{\varepsilon}|^2 \varphi^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 U_{\varepsilon}^2 dx + 2 \int_{\Omega} \varphi U_{\varepsilon} \nabla \varphi \nabla U_{\varepsilon} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_{\varepsilon}|^2 \varphi^2 dx + O(\varepsilon^{N-2}) \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 dx + O(\varepsilon^{N-2}). \end{aligned}$$

结合以上两个估计, 引理 6 成立. □

引理 7. 我们得到

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_{\varepsilon}(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}} |u_{\varepsilon}(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}} |U(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right).$$

证明. 通过直接计算可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_{\varepsilon}(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}} |u_{\varepsilon}(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy &\geq \int_{B_{\rho}} \int_{B_{\rho}} \frac{|U_{\varepsilon}(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}} |U_{\varepsilon}(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U_{\varepsilon}(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}} |U_{\varepsilon}(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy - 2\mathbb{D} - \mathbb{E} = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}} |U(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy - 2\mathbb{D} - \mathbb{E}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{\frac{2N}{2N-2\alpha-\mu}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\rho}} \int_{B_{\rho}} \frac{|U_{\varepsilon}(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}} |U_{\varepsilon}(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy \right)^{\frac{2N}{2N-2\alpha-\mu}} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\rho}} U_{\varepsilon}(x)^{\frac{2N}{N-2}} dx \right) \left(\int_{B_{\rho}} U_{\varepsilon}(y)^{\frac{2N}{N-2}} dy \right) \\ &\leq O(\varepsilon^N) + O(\varepsilon^N) \int_{|z|>\frac{\rho}{\varepsilon}} U(z)^{\frac{2N}{N-2}} dz = O(\varepsilon^N) + O(\varepsilon^{2N}) = O(\varepsilon^N) \end{aligned}$$

因此, $\mathbb{D} \leq O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right)$. 并且

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\frac{2N}{2N-2\alpha-\mu}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\rho}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\rho}} \frac{|U_{\varepsilon}(x)|^{2^*_{\alpha,\mu}} |U_{\varepsilon}(y)|^{2^*_{\alpha,\mu}}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy \right)^{\frac{2N}{2N-2\alpha-\mu}} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\rho}} U_{\varepsilon}(x)^{\frac{2N}{N-2}} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\rho}} U_{\varepsilon}(y)^{\frac{2N}{N-2}} dy \right) \\ &= C \left(\int_{|y|>\frac{\rho}{\varepsilon}} U(y)^{\frac{2N}{N-2}} dy \right) \left(\int_{|z|>\frac{\rho}{\varepsilon}} U(z)^{\frac{2N}{N-2}} dz \right) = O(\varepsilon^{2N}). \end{aligned}$$

因此, $\mathbb{E} \leq O(\varepsilon^{2N-2\alpha-\mu})$. 由上述估计可得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_{\varepsilon}(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |u_{\varepsilon}(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |U(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right). \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_{\varepsilon}(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |u_{\varepsilon}(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy \leq \int_{B_{2\rho}} \int_{B_{2\rho}} \frac{|U_{\varepsilon}(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |U_{\varepsilon}(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U_{\varepsilon}(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |U_{\varepsilon}(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy + 2 \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2\rho}} \int_{\beta_{2\rho}} \frac{|U_{\varepsilon}(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |U_{\varepsilon}(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy \\ & + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2\rho}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2\rho}} \frac{|U_{\varepsilon}(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |U_{\varepsilon}(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |U(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy + 2\mathbb{F} + \mathbb{G} \end{aligned}$$

类似于对 \mathbb{D} 和 \mathbb{E} 的估计, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2\rho}} \int_{B_{2\rho}} \frac{|U_{\varepsilon}(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |U_{\varepsilon}(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy = O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right), \\ \mathbb{G} &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2\rho}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2\rho}} \frac{|U_{\varepsilon}(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |U_{\varepsilon}(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy = O\left(\varepsilon^{2N-2\alpha-\mu}\right). \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_{\varepsilon}(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |u_{\varepsilon}(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |U(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right) + O\left(\varepsilon^{2N-2\alpha-\mu}\right) \\ & = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |U(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right). \end{aligned}$$

结合以上两个估计, 可以得到

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_{\varepsilon}(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |u_{\varepsilon}(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2_{\alpha,\mu}^*} |U(y)|^{2_{\alpha,\mu}^*}}{|x|^{\alpha} |x-y|^{\mu} |y|^{\alpha}} dx dy + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right).$$

□

引理 8. 我们得到

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon}^p dx = d\varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}}\right)$$

其中

$$\begin{aligned} d &= \int_{\mathbb{R}^N} |U(y)|^p dy = \int_{B_1} |U(y)|^p dy + \int_{B_1^c} |U(y)|^p dy \leq C \int_{B_1} dy + \int_{B_1^c} |y|^{(2-N)p} dy \\ &= C \left(|B_1| + \int_1^\infty r^{(2-N)p+N-1} dr \right) \leq C_1. \end{aligned}$$

证明. 通过直接计算可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_\varepsilon^p dx &\geq \int_{B_\rho} U_\varepsilon^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} U_\varepsilon^p dx - \int_{B_\rho^c} U_\varepsilon^p dx \\ &\geq \varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |U(y)|^p dy - C \varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}} \int_{|y|>\frac{\rho}{\varepsilon}} |y|^{(2-N)p} dy \\ &= d \varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}}\right). \end{aligned}$$

另一方面,

$$\int_{\Omega} u_\varepsilon^p dx \leq \int_{B_{2\rho}} U_\varepsilon^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} U_\varepsilon^p dx - \int_{B_{2\rho}^c} U_\varepsilon^p dx = d \varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}}\right).$$

结合以上两个估计, 引理 8 成立. □

引理 9. 在引理 1 的假设下, 可以得到 $c_1 < m(\mathbb{R}^N)$.

证明. 我们知道存在唯一的 $t(\varepsilon) > 0$ 使得 $u_\varepsilon \in \mathbb{N}$, 也就是

$$\|u_\varepsilon\|^2 = \lambda t(\varepsilon)^{p-2} |u_\varepsilon|_p^p + t(\varepsilon)^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 2} |u_\varepsilon|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*}. \quad (26)$$

由引理 6 ~ 引理 8, 可以得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 dx + O(\varepsilon^{N-2}) &= \lambda t(\varepsilon)^{p-2} \left(d \varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}}\right) \right) \\ &\quad + t(\varepsilon)^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 2} \left(\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2_{\alpha, \mu}^*} |U(y)|^{2_{\alpha, \mu}^*}}{|x|^\alpha |x-y|^\mu |y|^\alpha} dx dy + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right) \right). \end{aligned}$$

通过对 ε 进行求导, 可以得到

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^{N-3}) &= \lambda(p-2)t'(\varepsilon)t(\varepsilon)^{p-3} \left(d \varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}}\right) \right) \\ &\quad + \lambda t(\varepsilon)^{p-2} \left(d \left(N - \frac{(N-2)p}{2} \right) \varepsilon^{N-\frac{(N-2)p}{2}-1} + O\left(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}-1}\right) \right) \\ &\quad + (2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 2) t'(\varepsilon)t(\varepsilon)^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 3} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2_{\alpha, \mu}^*} |U(y)|^{2_{\alpha, \mu}^*}}{|x|^\alpha |x-y|^\mu |y|^\alpha} dx dy + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right) \right) \\ &\quad + t(\varepsilon)^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 2} \cdot O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}-1}\right). \end{aligned}$$

从而有

$$t'(\varepsilon) = \frac{P(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)},$$

其中

$$P(\varepsilon) = O(\varepsilon^{N-3}) - \lambda t(\varepsilon)^{p-2} \left(d \left(N - \frac{(N-2)p}{2} \right) \varepsilon^{N - \frac{(N-2)p}{2} - 1} + O(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2} - 1}) \right) \\ - t(\varepsilon)^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 2} \cdot O(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2} + 1})$$

且

$$Q(\varepsilon) = \lambda(p-2)t(\varepsilon)^{p-3} \left(d\varepsilon^{N - \frac{(N-2)p}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}\right) \right) \\ + (2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 2) t(\varepsilon)^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 3} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2_{\alpha, \mu}^*} |U(y)|^{2_{\alpha, \mu}^*}}{|x|^\alpha |x-y|^\mu |y|^\alpha} dx dy + O(\varepsilon^{\frac{2N-2\alpha-\mu}{2}}) \right).$$

根据方程 (26) 及 $U \in \mathbb{M}$ 可得 $t(0) = 1$. 因此当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $t(\varepsilon) \rightarrow 1$.

从而若 $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$P(\varepsilon) = -\lambda d \left(N - \frac{(N-2)p}{2} \right) \varepsilon^{N - \frac{(N-2)p}{2} - 1} (1 + o(1)),$$

$$Q(\varepsilon) = (2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 2) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2_{\alpha, \mu}^*} |U(y)|^{2_{\alpha, \mu}^*}}{|x|^\alpha |x-y|^\mu |y|^\alpha} dx dy \right) (1 + o(1)).$$

因此,

$$t'(\varepsilon) = -\Lambda \left(N - \frac{(N-2)p}{2} \right) \varepsilon^{N - \frac{(N-2)p}{2} - 1} (1 + o(1)),$$

其中

$$\Lambda = \frac{\lambda d}{(2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* - 2) \|U\|_{\alpha, \mu}^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*}}.$$

从而有

$$t(\varepsilon) = 1 - \Lambda \varepsilon^{N - \frac{(N-2)p}{2}} (1 + o(1)),$$

$$t(\varepsilon)^2 = 1 - 2\Lambda \varepsilon^{N - \frac{(N-2)p}{2}} (1 + o(1)),$$

$$t(\varepsilon)^p = 1 - p\Lambda \varepsilon^{N - \frac{(N-2)p}{2}} (1 + o(1)),$$

$$t(\varepsilon)^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} = 1 - 2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^* \Lambda \varepsilon^{N - \frac{(N-2)p}{2}} (1 + o(1)).$$

因此,

$$\begin{aligned}
 c_1 &= c_2 \leq I(t(\varepsilon)u_\varepsilon) \\
 &= \frac{t(\varepsilon)^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx - \frac{\lambda t(\varepsilon)^p}{p} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^p dx - \frac{t(\varepsilon)^{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*}}{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_\varepsilon(x)|^{2_{\alpha, \mu}^*} |u_\varepsilon(y)|^{2_{\alpha, \mu}^*}}{|x|^\alpha |x-y|^\mu |y|^\alpha} dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 dx - \frac{1}{2 \cdot 2_{\alpha, \mu}^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^{2_{\alpha, \mu}^*} |U(y)|^{2_{\alpha, \mu}^*}}{|x|^\alpha |x-y|^\mu |y|^\alpha} dx dy - \frac{\lambda d \varepsilon^{N - \frac{(N-2)p}{2}}}{p} (1 + o(1)) \\
 &= m(\mathbb{R}^N) - \frac{\lambda d \varepsilon^{N - \frac{(N-2)p}{2}}}{p} (1 + o(1)) < m(\mathbb{R}^N).
 \end{aligned}$$

证毕. □

在本文中, 我们得到问题 (2) 存在一个正基态解的充分条件. 我们的主要结果陈述如下:

定理 1. 假设 $\lambda > 0$ 且 $2 < p < 2_{\alpha, \mu}^*$, 那么问题 (2) 存在一个正的基态解.

证明. 令 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$ 是能量泛函 I 的极小化序列. 引理 5 和引理 9 说明 $\{u_n\}$ 包含一个收敛的子列, 从而定理得证. □

4. 总结与展望

本文主要研究具有 Stein-Weiss 卷积部分的临界椭圆方程 Brezis-Nirenberg 型问题, 其中 Stein-Weiss 卷积部分是文章的创新点. 就此类 Brezis-Nirenberg 型问题, 我们还可以研究在不同扰动项 (例如低阶扰动、高阶扰动、凹凸非线性项) 下, 方程解的存在性和多解性. 此外, 我们还期望通过经典的 Pohožaev 恒等式, 获得方程正解的不存在性.

参考文献

- [1] Brézis, H. and Nirenberg, L. (1983) Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **36**, 437-477. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160360405>
- [2] Capozzi, A., Fortunato, D. and Palmieri, G. (1985) An Existence Result for Nonlinear Elliptic Problems Involving Critical Sobolev Exponent. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **2**, 463-470. [https://doi.org/10.1016/s0294-1449\(16\)30395-x](https://doi.org/10.1016/s0294-1449(16)30395-x)
- [3] Guo, Z. (2016) Ground States for a Nonlinear Elliptic Equation Involving Multiple Hardy-Sobolev Critical Exponents. *Advanced Nonlinear Studies*, **16**, 333-344. <https://doi.org/10.1515/ans-2015-5023>
- [4] Liu, F., Yang, J. and Yu, X. (2023) Positive Solutions to Multi-Critical Elliptic Problems. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **202**, 851-875. <https://doi.org/10.1007/s10231-022-01262-2>

-
- [5] Cao, D. and Peng, S. (2003) A Note on the Sign-Changing Solutions to Elliptic Problems with Critical Sobolev and Hardy Terms. *Journal of Differential Equations*, **193**, 424-434. [https://doi.org/10.1016/S0022-0396\(03\)00118-9](https://doi.org/10.1016/S0022-0396(03)00118-9)
- [6] Gao, F. and Yang, M. (2018) The Brezis-Nirenberg Type Critical Problem for the Nonlinear Choquard Equation. *Science China Mathematics*, **61**, 1219-1242. <https://doi.org/10.1007/s11425-016-9067-5>
- [7] Stein, E.M. and Weiss, G. (1958) Fractional Integrals on N-Dimensional Euclidean Space. *Journal of Mathematics and Mechanics*, **7**, 503-514. <https://doi.org/10.1512/iumj.1958.7.57030>
- [8] Liu, S. (2009) Regularity, Symmetry, and Uniqueness of Some Integral Type Quasilinear Equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, **71**, 1796-1806. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.01.014>
- [9] Lei, Y. (2013) Qualitative Analysis for the Static Hartree-Type Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **45**, 388-406. <https://doi.org/10.1137/120879282>
- [10] Du, L. and Yang, M. (2019) Uniqueness and Nondegeneracy of Solutions for a Critical Nonlocal Equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **39**, 5847-5866. <https://doi.org/10.3934/dcds.2019219>
- [11] Du, L., Gao, F. and Yang, M. (2022) On Elliptic Equations with Stein-Weiss Type Convolution Parts. *Mathematische Zeitschrift*, **301**, 2185-2225. <https://doi.org/10.1007/s00209-022-02973-1>
- [12] Melgaard, M., Yang, M. and Zhou, X. (2022) Regularity, Symmetry and Asymptotic Behaviour of Solutions for Some Stein-Weiss-Type Integral Systems. *Pacific Journal of Mathematics*, **317**, 153-186. <https://doi.org/10.2140/pjm.2022.317.153>
- [13] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. In: *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Vol. 24, Birkhäuser, Boston.