Advances in Education 教育进展, 2020, 10(1), 47-52
Published Online January 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2020.101008

Hans汉斯

A Note of the Teaching of Lagrange Mean Value Theorem

Chong Qiu

School of Mathematics and Physics, Huaiyin Institute of Technology, Huai'an Jiangsu
Email: qchsuda@163.com

Received: Dec. 7th, 2019; accepted: Dec. 20th, 2019; published: Dec. 27th, 2019

Abstract

In this paper, we summarize two different proofs of Lagrange Mean Value Theorem in teaching and reveal the motivation of these proofs to encourage students to think scientifically.

Keywords

Lagrange Mean Value Theorem, Algebra, Geometry

拉格朗日中值定理教学的思考

邱 崇

淮阴工学院数理学院，江苏 淮安
Email: qchsuda@163.com

收稿日期：2019年12月7日；录用日期：2019年12月20日；发布日期：2019年12月27日

摘 要

本文从教学实践中总结出两种有效的方法证明拉格朗日中值定理，进一步揭示了拉格朗日中值定理的思考过程，培养了学生科学的思维方式。

关键词

拉格朗日中值定理，代数，几何

文章引用: 邱崇. 拉格朗日中值定理教学的思考[J]. 教育进展, 2020, 10(1): 47-52.
DOI: 10.12677/ae.2020.101008

1. 引言

众所周知，拉格朗日中值定理是罗尔定理的推广。通常教科书上证明拉格朗日中值定理一般是通过构造辅助函数并利用罗尔定理给出证明，见[1] [2]。笔者在教学实践中感到，由于教材中对构造辅助函数的理由介绍得不多，学生容易产生为何如此构造的疑问。由于拉格朗日中值定理的重要性，关于如何更好地教授拉格朗日中值定理的研究一直在进行，见[3] [4]。笔者认为，作为教师应该有必要向学生尽量清楚地解释构造辅助函数的动机，展示证明背后的思考过程，以便学生更好地理解和接受。

经过深入考虑，笔者在教学中尝试带领学生从两种不同的角度考察拉格朗日中值定理，引导学生较为自然地得到两种证明。实践证明这样的尝试是有益的，不仅使得学生更加容易接受和理解拉格朗日中值定理，而且培养了学生正确的数学思维方法。

2. 罗尔定理

介绍拉格朗日中值定理之前我们通常带领学生回顾一下罗尔定理。首先给出罗尔定理的代数形式的命题。

定理 1 (Rolle) 设函数 $f(x)$ 满足：

(1) 在 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在 (a,b) 内可导；

(3) $f(a)=f(b)$，

则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

然后解释罗尔定理的几何意义：两端点处高度相等的光滑曲线内必有一点处的切线与 x-轴平行。如图 1 所示。

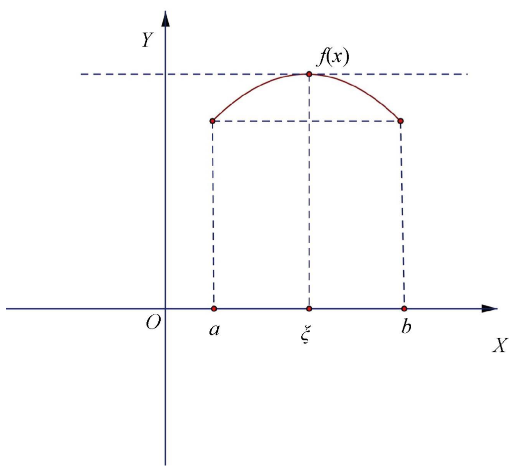

Figure 1. Rolle’s theorem
图 1. 罗尔定理

之后，由罗尔定理的几何意义出发容易进一步地提出如下问题：如果光滑曲线两端点高度不等会怎

样呢？由此引出拉格朗日中值定理。

3. 拉格朗日中值定理

定理 2(Lagrange) 设函数 $f(x)$ 满足

(1) 在 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在 (a,b) 内可导，

则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

拉格朗日中值定理的几何意义是：光滑曲线内必有一点处的切线平行于连接曲线两端点的直线。如图 2 所示。

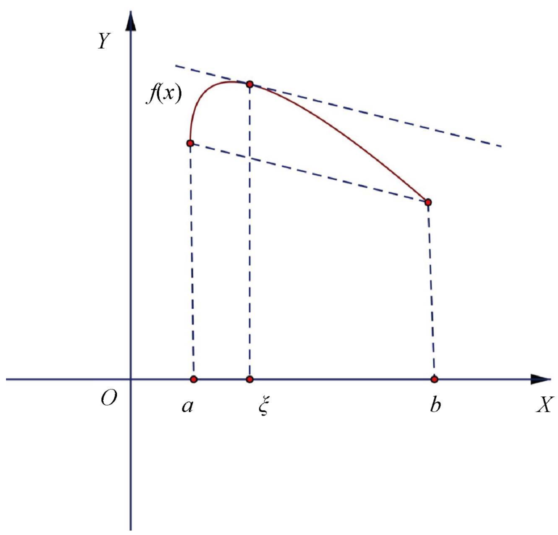

Figure 2. Lagrange mean value theorem
图 2. 拉格朗日中值定理

下面我们带领学生通过不同的角度给出两种证明思路。

4. 拉格朗日中值定理的证明

4.1. 证法一(平移法)

分析：我们很自然地会想到利用罗尔定理，显然问题的关键是怎样把原曲线不等高的两端变等高?一个想法是构造新的函数将原曲线两端点“拉平”。这可以通过先任取一条连接原曲线两端点的光滑曲线 $g(x)$，即 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $g(a)=f(a),g(b)=f(b)$。如图 3 所示。

然后将原曲线向下“平移 $g(x)$”得到新曲线 $h(x)=f(x)-g(x)$，从而“拉平”原曲线两端点。这时对新函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 使用罗尔定理可得，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $h'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=g'(\xi)$。于是我们只要选取一个合适的“平移曲线”使得 $g'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 即可。显然，由于连接原曲线两端点的线段上每点处的斜率均为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，因此可用此线段作为我们的“平移曲线”。

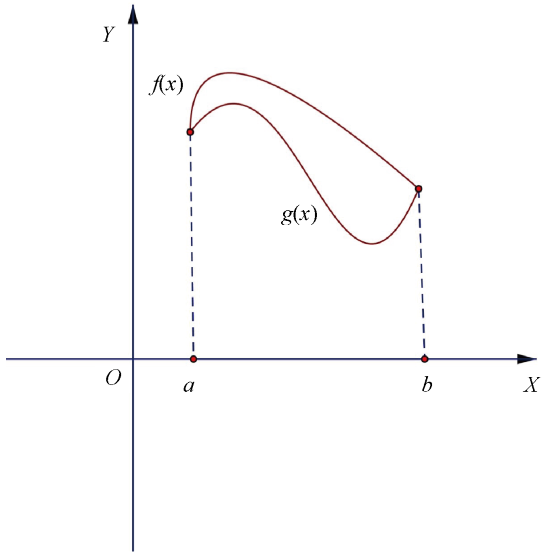

Figure 3. Shifted curve
图 3. 曲线平移

证明：令 $g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $g(a)=f(a), g(b)=f(b)$。设 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $h(a)=h(b)=0$。由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $h'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=g'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

证毕。

注：证法一是一般教科书上的经典证法，我们需要向学生指出该证法的思路关键是通过平移的方式将原曲线两端点“拉平”。这样就可以使得学生更加理解证明中构造辅助函数的背后动机，进而把握证法一的本质。

为了培养学生的探索精神和数学兴趣，我们在给出上述证明之后应该进一步地启发学生思考：是否有其它方式可以“拉平”原曲线两端点？由于学生中学时已经熟悉图形的平移和旋转，因此通常学生可以容易地猜想到通过旋转的方式也可以做到这一点。此时，我们应该趁机带领学生逐步探索旋转法证明拉格朗日中值定理。

4.2. 证法二(旋转法)

分析：因为原曲线两端点在原坐标系下不等高，因此如果将原坐标系进行合适地旋转即可使得原曲线两端点在旋转之后的坐标系下“等高”。如图 4 所示。

新坐标系下曲线显然满足罗尔定理。下面我们给出具体的证明。

证明：设曲线两端点 P 和 Q 所在直线 l 与 x-轴正方向夹角为 β，$0<\beta<\pi$。将原坐标系绕着原点逆时针旋转 $\alpha=\pi-\beta$ 得到新的坐标系。设平面上任意一点 M 在原坐标系下的坐标为 (x,y)，在新坐标系下的坐标为 (x',y')，则

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha, \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{cases}$$

特别地，原坐标系下的曲线 $(x,f(x))$ 在新坐标系下的参数方程为

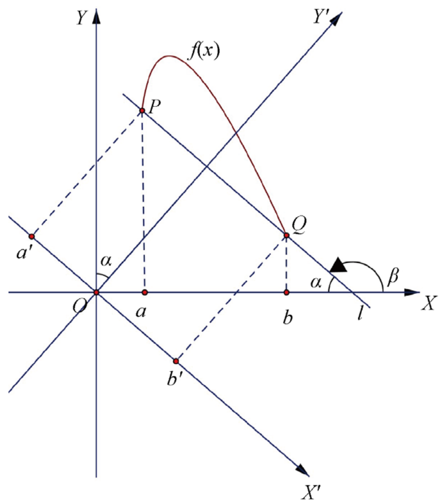

Figure 4. Coordinate rotation
图 4. 坐标旋转

$$\begin{cases} \bar{x} = x\cos\alpha - f(x)\sin\alpha, \\ \bar{y} = x\sin\alpha + f(x)\cos\alpha. \end{cases}$$

由于两端点 P 和 Q 所在直线 l 平行于 X'-轴，所以两端点在新坐标系下纵坐标相同，即 $\bar{y}(a) = \bar{y}(b)$。在原坐标系下构造辅助函数 $h(x) = \bar{y}(x) = x\sin\alpha + f(x)\cos\alpha$，显然 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $h(a) = h(b)$。由罗尔定理得，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $h'(\xi) = 0$，即 $\sin\alpha + f'(\xi)\cos\alpha = 0$。所以，

$$f'(\xi) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha = \tan\beta = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}。$$

证毕。

注：通常笔者提供旋转法的思路，并鼓励学生自己课后尝试探索给出旋转法的证明，以增强学生的独立思考能力和自信心。

5. 教学方法

由于拉格朗日中值定理的教学内容与罗尔定理有密切联系，笔者认为应该在回顾罗尔定理的基础上合理使用探究式教学方法进行教学方可取得较为良好的教学效果。

(1) 创设情景

首先教师应该简洁地回顾罗尔定理的内容并指出其几何意义。然后启发学生思考探究当曲线两端点高度不等时结论会如何变化。

(2) 猜测结论

学生一般可以从图像上猜测出正确的结论即曲线上存在一点处切线与两端点连线平行。之后教师应该引导学生将上述结论用精确的代数语言表达成一个待证的数学命题即拉格朗日中值定理。

(3) 尝试证明

教师应当带领学生分析证明思路，通过与罗尔定理进行比较首先给出平移法的思路，然后引导学生尝试写出正确的证明。为了加强学生的创新思维能力，教师应该不满足于一种证明方法。教师应该及时点评平移法的本质思路，并激发学生思考新的证明方法。教师可以提示旋转法的大概思路并将具体证明留给学生独立完成。

6. 结论

本文介绍了笔者课堂教授拉格朗日中值定理时的一点思考，着重于向学生分析经典证明背后的动机，从而比较自然地给出辅助函数的构造方式，便于学生深刻把握教材中的经典证明的本质。同时，鼓励学生发散式思考，将初中知识与新知识联系起来，激发学生的学习兴趣，培养学生的创新精神，让学生初步感受科学研究的魅力。

基金项目

本文得到国家自然科学基金项目(11771319)、江苏省自然科学基金青年基金(BK20170590)、江苏省高校自然科学研究面上项目(16KJB110020)和江苏政府留学奖学金的资助和支持。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学(上) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
[2] 华东师范大学数学系. 数学分析(上) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
[3] 余惠霖. 拉格朗日中值定理证明中若干辅助函数的构造[J]. 广西民族师范学院学报, 2011, 28(3): 12-14.
[4] 赵晓辉, 杨广武. 关于微分学中值定理的一些注解和新证法[J]. 河北北方学院学报, 2019, 35(9): 6-10.