Advances in Education 教育进展, 2020, 10(1), 39-46
Published Online January 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2020.101007

Discussion on Case Reform of Higher Mathematics Teaching

—Examples of Monotone Bounded Sequence

Zizun Li

School of Mathematics and Statistics, Nanning Normal University, Nanning Guangxi
Email: zzlqfnu@163.com

Received: Dec. 7th, 2019; accepted: Dec. 20th, 2019; published: Dec. 27th, 2019

Abstract

The monotone bounded sequence has a limit, and it will be more helpful to master the knowledge if the examples given are easy to understand and accept. In this paper, we give a monotone increasing sequence with upper bound consisting of the area and perimeter of a regular polygon within a unit circle and two monotone decreasing sequences with lower bound, and give a strict proof of monotone and boundedness of each sequence.

Keywords

Discussion on the Reform of Teaching Cases, Monotone Bounded Sequence, Monotonic Increase, Monotonic Decrease

高等数学教学案例改革探讨

——单调有界数列引例

李自尊

南宁师范大学，数学与统计学院，广西 南宁
Email: zzlqfnu@163.com

收稿日期：2019年12月7日；录用日期：2019年12月20日；发布日期：2019年12月27日

摘 要

单调有界数列存在极限，如果给出的单调有界数列的例子容易理解和接受对大家掌握知识更有帮助。我

文章引用: 李自尊. 高等数学教学案例改革探讨[J]. 教育进展, 2020, 10(1): 39-46.
DOI: 10.12677/ae.2020.101007

们给出了单位圆内接正多边形的面积和周长组成的单调递增有上界数列，两个单调递减有下界的数列，并给出了每个数列单调性和有界性的严格证明。

关键词

教学案例改革探讨，单调有界数列，单调增加，单调减少

1. 引言

在数学分析或高等数学中，单调有界数列是一类极限存在的数列，在给出单调有界定理后，课本上给出的例子都是构造出来的数列，这些例子不容易被学生理解，如果能从学生已知且相对熟悉的实际问题引出单调有界的数列，更容易使得学生理解和掌握定理的内容。文献[1] 36 页第 3 节中给出了数列极限存在的条件，其中单调有界定理后面给出了三个例子，这三个例子中的数列均为单调递增有上界的。例 1 利用定理的结果判断出数列是收敛的，例子为，

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 1.$$

证明： a_n 收敛。例 2 除了判断出数列收敛以外还给出了数列的极限。即为，证明数列

$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}},$$

收敛，并求其极限。第三个例子为，证明数列

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{1}$$

极限存在。文献[2]第 68 页以公理的形式给出：单调有界数列存在极限。公理后面给了四个例子，其中一个数列单调增加有上界，三个例子中的数列为单调减少有下界的情况。文献[3] [4]中都以准则 II 的形式给出的，准则后面分别有两个例子和一个例子，其中有一个共同的例子和(1)相同。

以上文献中的例子非常恰当，但由于例子没有给出现实的直观背景，难度似乎大了些，学生不好理解。如果我们给出学生已知且熟悉的单调有界数列的例子，学生学习起来更加有兴趣，也会给学生一种学以致用的感觉，并且会给学生信心，在后面的学习中再判断数列极限存在性的时候，就会快速想到单调有界定理或准则 II。

2. 四个单调有界数列

为了使学生便于理解和接受单调有界数列存在极限这一定理，我们从四个大家熟悉的案例中找出了四个单调有界的数列，并对数列的单调性和有界性给出了严格地证明。其中对第一和第二个引例的单调性的证明用到了一定的不等式放缩技巧，也为大家学习和利用不等式放缩提供了一定的方法。

引例 1 我国古代数学家刘徽利用圆内接正多边形来推算圆的面积－割圆术，我们给出了单位圆内接正多边形的面积构成的数列 S_n，并证明了 S_n 为单调增加有上界的数列，则可利用单调有界定理判断出数

列存在极限。

图 1 给出了圆内接正三角形和圆内接正四边形，其中正三角形 Δ_{ABC} 的面积为三角形 Δ_{AOB} 的面积的三倍，且圆心角 $\angle AOB$ 弧度为 $\frac{2\pi}{3}$，则可得三角形 Δ_{ABC} 的面积 S_3 为

$$S_3 = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), \tag{2}$$

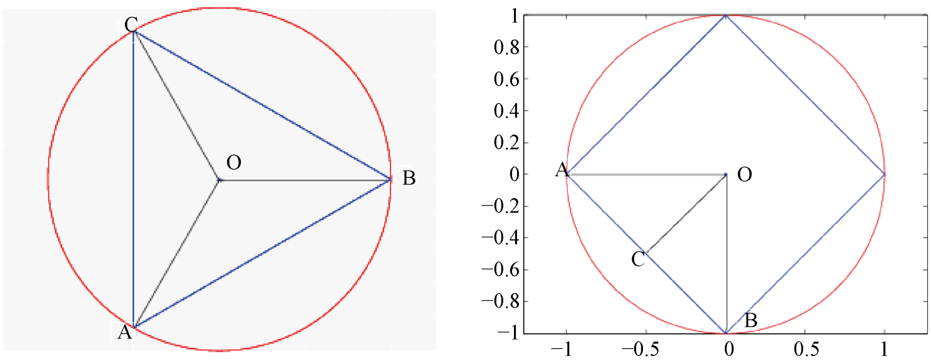

Figure 1. The circle is inscribed with an equilateral triangle and an equilateral quadrilateral
图 1. 圆内接正三角形和圆内接正四边形

图 1 正四边形的面积为三角形 Δ_{AOB} 面积的四倍，且圆心角 $\angle AOB$ 弧度为 $\frac{2\pi}{4}$，可求得正四边形的面积为

$$S_4 = \frac{4}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right). \tag{3}$$

由(2)，(3)式和数学归纳法，可以得到圆内接正 n 边形的面积为

$$S_n = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right), n \ge 3, \tag{4}$$

由(4)可得

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right). \tag{5}$$

方法 1 证明数列 S_n 单调递增

由(4)和(5)可得

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \frac{n}{2}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \\ &= \frac{n}{2}\left(2\cos\frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)}\sin\frac{-\pi}{n(n+1)}\right) + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n+1} \\ &> n\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)}\right)\frac{-\pi}{n(n+1)} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n+1} \\ &= \frac{-\pi}{n+1}\cos\frac{\pi(2n+1)}{n(n+1)} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n+1} \\ &> \frac{-\pi}{n+1}\cos\frac{2\pi}{n+1} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n+1}, \end{aligned} \tag{6}$$

要使得(6)式大于零，即为

$$\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n+1}-\frac{\pi}{n+1}\cos\frac{2\pi}{n+1}>0, \tag{7}$$

(7)式可变形为

$$\frac{n+1}{2\pi}\frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{\cos\frac{2\pi}{n+1}}=\frac{n+1}{2\pi}\tan\frac{2\pi}{n+1}>\frac{n+1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{n+1}=1, \tag{8}$$

由(6)，(8)可得

$$S_{n+1}-S_n>0. \tag{9}$$

由(9)可得数列 S_n 为单调增加数列，且 $S_n=\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}<\frac{n}{2}\frac{2\pi}{n}=\pi$，所以 S_n 单调增加有上界，可得数列 S_n 存在极限。由重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，可求得 S_n 极限为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\pi\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}=\pi.$$

方法 2 证明数列 S_n 单调递增

令 $f(x)=\frac{x}{2}\sin\frac{2\pi}{x},x\geq3$。则

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\cos\frac{2\pi}{x},\\f''(x)&=-\frac{2\pi^2}{x^3}\sin\frac{2\pi}{x}<0,\end{aligned} \tag{10}$$

由(10)得 $f'(x)$ 为单调递减函数，且由

$$f'(3)=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}, \tag{11}$$

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0, \tag{12}$$

由(11) (12)可得 $f'(x)>0,x\in[3,+\infty)$。所以，$f(x),x\in[3,+\infty)$ 为单调递增的函数，即 S_n 为单调递增的数列。

方法 3 证明数列 S_n 单调递增

令 $f(x)=\frac{x}{2}\sin\frac{2\pi}{x},x\in[n,n+1],n\geq3$。则 $f(x)$ 满足拉格朗日(微分)中值定理的条件，可得

$$\begin{aligned}S_{n+1}-S_n&=f(n+1)-f(n)\\&=f'(\xi)=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{\xi}-\frac{\pi}{\xi}\cos\frac{2\pi}{\xi},\xi\in(n,n+1),\end{aligned} \tag{13}$$

而 $f''(\xi)=-\frac{2\pi^2}{\xi^3}\sin\frac{2\pi}{\xi}<0$，所以

$$f'(\xi) \geq f'(n+1) = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n+1} - \frac{\pi}{n+1}\cos\frac{2\pi}{n+1}, \tag{14}$$

则(14)化为(6)，所以由方法 1 可得 $S_{n+1} - S_n > 0$，即 S_n 为单调递增数列。

方法 4 证明数列 S_n 单调递增

令 $f(x) = \frac{x}{2}\sin\frac{2\pi}{x}, x \geq 3$。则

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{2\pi}{x}, \tag{15}$$

当 $x \in [3,4]$ 时，由于 $\sin\frac{2\pi}{x} > 0, \cos\frac{2\pi}{x} < 0$，则可得 $f'(x) > 0$。而

$$\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}\cos\frac{2\pi}{x}} = \frac{x}{2\pi}\tan\frac{2\pi}{x}, \tag{16}$$

当 $x \in (4, +\infty)$ 时，$\frac{2\pi}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，则可得

$$\tan\frac{2\pi}{x} > \frac{2\pi}{x},\ \frac{2\pi}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \tag{17}$$

由(15)，(16)，(17)可得 $f'(x) > 0$。

所以当 $x \geq 3$，S_n 为单调递增数列。

引例 2 圆内接正 $n(n \geq 3)$ 边形的周长所组成的数列 l_n 为单调递增有上界的数列。我们可以求得 $l_n = 2n\sin\frac{\pi}{n}$，则

$$\begin{aligned} l_{n+1} - l_n &= 2n\left(\sin\frac{\pi}{n+1} - \sin\frac{\pi}{n}\right) + 2\sin\frac{\pi}{n+1} \\ &= 2n\left(2\cos\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}\sin\frac{-\pi}{2n(n+1)}\right) + 2\sin\frac{\pi}{n+1} \\ &> -2n\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}\right)\frac{\pi}{2n(n+1)} + 2\sin\frac{\pi}{n+1} \\ &= -\frac{2\pi}{n+1}\cos\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} + 2\sin\frac{\pi}{n+1} \\ &> -\frac{2\pi}{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1} + 2\sin\frac{\pi}{n+1}, \end{aligned} \tag{18}$$

要使(18)大于零，即为

$$2\sin\frac{\pi}{n+1} - \frac{2\pi}{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1} > 0, \tag{19}$$

而

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{2\pi}{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}} = \frac{n+1}{\pi}\tan\frac{\pi}{n+1} > \frac{n+1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n+1} = 1. \tag{20}$$

由(20)可得(19)成立.则可得数列$\{l_n\}$为单调递增数列，而

$$2n\sin\frac{\pi}{n} < 2n\frac{\pi}{n} = 2\pi, \tag{21}$$

由(21)可得数列$\{l_n\}$为单调增加有上界的数列，可得极限为

$$\lim_{n\to\infty} 2n\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} 2n\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi.$$

引例 3 曲边三角形的面积。

计算由曲线$y = x^2$和直线$y = 0, x = 1$围成的曲边三角形的面积S，如图 2 所示。由于为曲边三角形，不能直接使用三角形面积公式计算其面积。我们用分点$\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},(n>1)$将区间$[0,1]$分为长度相等的$n$个小段，以每个小段为底作矩形，包含在曲边三角形内，每个矩形宽为$\frac{1}{n}$，高分别为每个区间的右端点对应的函数值，即为$\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\left(\frac{3}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2,1$，则这些小矩形面积之和，即台阶形面积为

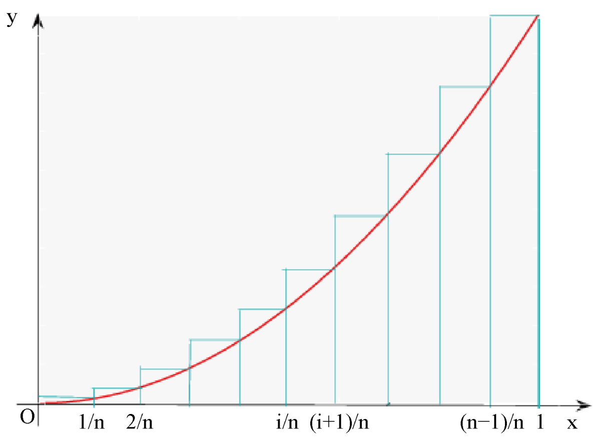

Figure 2. The relationship between the area of a curved triangle and the area of a stepped rectangle

图 2. 曲边三角形的面积与台阶形矩形的面积之间的关系

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{2^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}+1\cdot\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3}\left[1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\right] \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}, \end{aligned} \tag{22}$$

即

$$s_n = \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}, \tag{23}$$

则s_{n+1}为

$$s_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6(n+1)^2}, \tag{24}$$

由(23) (24)可得

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6(n+1)^2} - \frac{1}{6n^2} = \frac{-n^2 - 3n - 1}{n^2(n+1)^2} < 0, \tag{25}$$

由(25)可得$\{s_n\}$为单调递减数列，且满足$s_n > \frac{1}{3}$，s_n即为单调减少有下界的数列，可以求得其极限为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

引例 4《庄子·天下篇》引用过一句话：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，其含义是：一根长为一尺的木棒，每天截下一半，这样的过程可以无限制地进行下去，如图 3 所示。

Figure 3. A foot of wood is cut in half
图 3. 一尺之棰截取二分之一后的图形

把每天截下部分的长度列出，可得数列为$A_n = \frac{1}{2^n}$，由

$$A_n = \frac{1}{2^n}, \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2},$$

可得，A_n为单调递减的数列，且由$A_n > 0$，得A_n为有下界的数列，所以A_n的极限存在，可以求得其极限为

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$

以上四个例子大家中学时都已经接触到，但中学时并没有给出相应的数列，但我们从直观上很容易判断随着圆内接正多边形的边数不断增加，面积会不断增加，且面积越来越接近圆的面积，但不会超过圆的面积。我们从中找到了单调增加有上界数列的情况。其中第三个例子，当高分别取每个区间左端点

的时候对应单调增加有上界的数列 $A_n = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right)$。同学们通过这些实际的例子更容易学以致用，同时，这些例子也增加了学习的趣味性，使得定理的应用不那么单调，也使得教学内容真正为培养应用型人才转变。

基金项目

国家自然科学基金项目(11561019)，南宁师范大学 2019 年科研启动项目。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析上册[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2010.
[2] 刘玉琏, 傅沛仁, 林玎, 苑德馨, 刘宁. 数学分析讲义上册[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
[3] 张卓奎, 王金金. 高等数学上册[M]. 第三版. 北京: 北京邮电大学出版社, 2017.
[4] 同济大学数学系. 高等数学上册[M]. 第七版. 北京: 高等教育出版社, 2014.