Advances in Education 教育进展, 2020, 10(4), 482-487
Published Online July 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2020.104082

Hans汉斯

Research on the Calculation Method of Indefinite Integral of Trigonometric Function

Zhanyou Ma[1], Li Chen[2]

[1]School of Science, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei
[2]Liren College, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei
Email: mzhy55@163.com, chen----li@163.com

Received: Jun. 14th, 2020; accepted: Jun. 29th, 2020; published: Jul. 6th, 2020

Abstract

In this paper, the concrete method of indefinite integral of trigonometric function will be summarized on the basis of the basic method of indefinite integral. Through a classical example, it shows the main steps of various methods, and explains that the problem of indefinite integral is often solved by many methods. In the process of solving the problem in practice, the method of solving the problem should be determined according to the actual integral problem.

Keywords

Trigonometric Function, Indefinite Integral, Integration by Substitution, Integration by Parts

关于三角函数的不定积分计算方法的研究

马占友[1]，陈　利[2]

[1]燕山大学理学院，河北 秦皇岛
[2]燕山大学里仁学院，河北 秦皇岛
Email: mzhy55@163.com, chen----li@163.com

收稿日期：2020年6月14日；录用日期：2020年6月29日；发布日期：2020年7月6日

摘　要

本文在不定积分的基本方法的基础上，归纳总结并探究出关于三角函数的不定积分的具体方法。通过经典例题，展示各种方法的主要解题步骤，并说明了不定积分的问题往往会通过多种方法求解，在实际解决问题过程中，要根据实际题目来确定解题方法。

文章引用: 马占友, 陈利. 关于三角函数的不定积分计算方法的研究[J]. 教育进展, 2020, 10(4): 482-487.
DOI: 10.12677/ae.2020.104082

关键词

三角函数，不定积分，换元积分法，分部积分法

1. 引言

在高等数学中函数的不定积分的主要方法有直接积分法、第一类换元积分法、第二类换元积分法及分部积分法等[1] [2] [3]。

在掌握了基本积分公式及上述方法的基础上，可以求解出绝大部分函数的不定积分，但也存在少数函数的不定积分不易求得，需将上述方法、一些重要公式及技巧相结合，使得问题容易解决。

2. 三角函数积分方法的探究

由于三角函数的公式非常多，从而使得关于这类函数的积分将变得更加困难。本文将总结出关于三角函数的不定积分的规律，主要的积分方法如下：

1) 第一类换元积分法(凑微分法)。适用于 $\sin^{2k+1}x\cos^{n}x$ 、$\sin^{n}x\cos^{2k+1}x$ 、$\tan^{n}x\sec^{2k}x$ 、$\tan^{2k-1}x\sec^{n}x$ 等形式的函数积分，例如

$$\int\sin^{2020}x\cos^{3}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2021}\sin^{2021}x-\frac{1}{2023}\sin^{2023}x+C.$$

其中这里的 C 和后面将出现的均为任意实数。

2) 降幂方法(二倍角公式方法)。适用于 $\sin^{2k}x\cos^{2l}x$ 型函数的积分，主要利用 $\sin^{2}x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 和 $\cos^{2}x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ 化成 $\cos 2x$ 函数，例如

$$\int\cos^{2}x\mathrm{d}x=\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{2}+C.$$

3) 分部积分法。适用于一类幂函数与三角函数、或幂函数与反三角函数的积分，例如

$$\int x\sin x\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C.$$

4) 积化和差方法。适用于不同角的三角函数乘积的积分，例如

$$\int\sin 2x\cos 3x\mathrm{d}x=\frac{\cos x}{2}-\frac{\cos 5x}{10}+C.$$

5) 利用和“1”有关的公式的方法。通常利用公式 $\sin^{2}x+\cos^{2}x=1$ 、$\sec^{2}x=\tan^{2}x+1$ 、$\csc^{2}x=\cot^{2}x+1$ 化简被积表达式，例如

$$\int\frac{\sin^{2}x}{\cos^{3}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C.$$

6) 万能公式法。适用于上述方法不易求解出的关于三角函数的有理函数积分的问题，例如

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

7) 商的不定积分公式[4]

定理： 设函数 $u(x),v(x)$ 在区间 I 上有连续导数，且在区间 I 上 $v(x)\neq 0, v'(x)\neq 0$，则有

$$\int \frac{u}{v}\mathrm{d}x=\int \frac{u'}{v'}\mathrm{d}x-\int\left(\frac{u}{v}\right)'\frac{v}{v'}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

例如

$$\int \frac{x+\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\frac{x+\sin x}{\sin x}-x\cot x+C.$$

8) 其他技巧。通常在被积表达式中同加减某一项、同乘除某一项、或者通过积分抵消掉不易积分得到的积分等方法，例如

$$\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}+C.$$

3. 经典实例

本文将依据上述方法以及结合使用，对[1]中的一道关于三角函数的有理函数的不定积分

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x,$$

给出七种不同解法。

解法 1 将函数化成关于 $\frac{x}{2}$ 的三角函数，以及 $\sec^2\frac{x}{2}=\tan^2\frac{x}{2}+1$ 并利用第一类换元积分法，可得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x&=\int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x\\
&=\int \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x\\
&=\int \frac{-\sec^2\frac{x}{2}+\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+1}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x\\
&=\int \frac{-\sec^2\frac{x}{2}+\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x\\
&=\int \frac{-2}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+x\\
&=\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+x+C
\end{aligned}$$

解法 2 将函数化成关于 $\frac{x}{2}$ 的三角函数，并利用第一类换元积分法和分部积分法结合，可得

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$\overset{u=\frac{x}{2}}{=\!=}\int\frac{4\tan u}{(1+\tan u)^2}\mathrm{d}u$$

$$=4\int\frac{\tan u}{-\sec^2 u}\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\tan u}\right)$$

$$=-4\int\sin u\cos u\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\tan u}\right)$$

$$=-4\frac{\sin u\cos u}{1+\tan u}+4\int\frac{\cos^2 u-\sin^2 u}{1+\tan u}\mathrm{d}u$$

$$=-4\frac{\sin u\cos u}{1+\tan u}+4\int\cos u(\cos u-\sin u)\mathrm{d}u$$

$$=-4\frac{\sin u\cos u}{1+\tan u}+\sin 2u+\cos 2u+2u+C$$

$$=\sec x-\tan x+x+C$$

解法 3 通过将分子同时加减 1 的技巧，然后利用第一类换元积分法，可得

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x+1-1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=x-\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=x-\int\frac{1}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x=x-\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=x-\int\frac{2}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+x+C$$

解法 4 利用公式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，基本积分公式，可得

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x)-\int\tan^2 x\mathrm{d}x$$

$$=\sec x-\tan x+x+C$$

解法 5 先将 $\sin x$ 凑到微分里，再利用分部积分法，可得

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x&=-\frac{\cos x}{1+\sin x}+\int\frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{\cos x}{1+\sin x}+\int\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{\cos x}{1+\sin x}+\int\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=\sec x-\tan x+x+C\end{aligned}$$

解法 6 利用万能公式将被积函数化成关于 u 的有理函数积分，令 $u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$，则

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$

通过有理函数积分，可得

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x&=\int\frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u\\&=\int\frac{4u}{(1+u)^2(1+u^2)}\mathrm{d}u\\&=\int\frac{-2}{(1+u)^2}\mathrm{d}u+\int\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u\\&=\frac{2}{1+u}+2\arctan u+C\\&=\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+x+C\end{aligned}$$

解法 7 令 $u=\sin x$，$v=1+\sin x$，利用商的不定积分公式(1)，可得

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x&=\int\frac{\cos x}{\cos x}\mathrm{d}x-\int\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)'\frac{1+\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x\\&=x-\int\frac{1+\sin x}{\cos x}\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)\\&=x-\frac{1+\sin x}{\cos x}\frac{\sin x}{1+\sin x}+\int\sec x\tan x\mathrm{d}x\\&=\sec x-\tan x+x+C\end{aligned}$$

上述结果形式上有一点差别，但是经过三角函数的公式进行简化，可见这些结果之间只差一个常数，这也正是不定积分的结果不是唯一的原因所在。

4. 结论

通过上述经典例子的求解看出，在不定积分的计算过程中要求我们善于总结和归纳，熟练掌握各种方法和技巧，尽量做到换元积分法和分部积分法等结合使用，并融会贯通。计算不定积分的选择方法的顺序通常为：基本公式、第一类换元积分法、分部积分法、第二类换元积分法、以及一些技巧等等。只有轻松地应对不定积分的计算，才能为后面的重积分和线面积分的学习打下良好的基础。

基金项目

国家自然科学基金(61973261)；河北省高等教育教学改革研究与实践项目(2019GJJG090)；燕山大学教学研究与改革项目(2018ZXKC01)。

参考文献

[1] 同济大学数学教研室. 高等数学: 上册[M]. 第七版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 194-216.

[2] 袁学刚, 张友. 高等数学: 上册[M]. 北京: 清华大学出版社, 2017: 183-202.

[3] 伍胜健. 数学分析: 第一册[M]. 北京: 北京大学出版社, 2009: 245-269.

[4] 李小斌, 朱佑彬. 函数的商的不定积分[J]. 高等数学研究, 2019, 22(6): 1-2.