

# 浅谈Geogebra在大学数学教学中的应用

张 杰

北京理工大学数学与统计学院, 北京

Email: jiezhang@bit.edu.cn

收稿日期: 2020年11月2日; 录用日期: 2020年11月13日; 发布日期: 2020年11月20日

---

## 摘 要

本文站在丰富课堂教学方式、提高学生参与课堂教学的角度上, 分别利用高等数学和线性代数教学中的两个案例, 对数学动态软件Geogebra在大学数学课堂教学中的作用做了简单分析。并为教师在课堂教学中使用Geogebra软件提出了具体的方案。这对我们目前的大学双一流建设、以及翻转课堂教学提供了一个有效的工具。

## 关键词

Geogebra, 大学数学, 动态软件

---

# On Application of Geogebra in College Mathematics Teaching

Jie Zhang

School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing

Email: jiezhang@bit.edu.cn

Received: Nov. 2<sup>nd</sup>, 2020; accepted: Nov. 13<sup>th</sup>, 2020; published: Nov. 20<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

In this paper, from the perspective of enriching teaching methods and improving students' participation in classroom teaching, we make a simple analysis of the role of the mathematical dynamic software Geogebra in college mathematics teaching by considering two cases in calculus and linear algebra teaching respectively. We also give a method for teachers on how to use Geogebra software in classroom teaching. It provides an effective tool for the construction of double first-class university and flipped classroom teaching.

## Keywords

Geogebra, College Mathematics, Dynamic Software

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 现今高校数学教育面临的一些问题

目前广大数学教师上课用的主要方式为板书、多媒体课件、或者两者相结合的模式。而常用的制作多媒体课件的工具为 PowerPoint、和几何画板等，但 PowerPoint 不太适合制作数学动态课件，用几何画板、Mathematica、或者 Matlab 制作数学课件，不仅需要熟悉其软件的操作使用，而且要有较强的编程能力，一般教师对此望而却步。因此，目前大部分大学教师的课堂上缺乏鲜活、直观的数学例子，也使得大学数学教学变成了定义、定理等简单的形式，上课缺乏互动，对于翻转课堂的实现也不是特别容易。如果在大学数学课堂上，使用动态交互软件 Geogebra 与知识点相结合，将会大大改变这个状况。

## 2. Geogebra 在国内大学课堂教学发展情况

Geogebra (=Geometry + Algebra)是一个结合几何(Geometry)与代数(Algebra)的动态数学软件，Geogebra 软件操作简单，可以直接在命令框中输入命令作图、计算，可以实现几何图形与代数方程的同步变化。另外，Geogebra 软件还具备符号计算、微积分、线性代数计算、统计等功能。Geogebra 软件曾获多项国际教育软件大奖，在欧美和我国的台湾等地区早已广泛使用。目前在万方和知网平台检索显示从 2010 年 1 月至近内有近 100 篇相关论文、几十篇学位论文的研究。然而真正将 Geogebra 软件引入到课堂教学，并不是一个很常见的现象。例如，作者在[1] [2] [3]中分别将 Geogebra 软件引入到了中学教学中，作者[4] [5]中将 Geogebra 软件引入到了大学教学中。

### 1) Geogebra 国内外发展比较

Geogebra 软件是由美国佛罗里达州亚特兰大的数学教授 Markus Hohenwarter 所设计的，在[6]可以了解更多关于该软件在功能，教学方面的应用。相比于国外对 Geogebra 软件的使用情况而言，国内的使用是相对较少的。通过下图 1 中，在百度和必应网站搜索 Geogebra 关键词所得的结果数就可以简单验证这一点。

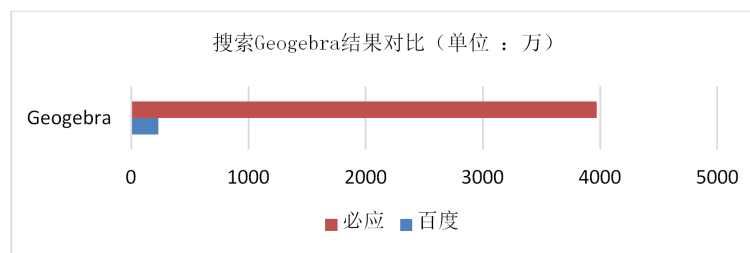


Figure 1. Comparison of searching Geogebra by using Baidu and Bing

图 1. 百度、必应搜索 Geogebra 结果对比

可以说国内在 Geogebra 在大学数学教学方面的应用是相对滞后的，我们可以在大学数学课堂教学中更多的使用这个软件。

## 2) Geogebra 软件的优势

与传统的数学软件，如几何画板等相比，Geogebra 有如下显著的特点：

① 使用方便。老师不需要学习编程，可以直接在 Geogebra 官方网站上找到自己需要的 ggb 文件，在电脑安装后可以直接使用即可。

② 功能强大，应用广泛。微积分、线性代数和概率统计这些课程都可以使用。Geogebra 不仅能绘制几何图像，还提供矩阵运算、微积分、Taylor 展开、解常微分方程等高等数学中常用的运算，并且拥有丰富的概率密度函数和与 Excel 类似的工作表，具有统计功能。

③ 实现反转课堂的有效工具。Geogebra 软件，占用空间小。不仅可以在电脑上安装，也有相应的手机 App。教师可以将相关的 ggb 软件给学生，学生通过自行操作 Geogebra 软件，加深对相关内容的了解，并激发学习兴趣。

## 3. Geogebra 软件在高等数学教学中的应用举例

大学数学中的微积分与线性代数内容，相对来说是比较抽象的。而国外在利用 Geogebra 软件参与大学数学的教学也是非常先进的。通过利用百度，必应搜索引擎分别搜索微积分与线性代数中的关键词，我们可以得到如下的图 2：

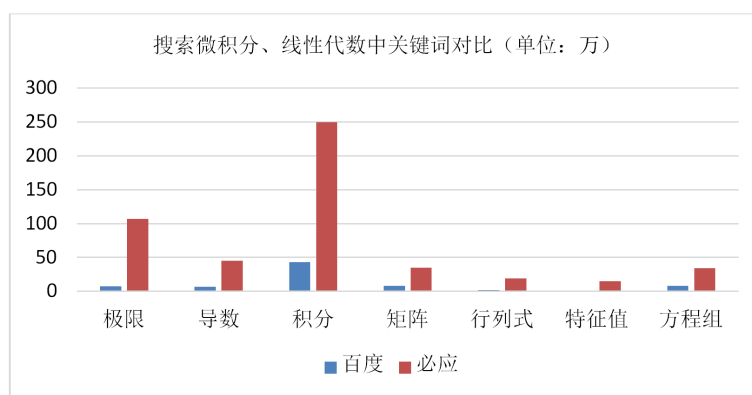


Figure 2. Comparison of searching Geogebra and key words in calculus and linear algebras by using Baidu and Bing

图 2. 百度、必应搜索 Geogebra + 微积分线性代数关键词结果对比

实际上，将 Geogebra 引入微积分与线性代数课堂，对于相关知识点的讲解是非常有利的。下面我们就通过两个例子，分别来看看 Geogebra 软件在高等数学与线性代数课堂教学中的应用。

### 1) Geogebra 在高等数学 - 方向导数的教学的应用

方向导数在高等数学多元微分学的教学中，是一个相对比较难的知识点。主要目的是讨论函数  $z = f(x, y)$  在一点  $P$  沿某一方向的变化率问题。学生往往会把方向导数仅仅当做一个复杂的定义，即：

设  $l$  是  $xOy$  平面上以  $P(x_0, y_0)$  为始点的一条射线，设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某一邻域  $U(P_0)$  内有定义， $P'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  为  $l$  上另一点，且  $P' \in U(P_0)$ 。则称此极限

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

为函数  $f(x, y)$  在点  $P_0$  沿方向  $l$  的方向导数。记作  $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)}$ 。通过这样一个复杂的概念，学生很难明白方向

导数的定义以及现实意义。然而，通过 Geogebra 软件，教师可以通过现场演示的办法，利用图 3，将方

向导数的问题转化为一个热锅蚂蚁问题，或者蒙眼下山问题：

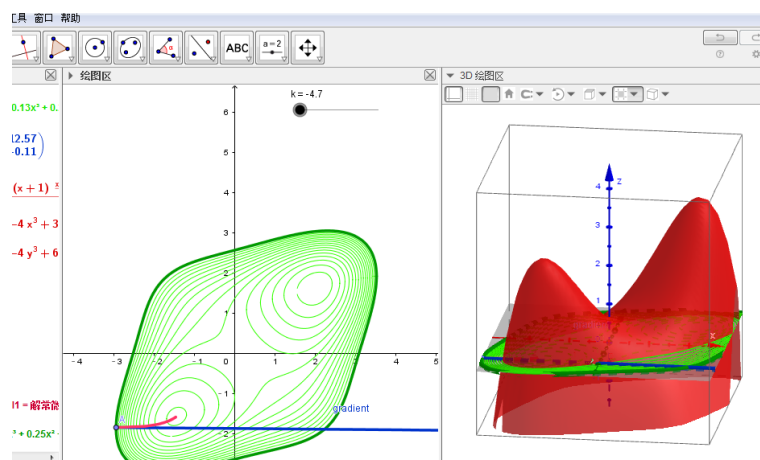


Figure 3. Directional derivative by contour line  
图 3. 通过等高线理解方向导数

利用 Geogebra 软件最优越的动态特点，通过拖动滑动条(如图 4 展示)，可以让学生感受到随着方向不同而导致的变化率不同：

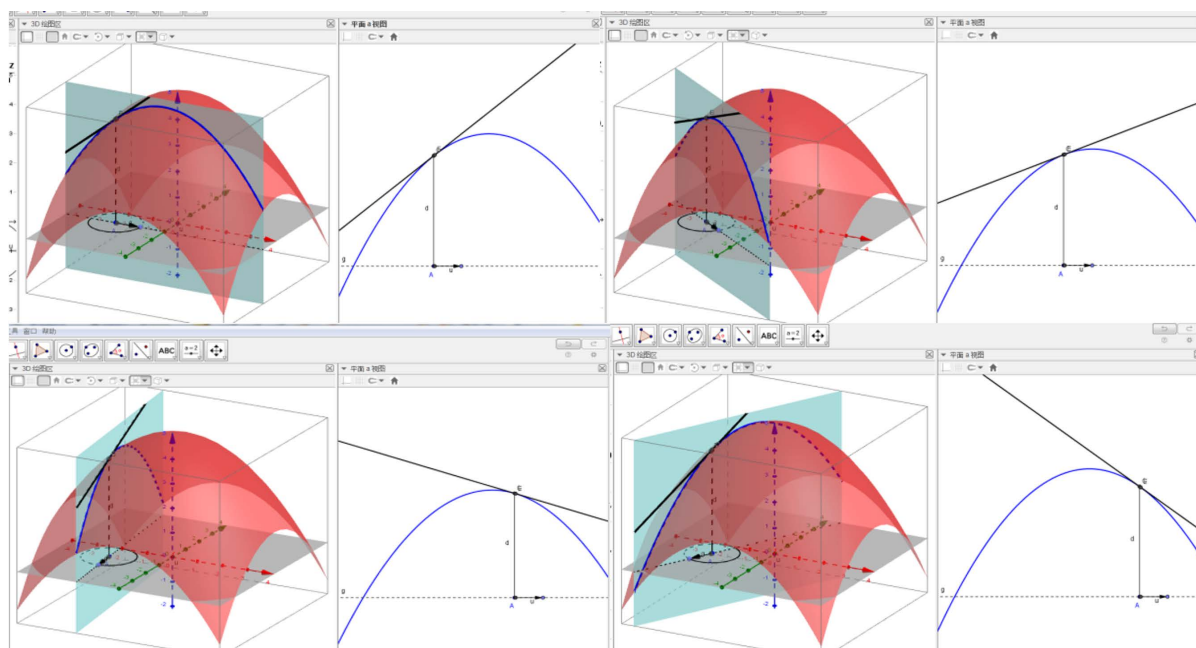


Figure 4. Definition of directional derivative  
图 4. 方向导数得定义

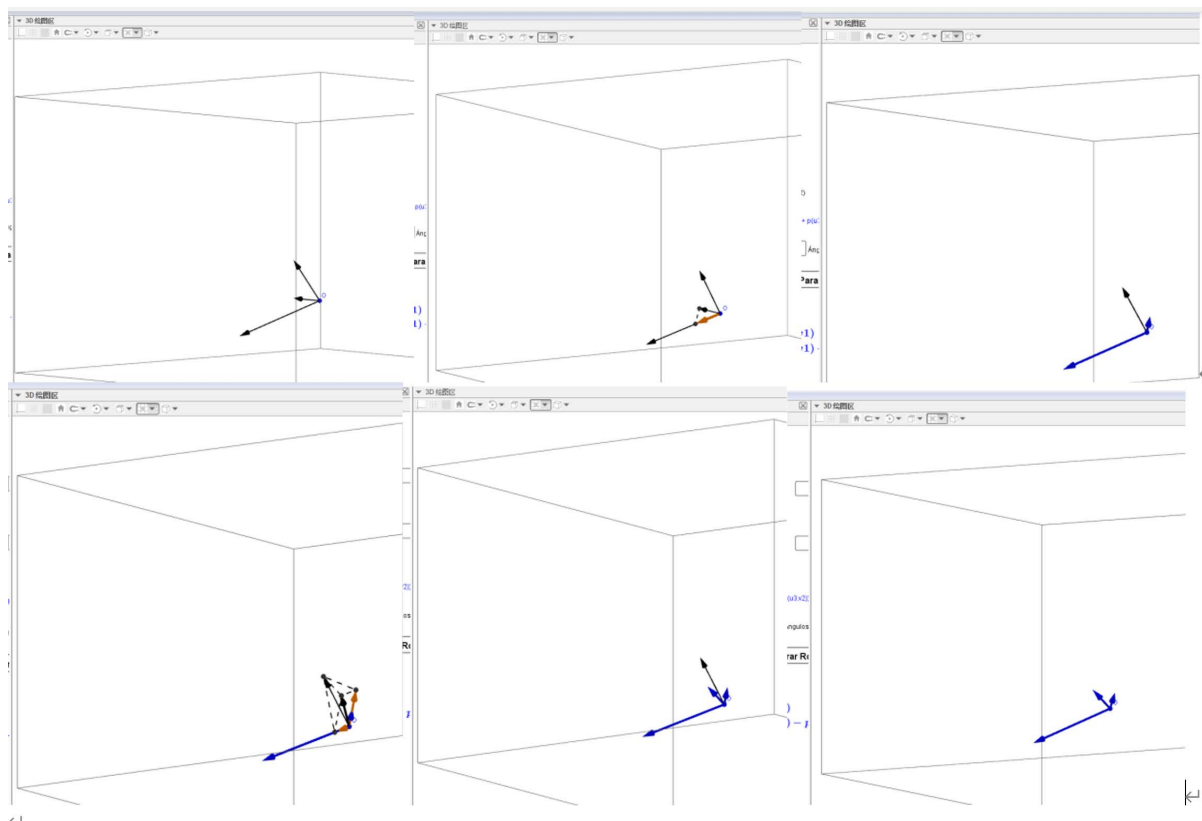
这样，学生就会在课堂上亲身感受到因为方向的变化而导致的斜率的变化。并对方向导数有更深刻的的特点。特别的，教师还可以在课堂上让感兴趣的同学上台亲自拖动滑动条而感受到方向、与斜率在这个定义中的作用。通过对这个 gbb 软件的分享，每个学生还可以在自己的电脑上演示，并了解方向导数的定义。

## 2) Geogebra 在线性代数教学——施密特正交化的应用

施密特正交化是求欧氏空间正交基的一种方法。是线性代数中比较重要，但却很难让学生有直观感受的一个知识点。它的主要目的是从欧氏空间任意线性无关的向量组  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  得到一个标准正交向量组  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 。在一般的线性代数教学中，施密特正交法教给学生的往往是下面的公式：

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1, \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2.$$

然而，如果利用一个简单的 Geogebra 程序，我们可以在课堂上展示从  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  得到  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  的过程。如下图 5 所示：



**Figure 5.** Process of Schmidt orthogonalization  
**图 5.** 施密特正交化过程

教师通过 Geogebra 软件演示的过程实际就是学生了解定义的过程，通过动态演示，学生掌握的不会生硬的公式，而是真正明白施密特正交化的意义，以及思路。

以上只是简单介绍了两个课堂教学实例，实际上，高等数学、线性代数的基本所有的知识点都可以通过 Geogebra 软件展示给学生。更多微积分案例可以参考[7] [8]。更加值得一提的是，学生通过手机下载 Geogebra 软件，还可以直接计算函数的导数、积分，矩阵的逆等等运算。这一切都会对我们的课堂教学有着非常的积极作用。

#### 4. Geogebra 软件在翻转课堂中的应用

传统的教学方式以教师讲授和课堂活动为主，而翻转式课堂上学生成为课堂的主角。翻转式课堂实现的重要条件知识的理解和学习都可以事先在课外完成，而 Geogebra 软件的交互功能就可以很好的满足

学生自主性的条件,使得学生可以通过对软件交互功能探索,变为课堂的主角。例如,学生可以利用 Geogebra 中滑动条的作用,与构建所要学习知识点的交互软件,具体可以参考[5]中所示。

与其他数学软件例如 Matlab, Mathematica 等不同的是, Geogebra 软件可以具有代数区域和图形区域,能够时时保持数形结合,有利于问题的研究和学习;在课堂教学中,能够瞬时的对适量的对图形或图片进行各种数学变化,有利于把真实的数据和材料引入到课堂中,这对微积分、线性代数的大部分知识都是很有用的,而且便于教师及时对内容进行注解和评价,有利于翻转课堂上学生与老师之间的互动,教师可以充分利用“任务”驱动提出问题,引导学生利用该软件实时解决问题,从而完成整个翻转课堂。

## 5. 如何具体的在课堂中使用 Geogebra 软件

在[7][8][9]中,作者通过不同的方面给出了 Geogebra 的应用以及发展前景。下面作者通过自己使用 Geogebra 软件的经验,来分享在课堂上使用该软件教学的一点经验。首先教师需要通过登陆 Geogebra 软件官方网站找到自己需要的材料,根据下面几种方式来使用 Geogebra 软件。

### 1) 直接通过电脑安装 Geogebra 软件

教师可以通过在教室电脑上安装 Geogebra 程序,大概需要 2 分钟时间,并通过在 PowerPoint 上设置超链接的方式,直接将文件打开,并展示给学生。

### 2) 使用离线数据包

在没有网络或者电脑无法安装软件的情况下,教师可以通过登陆 Geogebra 软件官方网站下载所需小程序的离线文件,并通过在 PowerPoint 上设置超链接的方式,直接将文件打开,并展示个学生。

### 3) 制作动态图

对于比较简单的动态程序,教师可以通过 Geogebra 软件,将相应的滑动条对应的动画转化生成一个动态图片,并将图片放入相关 PowerPoint 中即可。

通过上面分析,大家可以看出, Geogebra 软件是数学课堂实现教育信息化的基本平台,是我们高校双一流建设、实现翻转式数学教学的重要工具。广大大学数学教师应该在课堂教学中尝试使用这个软件。

## 参考文献

- [1] 靳菲菲,侯艳. Geogebra 软件对中学数学课堂的影响[J]. 科协论坛, 2012(1): 180-181.
- [2] 金贤. Geogebra 软件在高中数学教学中的应用[J]. 中学数学月刊, 2011(6): 32-33.
- [3] 胡建平. Geogebra 在初中几何教学中的应用[J]. 电子制作, 2012(12): 105-106.
- [4] 庄新瑞. Geogebra 在中学微积分教学中的应用[J]. 中学数学月刊, 2013(10): 42-43.
- [5] 陈婧,张东海,王晓锋. Geogebra 在高职微积分概念教学中的应用举例[J]. 中国教育技术装备, 2017(10): 42-45.
- [6] Preiner, J. (2008) Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Software to Mathematics Teachers: The Case of Geogebra. <https://users.qsm.ac.il/Assistant/Geogebra/articles/Geogebra3.pdf>
- [7] 左晓明,田艳丽,负超. 基于 Geogebra 的数学教学全过程优化研究[J]. 数学教育学报, 2012, 19(1): 99-102.
- [8] 钱文涛,赵军. Geogebra 软件让数学教学如虎添翼[J]. 中国教育技术装备, 2014(2): 54-56.
- [9] 高惺豪,李博,贾昌. Geogebra 在数学教育中应用的前景分析[J]. 计算机教学, 2014(13): 88-89.