

# 案例教学法在线性代数课程教学中的应用

鞠桂玲, 宋爱斌, 陈 平

陆军装甲兵学院基础部数学教研室, 北京

Email: guilingju@163.com

收稿日期: 2020年10月23日; 录用日期: 2020年11月5日; 发布日期: 2020年11月12日

---

## 摘 要

案例教学法对于提高学生的学习兴趣, 培养学生分析问题、解决问题的能力具有极其重要的作用。本文分析了教学过程中存在的问题, 介绍了案例教学法实施的具体过程, 总结了实施案例教学应该注意的问题。

## 关键词

案例教学, 实施过程, 教学反思

---

# The Application of Case Teaching Method in the Teaching of Linear Algebra

Guiling Ju, Aibin Song, Ping Chen

Basic Education Department, Army Academy of Armored Forces, Beijing

Email: guilingju@163.com

Received: Oct. 23<sup>rd</sup>, 2020; accepted: Nov. 5<sup>th</sup>, 2020; published: Nov. 12<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

Case teaching method plays an important role in improving students' interest in learning and cultivating their ability to analyze and solve problems. This paper analyzes the problems existing in the teaching process, introduces the specific process of the implementation of case teaching method, and summarizes the problems that should be paid attention to in the implementation of case teaching.

## Keywords

Case Teaching, Implementation Process, Reflection on Teaching

---



## 1. 引言

案例教学最早于 1870 年在哈佛大学法学院创立, 后来, 经过在实践中不断的探索而成熟起来[1]。案例教学的主要特点是以实际问题带动课堂, 把抽象的理论知识转变成实际问题的研究讨论, 把教师的讲授变成师生间的教学研讨。案例教学由于自身的特点, 同时经过长期的教学实践, 已经形成了独具特色的教学方法[2]。半个世纪来, 美国的很多高校一直利用案例教学作为一项重要的教学工具。20 世纪 80 年代以来, 随着我国改革开放的不断深入, 全国的教育也随着得到了较快的发展, 哈佛的案例教学法在很多管理院校开始尝试并得到广泛的推广, 收到了较好的教学效果, 但在理工科类课程中的应用较少[3]。笔者在线性代数课程的教学过程中, 对案例教学进行了大胆尝试, 收到了较好的教学效果, 本文从理论和实践两个方面, 介绍案例教学在线性代数课程教学中的应用。

## 2. 当前教学中存在的问题

一是授课过程中, 教师的理论讲授占主导地位, 在教学内容上突出基本概念和基本理论的讲解, 强调对基本技能的训练, 存在着重运算技巧, 轻数学思想的倾向。线性代数是一门实用性非常强的学科, 这种授课方式冲淡了这门课程自身的实际应用功能, 使学生不容易感受到这门课程与实际生活、后续专业课程间的联系, 学习的积极性大打折扣。

二是授课过程中缺乏与专业相关的案例, 现有的案例多以生活案例居多, 与学生的专业相距甚远, 无法唤起学生求知的欲望, 学生无法体会到利用所学数学知识解决跟专业有关问题的成就感, 造成学生不愿学、学不好的现象。

三是考核评价由单一的闭卷笔试形式进行, 注重对学生基础知识、解题技巧等掌握情况的考察, 缺乏对学生运用所学内容解决实际问题能力的考核, 这种考核机制, 不利于对学生整体能力素质的考核, 造成学生难以利用所学的知识去创造性的解决实际问题。

## 3. 线性代数课程引入案例教学的可行性

### 3.1. 案例教学能够调动师生的积极性, 提高学习效率

《线性代数》课程逻辑性强而且内容抽象, 学生在学习过程中容易产生畏难情绪, 而案例教学通过精心选取生活和专业课程中的教学案例, 具有很强的直观性和先验性, 不仅消除了学生对知识的陌生感, 解决了抽象性的问题, 而且激发了学生的求知欲, 积极参与到课堂教学中去。对于教师而言, 活跃的课堂气氛, 和谐的师生交流更能激发教师的工作热情, 积极优化教学内容, 改进教学模式, 达到教学相长的教学目的。

### 3.2. 案例教学能够提高学生的数学素质, 增强解决实际问题的能力

与传统教学模式相比, 案例教学把大部分的时间用在案例的分析与讨论中, 很好的培养了学生发现问题、处理问题的能力, 锻炼了学生的数学思维, 训练了学生获得知识的方法, 而不是教条地掌握知识, 克服了传统教学中学生对知识的死记硬背。当遇到类似的问题或情景时, 能茅塞顿开, 举一反三, 从容自如地解决问题。

### 3.3. 案例教学能够增强学生的合作能力，培养团队精神

案例教学把实际问题加以典型化处理，形成供学习者思考分析的案例，学生在相互讨论、分析案例的基础上，探寻其中蕴含的数学问题。通过合作学习，每一位学习者都溶入到班集体当中，大家互相沟通和互相合作，不仅能有效改善学生之间的关系，使学生学会沟通与合作，而且为以后走上工作岗位奠定了基础。

## 4. 案例教学法在线性代数课程教学中的实施

下面，结合两个例子介绍案例教学法在线性代数教学中的应用情况。

### 4.1. 在讲解矩阵的相似对角化时引入军备竞赛的案例

首先，引入案例。A、B、C 三个国家进行军备竞赛，试建立数学模型，讨论各个国家的防御支出情况。即防御支出与时间的关系。

然后，分析案例。不妨设， $t$ 时刻各个国家的防御支出分别为 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 。先来考虑 A 国家的防御支出。

当 B、C 两国家增加防御支出时，A 国家肯定会增加自己的防御支出。假设：

假设 1：A 国家的防御支出率与 B、C 的防御支出呈正比例增长；

假设 2：A 国家的防御支出率按已支出额呈正比例减少。

在这样一个假设之下，给出 A 国家的防御支出率模型。

$$\frac{dx_1}{dt} = -a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

同样，给出 B、C 两个国家的防御支出率模型

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \end{cases}$$

建立防御支出模型

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \end{cases}$$

对于这个模型，如何求解？用矩阵的形式来表示，记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}.$$

有  $\frac{dX}{dt} = AX$ 。

若有可逆线性变换  $X = PY$ ，则  $\frac{dY}{dt} = P^{-1}APY$ 。

$$\text{如果 } P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ 则 } \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = \lambda_3 y_3 \end{cases}.$$

通过求解上述方程组可以求得原方程组的解。

在这个过程中， $P^{-1}AP = \Lambda$  这个关系是非常重要的，称为矩阵  $A$  可以相似对角化。

其次，案例推广。还有哪些实际问题可以用矩阵的相似对角化的知识来解决呢？比如，人口结构变化问题、种群进化问题等，都可以用矩阵相似对角化的理论来求解。

#### 4.2. 在讲解逆矩阵时引入信息加密的案例

首先，引入案例。在信息通信中，为防止信息被不法分子截获，需要对信息进行加密后再传递。首先，建立数字和 26 个英文字母之间的关系，例如  $A \leftrightarrow 1, B \leftrightarrow 2, \dots, Z \leftrightarrow 26$ ，如果传送信息“DEC”，按照上面的对应关系，直接传送信息 4, 5, 3，很容易被别人破译，无论在军事上还是在商业上都是不可取的。那么，怎么办呢？

然后，分析案例。常用的方法是将“明文”DEC 加密，再将加密后的“密文”传输出去，从而增加非法用户破译的难度。如何对信息进行加密呢？我们可以通过矩阵的乘法实现这个功能。首先，选取一个元素均为整数的矩阵作为密钥矩阵，例如选  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，利用矩阵乘法  $A \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$ ，

因此，对应的明文加密后传输出去的密文编码为“12, 10, 9”，根据上述数字和字母之间的对应关系，编码对应的信息为“L J I”，很明显，用户得到的信息并不是原来传递的信息，用户得到信息后如何进行解密呢？这个问题转化为数学问题即为：已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  和  $C = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$ ，求满足矩阵方程  $AX = C$

的矩阵  $X$ 。进而引出线性代数中的逆矩阵的概念和计算方法，并用所学的知识解决刚才的案例。

其次，案例推广。还有哪些实际问题可以用逆矩阵的知识来解决呢？比如，已知由变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  到

变量  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的线性变换  $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$ ，如何求由变量  $y_1, y_2, \dots, y_n$  到变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的

线性变换？这个问题的矩阵表示：已知线性变换  $Y = AX$ ，如何求  $Y$  到  $X$  的线性变换？这个问题也属于逆矩阵的问题。同时，可以启发学生去寻找一些其他的可用逆矩阵解决的实际案例。这一过程，不但激起学生学习的兴趣，积极参与到课堂互动中来，而且还增强了学生主动探索新知识的意愿和能力。

线性变换？这个问题的矩阵表示：已知线性变换  $Y = AX$ ，如何求  $Y$  到  $X$  的线性变换？这个问题也属于逆矩阵的问题。同时，可以启发学生去寻找一些其他的可用逆矩阵解决的实际案例。这一过程，不但激起学生学习的兴趣，积极参与到课堂互动中来，而且还增强了学生主动探索新知识的意愿和能力。

### 5. 案例教学的反思

#### 5.1. 建立教学案例库

案例的选择是实施案例教学的前提，案例的选择来源于实际，但不是生活中的任何事件都能作为教

学案例。许多案例描述的内容和条件，与授课内容区别较大。有的案例背景比较复杂，讲清背景需要较多的时间，由于课堂时间有限，不利于在课堂上展开讲授，有的案例只是过程中的某一部分用到了本节课的内容，还牵涉到一些其他的知识，也不利于课堂展开。所以，选取的案例不仅要有代表性、典型性，还要具有可实施性。课堂用案例应短小精炼，易于在有限时间内展开，使学生通过案例理解、掌握知识，提高分析、解决问题的能力。案例库的建设需要充分发挥教学组的力量，结合自己所教授学生的专业，挖掘相应的案例，在教学研讨中，推动案例教学达到一个新的水平。

## 5.2. 正确处理好教师和学生的关系

案例教学是教师根据课堂教学目标和教学内容的需要，通过设置具体的案例，引导学生参与分析和讨论，诱发学生创造潜能的教学过程。学生可能会提出不同的解决方案，甚至不能得出正确的答案，它真正重视的是得出答案的思考过程。在课堂讨论过程中，教师要为学生营造一个良好的自由讨论气氛，启发学生积极参与，同时，对学生进行必要的引导，使讨论仅仅围绕主题展开。同时，对于学生的讨论要及时进行点评，鼓励每一个学生积极投入到教学过程中来，培养学生的质疑意识和发展创新思维。

## 5.3. 建立有效激励机制

现行的闭卷考试方式，不利于对学生实际问题能力的考察，同时，由于缺乏相应的激励措施来提高教师的积极性，导致实施案例教学的积极性受到影响。可以采用“闭卷考试 + 论文 + 答辩”的形式来全面考察学生的学习效果。闭卷考试主要考察学生对课程基本知识的掌握情况；论文由三人一组完成，通过对某个实际问题展开讨论，搜集数据、查阅资料、建立数学模型，并利用线性代数的相关内容进行求解，最后以论文的形式呈现研究成果，考察学生对问题的综合处理能力。答辩过程主要考察学生的语言表达能力、临场随机应变的能力和沟通能力，并且能根据他人的提问和建议，不断地完善自己的观点和思路。总之，完善的教学评价体系不仅能够全面地评价学生的学习效果，而且能够调动教师探索有效的案例教学方法的积极性，引导学生从应试学习向提高自身素质的自主学习方向转变。

## 6. 结束语

教学实践表明，案例教学在线性代数课程中的实施，能够充分调动学生学习的积极性，也提高了学生应用线性代数知识解决实际问题的能力和探索、合作、创新能力，使学生在不知不觉中掌握线性代数的基本思想和方法。案例教学对于改进传统的教学方法、培养学生的创新能力和探索精神具有极其重要的意义。

## 基金项目

研究内容由陆军装甲兵学院教育研究项目“基于应用的《线性代数》课程教学探索与实践”、双重科研课题“多维融合的试验训练评估方法”资助。

## 参考文献

- [1] 王新春, 肖继先, 刘晓红. 案例在概率论教学中的应用[J]. 河北理工大学学报, 2010, 10(2): 105-107.
- [2] 李涛, 李柏红. 案例教学的价值体现及存在的几个问题[J]. 吉林商业高等专科学校学报, 2003, 71(2): 25-26.
- [3] 张靖怡. 当议应用型创新人才培养模式下高等数学的教学改革[J]. 教育教学论坛, 2016(13): 98-99.