Advances in Education 教育进展, 2021, 11(1), 223-226
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2021.111036

Hans汉斯

定积分定义的教学课件设计

杨　昕

桂林航天工业学院理学学院，广西　桂林
Email: xinyang_emily@sina.cn

收稿日期：2020年12月19日；录用日期：2021年1月15日；发布日期：2021年1月22日

摘　要

定积分是高等数学课程中一个重要概念，也是一个难以理解和掌握的概念。为了克服这个难点，在引入问题、分析问题、解决问题、定义描述、解释说明、应用实例等教学环节中应该始终贯穿直观性，这样会收到很好的教学效果。

关键词

定积分定义，直观教学，课件设计

Teaching Courseware Design of Integral Definition

Xin Yang

School of Mathematical Sciences, Guilin University of Aerospace Technology, Guilin Guangxi
Email: xinyang_emily@sina.cn

Received: Dec. 19th, 2020; accepted: Jan. 15th, 2021; published: Jan. 22nd, 2021

Abstract

Integral is an important concept in advanced mathematics course, and it is also a difficult concept to understand and master. In order to overcome this difficulty, teachers should always run through intuition in the teaching links of introducing problems, analyzing problems, solving problems, definition description, explanation, application examples and so on, which will receive good teaching effect.

文章引用：杨昕．定积分定义的教学课件设计[J]．教育进展, 2021, 11(1): 223-226.
DOI: 10.12677/ae.2021.111036

Keywords

Integral Definition, Intuitive Teaching, Courseware Design

1. 引言

定积分定义是高等数学课程中最重要的概念之一。由于定积分定义属于构造式定义，比较复杂，也比较抽象，所以对非数学专业类学生是比较难于理解和掌握的。为了突破这些难点，教师们在教学中做了不少努力，也有一些研究文献，如[1] [2] [3] [4]。本人从事高等数学教学已有十年，在教学实践中我的体会是：要让学生正确理解和掌握定积分的定义，就要在引入问题、分析问题、解决问题、定义描述、解释说明、应用实例等教学环节中始终贯穿直观性，用直观性加深学生的理解。

2. 教学环节设计

2.1. 引入问题

定积分的几何含义是函数的曲边梯形面积。从学生已掌握的三角形面积、圆形面积、矩形面积、梯形面积入手，提出函数的曲边梯形面积的计算问题，如函数 $f(x)=x^2\ (0\le x\le 1)$ 的曲边梯形面积的计算问题。

2.2. 分析问题

曲边梯形与梯形的比较。(1) 相同点：除上方边外，梯形和曲边梯形的其余三条边都是直边，且两个侧边垂直于底边；(2) 不同点：梯形的上方边是直边，而曲边梯形的上方边不是直边。

由于曲边梯形的上方边不是直边，所以它的面积计算非一般，这也是问题所在。

2.3. 解决问题

以计算曲边梯形 $f(x)=x^2\ (0\le x\le 1)$ 面积为例, 解释解决问题分为两步。

(1) 曲边梯形面积 S 的近似值 S_n。将曲边梯形分割为 n 个小曲边梯形，分点为 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$. 对每个小曲边梯形面积用一个相应的小矩形面积作为其面积的近似值，并将 n 个小矩形面积累加，这个总和 S_n 就是这个曲边梯形面积 S 的近似值，如图 1 所示。

例如，曲边梯形 $f(x)=x^2\ (0\le x\le 1)$ 的小矩形面积总和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(i/n)(1/n)=\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2=\frac{1}{n^3}\left(1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right)$$

(2) n 个小矩形面积和 S_n 的极限就是曲边梯形面积 S。如对上例有

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right)=\frac{1}{3}$$

在这教学环节，要用计算机软件展示小矩形面积和 S_n 渐近趋于曲边梯形面积 S 的过程，如图 2 所示。

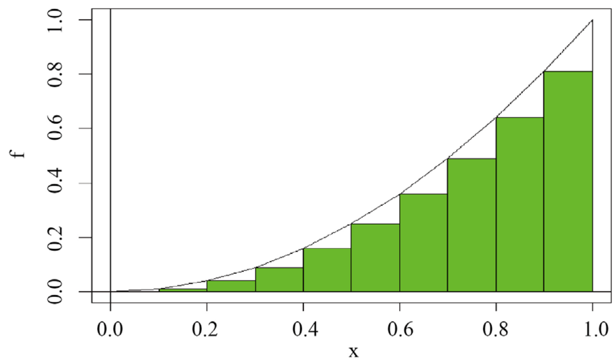

Figure 1. Approximate calculation of trapezoid area with curved edge
图 1. 曲边梯形面积的近似计算

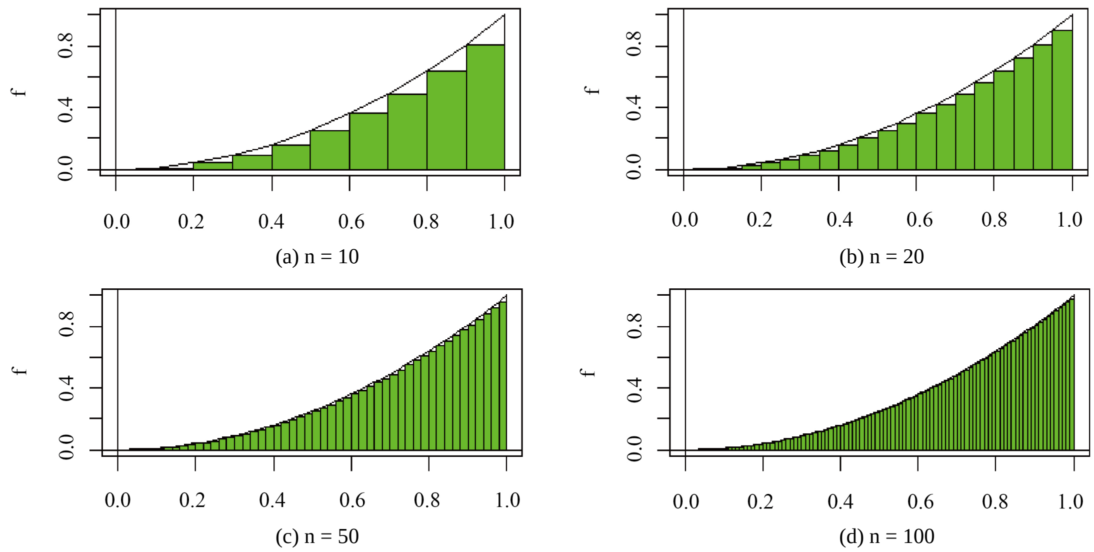

Figure 2. Limit process of small rectangular area
图 2. 小矩形面积的极限过程

2.4. 定义描述

在这个环节就是将上面解决问题的过程用严格的数学语言描述出来。

2.5. 解释说明

在积分的定义中，要特别解释和强调的要点有：

(1) 分割可以是非等距分割。将曲边梯形分割为 n 个小曲边梯形时，这种分割可以是等距分割，也可以是非等距分割。也就是小曲边梯形的底边不一定要求是等边长，但在取极限时要求最大的小底边长度趋于 0。

在这教学环节，要用计算机软件展示非等距分割的小矩形面积和 S_n 同样渐近趋于曲边梯形面积 S。

(2) 小区间内取点 ξ_i 的任意性。在计算小矩形面积时，小矩形的竖边的选择具有任意性，只要在小区间内都可以，也就是小矩形的竖边的长度 $f(\xi_i)$ 中的 ξ_i 只要落在小区间内即可。

在这教学环节，要用计算机软件展示小区间内选点的任意性也同样有小矩形面积和 S_n 渐近趋于曲边梯形面积 S。选点可以是：左端点、右端点、中点，或者是随机取点，随机取点可以用计算软件中的随

机数函数实现。

2.6. 应用实例

积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 也是积分定义计算的一个很好例子，它可以用积分定义做理论计算，也可以用计算软件展示积分定义中的近似极限过程。

(1) 理论计算。

分割求和：$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{e}^{x_i} n^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i/n} n^{-1} = \dfrac{1-\left(\mathrm{e}^{1/n}\right)^n}{n\left(1-\mathrm{e}^{1/n}\right)} = \dfrac{1-\mathrm{e}}{n\left(1-\mathrm{e}^{1/n}\right)}$。

取极限：$\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1-\mathrm{e}}{n\left(1-\mathrm{e}^{1/n}\right)} = \mathrm{e}-1 = 1.718282$。

(2) 近似计算。

表 1 展示：(1) 随着等分小区间个数 n 增加，近似和 S_n 越来越接近积分的理论值 $\mathrm{e}-1$；(2) 不同的取点 ξ_i，对近似和 S_n 是有影响，但当 n 增大时，近似和 S_n 仍然是趋于积分的理论值，且取中点时收敛速度最快。

Table 1. Convergence of approximate sums
表 1. 近似和的收敛性

ξ_i	S_n	$n=10$	$n=100$	$n=1000$	$n=10000$
左端点	$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{e}^{x_i} n^{-1}$	1.633799	1.709705	1.717423	1.718196
右端点	$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{x_i} n^{-1}$	1.805628	1.726888	1.719141	1.718368
中点	$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{e}^{(x_i+x_{i+1})/2} n^{-1}$	1.717566	1.718275	1.718282	1.718282

3. 结束语

对大多数非数学专业类学生而言，理解定积分定义是一个难点。为了克服这一难点，在讲解定积分定义中只要坚持直观性原则，就能收到预期的效果。

参考文献

[1] 李洪亮，裴慧丽. 定积分概念教学方法思考[J]. 教育进展, 2020, 10(2): 120-124.

[2] 顾海波，毛志. 谈文科高等数学中定积分定义的教学[J]. 铜仁学院学报, 2013, 15(3): 139-141.

[3] 宫彦萍，曾伟梁，刘颖. 关于黎曼积分定义教学的新探索[J]. 数学教育学报. 2006, 15(1): 70-71.

[4] 徐勇. 浅谈高等数学中定积分定义在教学中的妙用[J]. 湖北经济学院学报(人文社会科学版), 2012, 9(10): 190-192.