Advances in Education 教育进展, 2021, 11(2), 368-371
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2021.112059

关于二元函数极值判别中判别式为零时的几个讨论

陈春宝

上海海事大学文理学院，上海
Email: wangcfg@pku.edu.cn

收稿日期：2021年2月9日；录用日期：2021年3月4日；发布日期：2021年3月12日

摘　要

本文主要讨论了多元函数在驻点处利用充分定理判别极值失效时的一些问题，借用一元函数或二元泰勒公式进行推广探讨极值的存在性，并利用结论解决一些实例。

关键词

多元函数，驻点，极值

Discussion on the Extreme Value of Functions of Two Variables When the Discriminant Is Zero

Chunbao Chen

College of Arts and Sciences, Shanghai Maritime University, Shanghai
Email: wangcfg@pku.edu.cn

Received: Feb. 9th, 2021; accepted: Mar. 4th, 2021; published: Mar. 12th, 2021

Abstract

The second derivative test for local extreme values of a function with two variables may be incon-

文章引用: 陈春宝. 关于二元函数极值判别中判别式为零时的几个讨论[J]. 教育进展, 2021, 11(2): 368-371.
DOI: 10.12677/ae.2021.112059

clusive. In this paper, the author mainly considers above case and discusses the existence of local extremum based on univariate functions and Taylor's formula for functions of two variables. According to the conclusion of this paper, the author also analyzes the behavior of several specific functions at the stationary point.

Keywords

Functions of Several Variables, Stationary Point, Local Extremum of a Function

1. 引言

二元函数极值是高等数学课程中一个重要的数学问题，它广泛应用于长度、面积、体积及部分物理，经济问题最值，运筹学最优化问题等的讨论。而讨论二元函数极值时，其判别方法远比一元函数麻烦，下面就二元函数极值判别的充分定理失效后，极值是否存在作一些探讨。

2. 二元函数极值讨论

二元函数极值的充分定理是：当 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内具有二阶连续偏导数，当 (x_0,y_0) 为驻点，记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则 $AC-B^2>0$ 取得极值， $AC-B^2<0$ 不取得极值[1]。

那么当 $AC-B^2=0$ 如何讨论，本文解决一些特殊情形下的极值讨论。

1、当 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内具有三阶连续偏导数，当 (x_0,y_0) 为驻点，记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，且满足 $AC-B^2=0$，$A=0$ 或 $C=0$,显然 $B=0$，如果 $A=0$ 但 $f'''_{xxx}(x_0,y_0)\neq 0$，则 (x_0,y_0) 不是极值点。

证明：不妨设 $f'''_{xxx}(x_0,y_0)>0$， $f'''_{xxx}(x_0,y_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''_{xx}(x_0+h,y_0)-A}{h}$，则有保号性定理存在 (x_0,y_0) 的某个邻域，使得 $\dfrac{f''_{xx}(x_0+h,y_0)}{h}\geq 0$，在 $y=y_0$ 平面上曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$，$(x_0,y_0)$ 为曲线的拐点且可导，所以不是极值点[2]，即曲线上在该点邻域内既有比该点函数值大的点，也有小的点，所以二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不取极值。

例 1.讨论 $z=x^3+y^4$ 的极值

解：由 $\begin{cases}z'_x=3x^2=0\\ z'_y=4y^3=0\end{cases}$ $(0,0)$ 得为驻点，且 $A=0,B=0,C=0,AC-B^2=0$，$f'''_{xxx}(x_0,y_0)=6\neq 0$，故 $(0,0)$ 不是该函数的极值点。

2、当 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内具有二阶连续偏导数，当 (x_0,y_0) 为驻点，记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$， $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，且满足 $AC-B^2=0$， $A\neq 0$ 且 $C\neq 0$,如果在 (x_0,y_0) 邻域内 $f''_{xx}(x_0+k,y_0+h)\,f''_{yy}(x_0+k,y_0+h)-\left[f''_{xy}(x_0+k,y_0+h)\right]^2\geq 0$，则 (x_0,y_0) 是极值点。

证明：在驻点 (x_0,y_0) 处，由二元函数泰勒公式得

$$\begin{aligned}\Delta z &= f_x'(x_0,y_0)k + f_y'(x_0,y_0)h + \frac{1}{2}f_{xx}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)k^2 \\ &\quad + f_{xy}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)kh + \frac{1}{2}f_{yy}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)h^2 \\ &= \frac{1}{2f_{xx}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)}\Big\{\big[f_{xx}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)k\big]^2 + \big[f_{xy}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)h\big]^2 \\ &\quad + 2f_{xx}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)f_{xy}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)kh - \big[f_{xy}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)h\big]^2 \\ &\quad + f_{xx}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)f_{yy}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)h^2\Big\} \\ &= \frac{1}{2f_{xx}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)}\Big\{\big[f_{xx}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)k + f_{xy}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)h\big]^2 \\ &\quad + h^2\Big[f_{xx}''(x_0+k, y_0+h)f_{yy}''(x_0+k, y_0+h) - \big[f_{xy}''(x_0+k, y_0+h)\big]^2\Big]\Big\}\end{aligned}$$

当 k,h 不同时为 0 时，Δz 与 $f_{xx}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)$ 同号，所以当 $A>0$ 时，由保号性定理在驻点邻域内 $f_{xx}''(x_0+\theta k, y_0+\theta h)>0$,所以 $\Delta z>0$，函数值为极小值，同理，$A<0$，函数值为极大值，可推广到 $C\neq 0$

例 2.讨论 $z=\mathrm{e}^{x^2+y^2}+2xy$ 的极值

解：由 $\begin{cases} z_x' = 2x\mathrm{e}^{x^2+y^2}+2y=0 \\ z_y' = 2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}+2x=0 \end{cases}$ 得 $(0,0)$ 为驻点，$\begin{cases} z_{xx}'' = (2+4x^2)\mathrm{e}^{x^2+y^2} \\ z_{xy}'' = 4xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}+2 \\ z_{yy}'' = (2+4y^2)\mathrm{e}^{x^2+y^2} \end{cases}$

所以在 $(0,0)$ 点，$A=2, B=2, C=2, AC-B^2=0$，

$f_{xx}''(k,h)=(2+4k^2)\mathrm{e}^{k^2+h^2}>0$，$f_{yy}''(k,h)=(2+4h^2)\mathrm{e}^{k^2+h^2}$，

$f_{xy}''(k,h)=4kh\mathrm{e}^{k^2+h^2}+2$，因为 $\mathrm{e}^{k^2+h^2}\geq 1$，所以

$$\Delta = 4\left(\mathrm{e}^{k^2+h^2}\right)^2 - 4 + 8\mathrm{e}^{k^2+h^2}\left(\mathrm{e}^{k^2+h^2}\left(k^2+h^2\right)-2kh\right)\geq 0$$

故 $(0,0)$ 是该函数的极小值点

3、添加辅助函数说明极值不存在，当 $z=f(x,y), g=(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得极小（大）值，则 $z=f(x,y)+g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 也取得极小（大）值。

例 3.讨论函数 $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy$ 在 $(0,0)$ 是否取得极值?

解：$\begin{cases} f_x' = 4x^3-4x+4y \\ f_y' = 4y^3-4y+4x \end{cases}$，$\begin{cases} f_{xx}'' = 12x^2-4 \\ f_{xy}'' = 4 \\ f_{yy}'' = 12y^2-4 \end{cases}$

在 $(0,0)$ 处，$A=C=-4, B=4, \Delta=AC-B^2=0$，无法判别。

取 $y=x, f(x,y)=x^4+y^4\geq 0$，故 0 不可能是极大值，不妨设 $(0,0)$ 为 $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy$ 的极小点，构造函数 $g(x,y)=2x^2+2y^2$，由充分定理判别得 $(0,0)$ 为 $g(x,y)=2x^2+2y^2$ 极小点。

令 $h(x,y)=f(x,y)+g(x,y)=x^4+y^4+4xy$ 所以得 $(0,0)$ 为 $h(x,y)$ 的极小点。

但对于 $h(x,y)$，$\begin{cases} h_x' = 4x^3+4y \\ h_y' = 4y^3+4x \end{cases}$，$\begin{cases} h_{xx}'' = 12x^2 \\ h_{xy}'' = 4 \\ h_{yy}'' = 12y^2 \end{cases}$

所以在 $(0,0)$ 处 $A=C=0, B=4, \Delta=AC-B^2=-16<0$ 得到矛盾，$(0,0)$ 不是极小点，从而不是极值点。

3. 结论

二元函数极值判别方法很多，但都没有完善的理论，本文也仅仅是判别法的一个补充。

参考文献

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学. 下册[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2002: 52-54, 62-66.

[2] 同济大学应用数学系. 高等数学. 上册[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2002: 152-154.