Advances in Education 教育进展, 2021, 11(3), 735-739
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2021.113115

基于课程思政的积分上限函数的教学设计

周 荧

贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳
Email: yzhoumath@163.com

收稿日期：2021年4月15日；录用日期：2021年5月10日；发布日期：2021年5月18日

摘 要

积分上限的函数是高等数学中一个重要的基础概念，它表明了积分与微分的关系，其重要性不言而喻。但在教学实践过程中发现学生理解该抽象函数具有一定的困难，本文基于课程思政的背景下，通过“真问题、过程性、互动性”三位一体的教学设计方法，给出一种实践过程中易于学生理解的积分上限函数的教学设计。

关键词

积分上限函数，课程思政，教学设计

The Teaching Design of the Integral Upper Limit Function Based on the Curriculum Ideology and Politics

Ying Zhou

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou
Email: yzhoumath@163.com

Received: Apr. 15th, 2021; accepted: May 10th, 2021; published: May 18th, 2021

Abstract

The upper limit of integral function is an important basic concept in advanced mathematics. It shows the relationship between definite integral and differential, and its importance is self-evident. However, in the process of teaching practice, it is found that students have certain difficulties in understanding this abstract function. Based on the background of curriculum ideology and politics, this article gives a teaching design method of “true questions, procedural and interactive”

文章引用: 周荧. 基于课程思政的积分上限函数的教学设计[J]. 教育进展, 2021, 11(3): 735-739.
DOI: 10.12677/ae.2021.113115

three-in-one teaching design method. The instructional design of the integral upper limit function that is easy for students to understand.

Keywords

Integral Upper Limit Function, Curriculum Ideology and Politics, Teaching Design

1. 引言

国家一直倡导寻找一种有效的途径，在专业课程教学的过程中融入思想政治教育这一隐形育人的功能，发挥好课堂教学作为教书育人这一主阵地的先天优势。本教学设计正是响应习近平总书记在全国高校思想政治工作会议中强调的以“立德树人”为中心，把践行社会主义核心价值观融入教书育人的全过程这一重要精神[1]，结合所讲授的高等数学这门受众面广、逻辑性强、高度抽象的公共基础课的学科特点，提出“真问题、过程性、互动性”三位一体的教学设计方案，力图从现实社会中人们所面临的真实的数学问题出发，本着解决问题的思路，用一系列真实问题串联起来，重建知识产生的全过程，让学生明白知识点从何而来，有何用处，而不是直接呈现书本上给出的最终结果，并在课堂教学过程中注重与学生的互动性，主动回应学生所关心的问题，通过这三方面的教学设计，最终希望学生在课堂学习过程中不仅仅收获书本上的固有知识点，而且可以了解知识点的前世今生和发展趋势，以及知识点所传递的文化内涵和核心价值观等，增加学生的获得感。

积分上限的函数是用形如定积分的形式来定义的一种新函数，在工程技术等方面也比较常见，例如在概率计算等相关问题中常用于表示密度函数，因此积分上限函数作为高等数学必修内容中一种极为抽象的函数[2]，常常让基础薄弱的学生晕头转向。对于经管类、农林类的一年级本科生更是如此，由于上课学时较少，加之学生对于抽象类概念内心深处有恐惧心理，导致学生刚接触到该数学概念时，有畏难情绪，不能很好地理解积分上限函数的定义。本教学设计，正是基于课程思政的背景下，从生活中一则求解极限的广告宣传语出发，引出积分上限函数，激发学生的学习兴趣，减少畏难情绪，进而讲解积分上限函数的相关知识点，并将课程思政融入教学的全过程。

2. 积分上限函数的引入

通过瑞幸咖啡的一则广告语“人生无解，多喝拿铁，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{\cos x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$”，从“人生无解”引发学生思考此题是否有解，要想知道此题是否有解，需要知道分子 $\int_1^{\cos x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 所表达的含义以及如何求解，从而很自然地引出本节课的主讲知识点，吸引学生的注意力，进而自觉思考，主动学习新知识。

引导学生重建知识点产生的过程，重述定积分 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，根据该定义式，我们知道它是一种乘积和式的极限，是一个确定的数值，只与积分区间和被积函数有关，与积分变量用何字母表示无关，也就是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$。

现假设 $x\in[a,b]$，考虑积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，它的取值仅与积分区间 $[a,x]$ 和被积函数 $f(x)$ 有关。一旦给

定了 x 的取值，相应的 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的值也随之确定，显然这种关系符合函数的定义，从而将其称为积分上限的函数，记为 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$。从形式上来看，$x$ 的位置位于积分的上限，从而该定义符合表观上的认知。类似地，x 处于积分下限时，也就定义了一个积分下限函数 $\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$。通常，我们称定义一个积分上限函数 $\Phi:[a,x]\to R$，$x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $x\in[a,b]$，$t\in[a,x]$，$f(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数。

3. 积分上限函数的性质讨论

定理 1 [3] 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，那么 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)(a\le x\le b).$$

引导学生通过导数的定义进行证明，用一系列数学问题串联起来，重建知识产生的过程，让学生理解知识点从何而来。欲证积分上限函数的导数等于被积函数本身，根据现有知识，只能从导数的定义出发对其证明，所以可以通过求增量，算比值，求极限的三部曲对其进行证明。

证明 设 $x,x+\Delta x\in[a,b]$，那么

$$\begin{aligned}\Phi'(x)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t+\int_x^a f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}(\xi\text{介于}x\text{与}x+\Delta x\text{之间})\\&=\lim_{\xi\to x}f(\xi)\\&=f(x).\end{aligned}$$

左端点右可导和右端点左可导可用定义类似进行证明。

根据大纲要求，对刚接触到积分上限函数的学生而言，主要的教学目标之一便是要让他们运用该知识点对积分上限函数求导和求极限，并且能够熟练运用复合函数求导的法则，推导积分上限复合函数的求导公式。

1) 对于复合类型，以上限为复合函数来看，巧妙引导学生采取形变意不变的求导方式，先将上限看成整体，再逐步按照一般函数求导类型计算，最后总结出一个通用的式子，引导学生怎样计算的同时也提醒学生如果记不住就按照这种形变意不变的思维，也就形成公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t\underline{\underline{u=\varphi(x)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^u f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\int_a^u f(t)\mathrm{d}t\right)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)u'=f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

同时，提醒学生怎样将变下限的求导类型正确写出来。

2) 如果是上下限均不是固定数的类型，引导学生一起计算，利用中间过度常量，将整体拆分称一个变上限和一个变下限的类型，再将两者分别求导，最后总结出公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^{b(x)}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{a(x)}f(t)\mathrm{d}t\right]=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x).$$

为了让学生巩固求导公式(1)和(2)，以及主动回应引例中的极限问题是否有解，下面将从简到繁，讲解三个例题，增加课堂教学的互动性。

例 1 计算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$。

解按照复合求导的第一种类型，先对整体求导，再与上限导数相乘，从而得出：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{1+x^4}\left(x^2\right)'=2x\sqrt{1+x^4}.$$

例 2 计算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\cos x}^{\sin x}t^2\mathrm{d}t$。

解 按照复合求导的第二种类型，先引入中间常量拆分原问题，然后分别对每一个整体求导，再与上下限导数相乘，从而得出：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\cos x}^{\sin x}t^2\mathrm{d}t=\left(\cos x\right)^2\left(\sin x\right)'-\left(\sin x\right)^2\left(\cos x\right)'=\cos^3 x+\sin^3 x.$$

上面已经给出了求导的基本形式，下面就要以实际问题作为加深印象的工具，让学生在活跃的课堂中体会学习与生活融洽的糅合在一起，引导他们正确面对问题，不要以别人的眼光看待自己，更不要人云亦云，全心全意做好各项工作，用努力学习掌握理论知识来武装自己，更好地为国家服务。

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$.

分析通过观察知道，被积函数属于连续型，同时当自变量趋于零时，$\cos x$ 趋于 1，由此又使用了定理 1 的证明里边用到的中值定理，得出该式分子部分趋于零，而分母部分直观上可见是趋于零的，因此该极限属于 $\frac{0}{0}$ 的未定式，故可选择洛必达法则进行求解。于是第一步便是分别对分数线上下的函数求导，利用前面的第一种类型，并结合极限的几个重要公式得出最终结果。

解 通过分析，正确使用每一步，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x\cdot\mathrm{e}^{-\cos^2 x}}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\mathrm{e}^{-\cos^2 x}=-\frac{1}{2\,\mathrm{e}}.$$

通过例 3 的讲解，主动回应了引例中极限是有解的，从而引申出“人生无解，此题有解”，陪养学生勇于求真务实，脚踏实地的科研态度和积极探索，大胆创新的科学思想，并能够结合实际加以灵活运用的实践能力，将思想政治教育自然地融入到课程的教学中，润物细无声地引导学生形成积极，向上的核心价值观。同时，正确培养学生在面对问题时能够用于寻找自己的处理方式，不被别人牵着鼻子走，特别是在这个网络十分发达的时代，正确对待网络舆论，敢于攀登追求真理。

4. 积分上限函数的意义

定理 1 是在被积函数连续的条件下证明得到的，实际上也就证明了“连续函数的原函数必存在”的结论，故可以得到原函数的存在定理。

定理 2 [4] 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则对 $x\in[a,b]$，积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。

该定理表明连续函数 $f(x)$ 是另外一个函数的导数，即 $\Phi'(x)=f(x)$，沟通了导数与积分这两个概念，最终表明积分和微分这两个过程互为逆运算，也就是可以通过不定积分的方法来计算定积分，有利于简化定积分的计算，促进对后续牛顿—莱布尼茨公式的学习。

5. 教学总结

本节课讲授了积分上限的函数及其导数。通过定积分定义了一个新的函数，增强学生在原有函数概念学习下的知识迁移能力。积分上限函数的导数等于它的被积函数，通过这一性质找到了定积分和导数之间的关系，为后续证明微积分的精髓－牛顿－莱布尼茨公式奠定了坚实的理论基础。通过“真问题、过程性、互动性”三方面的教学设计使学生在课堂学习过程中不仅仅获得知识的提升，而且在分析问题能力，解决问题的能力，以及价值观等方面都有所提升，将课程思政真正融入到高等数学的课堂实际教学中，将数学学习与思想政治学习有机的结合，充分发挥了课堂教学是教书育人主战场的先天优势，增加了学生对“知识、能力、价值”的获得感。

参考文献

[1] 新华网. 习近平在全国高校思想政治工作会议上发表重要讲话[EB/OL]. http://dangjian.people.com.cn/gb/n1/2016/1209/c117092-28936962.html, 2016-12-08.

[2] 何青玉, 陈建华. 变上限积分函数理解水平调查研究[J]. 赤峰学院学报, 2019, 35(3): 7-10.

[3] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014: 238-240.

[4] 吴赣昌. 微积分[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2017: 214-216.