Advances in Education 教育进展, 2022, 12(4), 1196-1204
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.124187

Hans汉斯

若干多角和三角函数公式

——从高中三角函数说起

王双特[1]，于恒国[2]，刘环艺[2]，陈艳梅[1]

[1]乐清市柳市镇第三中学，浙江 温州
[2]温州大学数理学院，浙江 温州

收稿日期：2022年3月17日；录用日期：2022年4月18日；发布日期：2022年4月25日

摘 要

本文通过数学归纳法等给出了若干多角和三角函数展开式，即多角和的正弦、余弦和正切函数展开式。基于此我们还给出了若干相应的公式，如对**Machin**公式的推广。总之，本文对于高中阶段三角函数的教学和认识有一定的辅助作用。

关键词

三角函数，数学归纳法，多角和

Some Formulas of Trigonometric Functions with Multi-Angles

—Starting from Trigonometric Functions in Senior High School

Shuangte Wang[1], Hengguo Yu[2], Huanyi Liu[2], Yanmei Chen[1]

[1]Yueqing Liushi No. 3 Middle School, Wenzhou Zhejiang
[2]College of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang

Received: Mar. 17th, 2022; accepted: Apr. 18th, 2022; published: Apr. 25th, 2022

Abstract

With the mathematical induction and other methods at hand, this paper presentes some expressions of trigonometric functions with multi-angles, *i.e.* expressions of the sine, cosine and tangent functions. Based on these, we also give some corresponding formulas, for instance, the generalized Machin formulae. Above all, this paper plays an auxiliary role in the teaching and understanding of

文章引用: 王双特, 于恒国, 刘环艺, 陈艳梅. 若干多角和三角函数公式[J]. 教育进展, 2022, 12(4): 1196-1204.
DOI: 10.12677/ae.2022.124187

trigonometric function in senior high school.

Keywords

Trigonometric Function, Mathematical Induction, Summation with Multi-Angles

1. 引言

中学阶段，学生已经熟练掌握和运用两角和与差的正弦，余弦和正切公式，至于诱导公式、半角公式和二倍角公式，本质上来说都是上述和差公式的特例和推广。但是对于多角和情形，一般的资料中较少涉及，尽管涉及倍角和三角函数的若干结论可在数学手册和教科研论文中出现[1]-[6]，如三倍角和四倍角公式在教材中作为延申阅读。

由于一些恒等式的引入，如 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，倍角和三角函数公式展开后可以写成多种形式。为此，本文对这方面问题作深入研究和探讨，并借助于数学归纳法给出相应结果。安排如下：首先，采用复变函数中的 Euler 公式和螺旋归纳法分别证明多角和正弦、余弦函数公式，同时用矩阵法证明理论上可得上述公式，并且奇数个角正弦、余弦函数展开式存在相同的结构，这是对相关文献的补充；其次，利用归纳法给出多角和正切函数公式，多数文献中并未提及；最后是总结和讨论，并将本文结果推广到双曲正弦、余弦函数中。

2. 多角和正弦、余弦函数公式

这里首先按照奇、偶数的情况分别给出关于正弦、余弦三角函数的展开公式，即如下定理。

定理 1：对于任意的 $x_i\left(i=1,\cdots,n\right)$ 和正整数 n，有

$$\sin\left(\sum_{i=1}^{2n}x_i\right)=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{2l+1}\in J_{2l+1}^{2n}}\left(\cos x_1\cdots\sin x_{i_1}\cdots\sin x_{i_{2l+1}}\cdots\cos x_{2n}\right),\tag{1a}$$

$$\sin\left(\sum_{i=1}^{2n+1}x_i\right)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{2l+1}\in J_{2l+1}^{2n+1}}\left(\cos x_1\cdots\sin x_{i_1}\cdots\sin x_{i_{2l+1}}\cdots\cos x_{2n+1}\right),\tag{1b}$$

$$\cos\left(\sum_{i=1}^{2n}x_i\right)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{2l}\in J_{2l}^{2n}}\left(\sin x_1\cdots\cos x_{i_1}\cdots\cos x_{i_{2l}}\cdots\sin x_{2n}\right),\tag{1c}$$

$$\cos\left(\sum_{i=1}^{2n+1}x_i\right)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{2l}\in J_{2l+1}^{2n+1}}\left(\sin x_1\cdots\cos x_{i_1}\cdots\cos x_{i_{2l}}\cdots\sin x_{2n+1}\right),\tag{1d}$$

其中加括号 $\left(\cos x_1\cdots\sin x_{i_1}\cdots\sin x_{i_{2l+1}}\cdots\cos x_{2n}\right)$ 仅表示求和的各项，记号

$$J_k^N=\left\{\left(i_1,i_2,\cdots,i_k\right)|i_l\left(l=1,2,\cdots,k\right)\in I,1<2<\cdots<i_1<\cdots<i_k<\cdots<N,i_{h_1}\neq i_{h_2}\left(h_1\neq h_2\right)\right\},$$

而指标集 $I=\{1,2,\cdots,N\}$。

证明 1：首先利用复变函数中的 Euler 公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 进行证明，考虑

$$\begin{aligned}\sin\left(\sum_{j=1}^{2n}x_j\right)&=\frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{2n}x_j\right)-\exp\left(-i\sum_{j=1}^{2n}x_j\right)\right]\\&=\frac{1}{2i}\left[\prod_{j=1}^{2n}\exp\left(ix_j\right)-\prod_{j=1}^{2n}\exp\left(-ix_j\right)\right]\\&=\frac{1}{2i}\left[\prod_{j=1}^{2n}\left(\cos x_j+i\sin x_j\right)-\prod_{j=1}^{2n}\left(\cos x_j-i\sin x_j\right)\right].\end{aligned}$$

现定义 $A_n=\prod_{j=1}^{2n}\left(\cos x_j+i\sin x_j\right)=a_{2n}+ib_{2n}$，则 $\sin\left(\sum_{j=1}^{2n}x_j\right)=b_{2n}=\mathrm{Im}\left(A_{2n}\right)$。注意奇数个 i 相乘才有虚部，故虚部为

$$b_{2n}=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{2l+1}\in J_{2l+1}^{2n}}\left(\cos x_1\cdots\sin x_{i_1}\cdots\sin x_{i_{2l+1}}\cdots\cos x_{2n}\right).$$

类似的还可求出 $\sin\left(\sum_{i=1}^{2n+1}x_i\right)$，$\cos\left(\sum_{j=1}^{2n}x_j\right)$ 及 $\cos\left(\sum_{j=1}^{2n+1}x_j\right)$，因为

$$\sin\left(\sum_{j=1}^{2n+1}x_j\right)=\mathrm{Im}\left(A_{2n+1}\right),\quad\cos\left(\sum_{j=1}^{2n}x_j\right)=\mathrm{Re}\left(A_{2n}\right),\quad\cos\left(\sum_{j=1}^{2n+1}x_j\right)=\mathrm{Re}\left(A_{2n+1}\right).\ \blacksquare$$

证明 2：这里对 n 采用螺旋归纳法进行证明。显然当 $n=1$ 和 2 时已经成立。假设取 n 时公式(1a)~(1d)均成立，现取 $n+1$，以(1a)为例，展开有

$$\begin{aligned}\sin\left(\sum_{i=1}^{2n+1}x_i\right)&=\sin\left(\sum_{i=1}^{2n}x_i\right)\cos x_{2n+1}+\cos\left(\sum_{i=1}^{2n}x_i\right)\sin x_{2n+1}\\&=\left[\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{2l+1}\in J_{2l+1}^{2n}}\left(\cos x_1\cdots\sin x_{i_1}\cdots\sin x_{i_{2l+1}}\cdots\cos x_{2n}\right)\right]\cos x_{2n+1}\\&\quad+\left[\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{2l}\in J_{2l}^{2n}}\left(\sin x_1\cdots\cos x_{i_1}\cdots\cos x_{i_{2l}}\cdots\sin x_{2n}\right)\right]\sin x_{2n+1}.\end{aligned}$$

显然分别取 $l=0$ 和 $l=n$ 可得仅含有 $\sin x_{i_1}$ 的求和项 $\sum_{i_1=1}^{2n+1}\left(\cos x_1\cdots\sin x_{i_1}\cdots\cos x_{2n+1}\right)$；取一般的 l 可得含 $\cos x_1\cdots\sin x_{i_1}\cdots\sin x_{i_{2l+1}}\cdots\cos x_{2n+1}$ 的 $C_{2n}^{2l+1}+C_{2n}^{2n-2l}=C_{2n+1}^{2l+1}$ 项求和表达式：

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{2l+1}\in J_{2l+1}^{2n}}\left(\cos x_1\cdots\sin x_{i_1}\cdots\sin x_{i_{2l+1}}\cdots\cos x_{2n+1}\right);$$

而 $\sin x_1\cdots\sin x_{2n+1}$ 仅有一项且系数为 $(-1)^n$。总之，(1a)在取 $n+1$ 时也成立。类似的，其余三个展开式也成立。$\blacksquare$

定理 1 的证明 2 可加深对于数学归纳法的认识，它使得学生和教师更多的了解到，不仅限于书本教材中所阐述的“一维”形式的数学归纳法，即还可以存在“二维”形式的归纳法。由(1b)和(1d)知三角和的正弦、余弦公式分别为

$$\begin{aligned}\sin\left(x_1+x_2+x_3\right)&=\sin x_1\cos x_2\cos x_3+\cos x_1\sin x_2\cos x_3\\&\quad+\cos x_1\cos x_2\sin x_3-\sin x_1\sin x_2\sin x_3,\end{aligned}\tag{2a}$$

$$\cos\left(x_1+x_2+x_3\right)=\cos x_1\cos x_2\cos x_3-\sin x_1\sin x_2\cos x_3 \\ -\sin x_1\cos x_2\sin x_3-\cos x_1\sin x_2\sin x_3. \tag{2b}$$

显然从(1a)~(1d)右边项数可验证一个恒等式 $C_N^0+C_N^2+C_N^4+\cdots=C_N^1+C_N^3+C_N^5+\cdots$。

如果按文献[7]，取平面上绕定点(原点)O 的旋转变换矩阵 $\Phi(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$，$t\in\mathbf{R}$，由同态映射 $\Phi(\alpha)\Phi(\beta)=\Phi(\alpha+\beta)$ 可知 $A:=\Phi\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\Phi(x_i)$。不妨设 $\Phi(\alpha)$ 在可逆矩阵 P 下有相似表示 $\Phi(\alpha)=P\begin{pmatrix}e^{i\alpha} & \\ & e^{-i\alpha}\end{pmatrix}P^{-1}$，因此可验证同态映射。将其展开为矩阵分量形式可得 $\sin\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=A_{21}=-A_{12}$ 及 $\cos\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=A_{11}=\frac{1}{2}trA$，例如取 $n=3$ 验证(2)。因此这是公式(1)的矩阵表述，它将一个三角函数问题转化为线性代数问题。由上述同态映射还可知 $\Phi\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\prod_{k=1}^{n}\Phi\left(x_{i_k}\right)$，其中 $\mathsf{P}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}:x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的某个排列，即矩阵 A 关于这些变量具有交换对称性，从几何上看与旋转顺序无关。

总之，利用复变函数的 Euler 公式或螺旋归纳法均可给出公式(1)，而采用矩阵的方法在理论上是可以给出结论。

特别的，对于(1d)，取出系数 $(-1)^n$ 并作变换 $\sin\leftrightarrow\cos$，等号右边转化为

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{2l}\in J_{2l+1}^{2n+1}}\left(\cos x_1\cdots\sin x_{i_1}\cdots\sin x_{i_{2l}}\cdots\cos x_{2n+1}\right)=\sin\left(\sum_{i=1}^{2n+1}x_i\right),$$

因此有(1b)和(1d)的对应关系：$\sin\left(\sum_{i=1}^{2n+1}x_i\right)\xleftrightarrow{\times(-1)^n,\sin\leftrightarrow\cos}\cos\left(\sum_{i=1}^{2n+1}x_i\right)$。文献[8]用数学归纳法给出了奇倍角情形的结论，但未给出 $\sin\left[(2n+1)x\right]$ 和 $\cos\left[(2n+1)x\right]$ 的具体展开式。由定理 1 有：

推论 1：对于任意的 x 和非负整数 n，有

$$\sin(2nx)=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l C_{2n}^{2l+1}(\sin x)^{2l+1}(\cos x)^{2n-2l-1}, \tag{3a}$$

$$\sin\left[(2n+1)x\right]=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l C_{2n+1}^{2l+1}(\sin x)^{2l+1}(\cos x)^{2n-2l}; \tag{3b}$$

$$\cos(2nx)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l} C_{2n}^{2l}(\cos x)^{2l}(\sin x)^{2n-2l}, \tag{3c}$$

$$\cos\left[(2n+1)x\right]=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l} C_{2n+1}^{2l+1}(\cos x)^{2l+1}(\sin x)^{2n-2l}. \tag{3d}$$

其中 $C_n^k=\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 指组合数。█

推论 1 还可通过 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 得到，见文献[9]及一些数学手册，其中文献[9]详细叙述了历史上关于 n 倍角正弦、余弦和正切函数的和式与积式。显然(3b)和(3d)可转化为同名三角函数的展开式，例如

$$\sin\left[(2n+1)x\right]=\sum_{l=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-l}(-1)^{l+i} C_{2n+1}^{2l+1}C_{n-l}^{i}(\sin x)^{2(l+i)+1},$$

再取 $l+i=\alpha$，$i=\beta$ 有

$$\sin\left[(2n+1)x\right]=\sum_{\alpha=0}^{n}(\sin x)^{2\alpha+1}\cdot\left[(-1)^{\alpha}\sum_{\beta=0}^{\alpha}C_{2n+1}^{2(\alpha-\beta)+1}C_{n-(\alpha-\beta)}^{i}\right]:=\sum_{\alpha=0}^{n}a_{2\alpha+1}(\sin x)^{2\alpha+1}. \tag{4}$$

而 $\cos\left[(2n+1)x\right]=(-1)^{n}\sum_{\alpha=0}^{n}a_{2\alpha+1}(\cos x)^{2\alpha+1}$。如果(4)的两边对 x 求导，并比较系数就有恒等式(系数 a_{2k+1} 的递推式) $a_{2k+1}=(-1)^{k+n}\sum_{\alpha=k}^{n}\frac{2\alpha+1}{2n+1}a_{2\alpha+1}C_{\beta}^{k}$，便于倍角和公式的推导。文献[10]以图表和举例的方式讨论了系数的记忆方法。由(3c)~(3d)可导出迪克森引理，即对每个正整数 n，存在首 1 整系数多项式 $D_n(x)$ 使得 $2\cos(nx)=D_n(2\cos x)$。事实上，(3a)~(3d)均可化为同名三角函数的展开式，另见文献[11]中用数学归纳法给出的结论。

由此可以得到若干结果。例如，(1b)的另一个形式为

$$\sin\left(\sum_{i=1}^{2n+1}x_i\right)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{2l+1}\in J_{2l}^{2n+1}}\left(\sin x_1\cdots\cos x_{i_1}\cdots\cos x_{i_{2l}}\cdots\sin x_{2n+1}\right), \tag{5}$$

在(3a)~(3c)和(5)中分别取 $\sin\frac{n\pi}{2}$，$\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}$，$\cos\frac{n\pi}{2}$ 和 $\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}$，有恒等式

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l}C_{2n}^{2l+1}=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^{n}r(n),\ \sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}C_{2n+1}^{2l+1}=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^{n},\\&\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l}C_{2n}^{2l}=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^{n}r(n+1),\ \sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}C_{2n+1}^{2l}=(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}2^{n},\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $r(n)=n-\left[\frac{n}{2}\right]$ 为除 2 的余数，方括号表示下取整。再从(3a)出发，改写各项为

$$(\sin x)^{2l+1}(\cos x)^{2n-2l-1}=\sin x\sum_{l'=0}^{l}(-1)^{l'}C_{l}^{l'}(\cos x)^{2n-2l+2l'+1},$$

并在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上积分一次就有恒等式

$$\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{l'=0}^{l}(-1)^{l+l'}\frac{C_{2n}^{2l+1}C_{l}^{l'}}{2n-2l+2l'}=\frac{r(n)}{n}. \tag{7}$$

类似的，消去(3b)中的 $\cos x$ 就有恒等式

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{l'=0}^{n-l}(-1)^{l+l'}C_{2n+1}^{2l+1}C_{n-l}^{l'}\frac{(2l+2l')!!}{(2l+2l'+1)!!}=\frac{1}{2n+1}. \tag{8}$$

最后，以上结果(3)还可用于讨论 $\sin\left(\frac{m}{n}\pi\right)$ 和 $\cos\left(\frac{m}{n}\pi\right)$ 是否为无理数，如文献[12]表明 $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)$ 等是无理数，文献[13]的结论六可由推论 1 给出。进一步的，我们得到关于三角正弦、余弦函数值的高次方程，这样就将圆内接正多边形尺规作图法的研究转换为相应的代数问题，其无理性有助于分析尺规作图法的可行性，不失为一种思路。类似于上述迪克森引理，由正余弦倍角公式所涉及的展开式可转化为切比雪夫多项式，而这一多项式及其系数又存在一些有趣的性质[14] [15]，对于数值分析课程及逼近理论的学习起到过渡作用。

3. 多角和的正切函数公式

其次，另一个结论是关于多角和的正切函数公式。如果我们按定义用正弦除以余弦的方式，即用定理 1 的结果直接处理正切函数，将导致问题更复杂化，不便于得到和定理 1“类似”的结论。下面的定理 2 则从初等对称多项式的角度阐述相应结论，但同样要区分奇偶性。

定理 2： 对于任意的 $\theta_i\left(i=1,\cdots,n\right)$ 和正整数 n，在定义域内有 $\tan\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)=T_n=\dfrac{F_n}{G_n}$，其中

$$F_n:=F_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{l=0}^{u_n}\left(-1\right)^l\sigma_{2l+1}^{(n)},\quad G_n:=G_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{l=0}^{v_n}\left(-1\right)^l\sigma_{2l}^{(n)}. \tag{9}$$

而 $\sigma_k^{(n)}:=\sigma_k^{(n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\left(k=0,1,\cdots,n\right)$ 均为关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式，即

$$\sigma_0^{(n)}=1,\quad \sigma_1^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \sigma_2^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}x_ix_j,\quad \cdots,\quad \sigma_n^{(n)}=\prod_{i=1}^{n}x_i, \tag{10}$$

相应的 $x_i=\tan\alpha_i$，上限 $u_n=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 和 $v_n=\left[\dfrac{n}{2}\right]$。

证明： 同样采用归纳法证明。n 取 1 和 2 时成立，假设 n 取 s 时已经成立，对于 n 取 $s+1$，分两种情况考虑。

若 s 为偶数，设 $s=2k$，则

$$\tan\left(\sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i\right)=\frac{F_s+x_{s+1}G_s}{G_s-x_{s+1}F_s}=\frac{\sum_{l=0}^{k-1}\left(-1\right)^l\sigma_{2l+1}^{(s)}+x_{2k+1}\sum_{l=0}^{k}\left(-1\right)^l\sigma_{2l}^{(s)}}{\sum_{l=0}^{k}\left(-1\right)^l\sigma_{2l}^{(s)}+x_{2k+1}\sum_{l=0}^{k}\left(-1\right)^l\sigma_{2l-1}^{(s)}}=\frac{F_{s+1}}{G_{s+1}}.$$

若 s 为奇数，设 $s=2k+1$，则

$$\tan\left(\sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i\right)=\frac{F_s+x_{s+1}G_s}{G_s-x_{s+1}F_s}=\frac{\sum_{l=0}^{k}\left(-1\right)^l\sigma_{2l+1}^{(s)}+x_{2k+2}\sum_{l=0}^{k}\left(-1\right)^l\sigma_{2l}^{(s)}}{\sum_{l=0}^{k}\left(-1\right)^l\sigma_{2l}^{(s)}+x_{2k+2}\sum_{l=1}^{k+1}\left(-1\right)^l\sigma_{2l-1}^{(s)}}=\frac{F_{s+1}}{G_{s+1}}.$$

因此 n 取 s 时也成立，故结论成立。$\blacksquare$

显然定理 2 完全涵盖了过去的正切函数的两角和差公式，它以一种对称的形式表明这个结果的优美和简洁。由定理 2 有三角和正切公式

$$\tan\left(\alpha+\beta+\gamma\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\tan\gamma-\tan\beta\tan\gamma}. \tag{11}$$

进一步的，有倍角和公式和反正切函数加法公式，即：

推论 2： 对于任意的 θ 和正整数 n，在定义域内有

$$\tan\left(n\theta\right)=\frac{\sum_{l=0}^{u_n}\left(-1\right)^l C_n^{2l+1}\left(\tan\theta\right)^{2l+1}}{\sum_{l=0}^{v_n}\left(-1\right)^l C_n^{2l}\left(\tan\theta\right)^{2l}}. \tag{12}$$ $\blacksquare$

推论 3： 在定义域内有

$$\sum_{i=1}^{n} \arctan A_i = \arctan\left[T_n\left(A_1, A_2, \cdots, A_n\right)\right] + k\left(A_1, A_2, \cdots, A_n\right)\pi . \tag{13}$$

其中 $k\left(A_1, A_2, \cdots, A_n\right)$ 为待定整数。■

注意由推论 2 可证明 $\tan\left[(2n+1)\theta\right] = f_n(\tan\theta)$，$\cot\left[(2n+1)\theta\right] = f_n(\cot\theta)$，其中函数

$$f_n(t) = \frac{\sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_{2n+1}^{2l+1} t^{2l+1}}{\sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_{2n+1}^{2l} t^{2l}} .$$

即正切、余切函数的奇倍数展开形式完全相同，与文献[8]的推论 1 一致，但文中用数学归纳法进行证明，未给出表达式。由推论 3 可验证关于圆周率 π 的若干公式，如：

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \quad \text{(Machin 公式)},$$

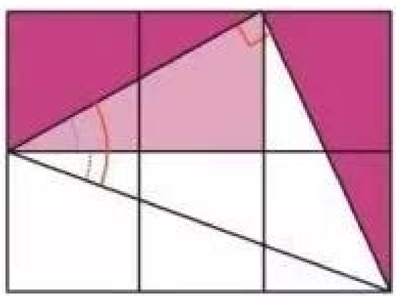
$$\frac{\pi}{4} = 5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79} \quad \text{(Euler 反正切型公式) [16] [17]},$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} \quad \text{(赫顿公式) [16]},$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{70} + \arctan\frac{1}{99} ,$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} \quad \text{(斯特拉尼斯基公式) [16]。}$$

一般的 Machin 公式有 $n\cdot\arctan\frac{1}{B} + \arctan\frac{1}{A_n} = \frac{\pi}{4}$，其中 $A_{2n} = \frac{\varphi_{2n}(B)}{\varphi_{2n}(-B)}$，$A_{2n+1} = -\frac{\varphi_{2n+1}(B)}{\varphi_{2n+1}(-B)}$，而函数 $\varphi_n(B) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} C_n^k B^{n-k}$。一个简单的反正切恒等式为 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$，其格点图示如下(图 1)：

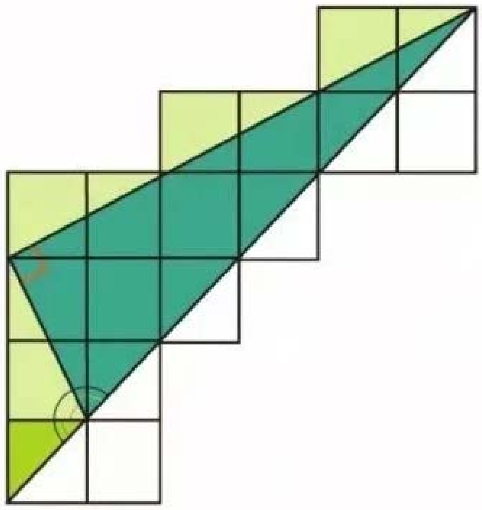


盘点数学里十大不需要语言的证明，果壳网(Guokr.com)，2011-08-08。

Figure 1. Figure of $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

图 1. $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ 图示

注意到推论 3，文献[18]说明了何种条件下 $k\left(A_1, A_2, \cdots, A_n\right)$ 的取值。恒等式 $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$ 则表明此时 $k\left(A_1, A_2, \cdots, A_n\right) = 1$，即辐角取值问题，相应格点图示如下(图 2)：



盘点数学里十大不需要语言的证明，果壳网
(Guokr.com)，2011-08-08。

Figure 2. Figure of $\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\pi$
图 2. $\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\pi$ 图示

定理 2 的结论表明了多项式理论的重要性。但现行数学专业高等代数课程的一些教材中对于多项式理论的介绍和探讨往往较少，还需要学生选修或者自主寻找相关资料，这就使得数学的整体性被割裂。而推论 2 和推论 3 可看成是对上述定理的验证。

4. 总结和讨论

个别学有余力的学生可能会提出关于多角和三角函数的问题，一些学生甚至疑惑于数学教材为何不增加这方面知识点，本文的结果有助于中学生深入了解三角函数和差公式，也有助于三角函数的教学。对于即将进入大学深造的中学生而言，定理 1 的证明有助于其对于数学归纳法和复数的重新梳理认识。此外，不难发现，作代换 $\sin\to sh$， $\cos\to ch$ 后，双曲正弦、余弦函数也有类似于(1)的多角和公式，在此不做详述，至于双曲正切函数，完全可以类推。这也启发我们，如果两个函数 $f(\alpha)$ 和 $g(\alpha)$ 满足关系

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta),\quad g(\alpha+\beta)=g(\alpha)g(\beta)-f(\alpha)f(\beta),$$

那么，是否有类似于(1)的公式？至于一个抽象函数 $f(\alpha)$ 满足正切函数和差形式公式时，是否有类似结论，我们则以常微分方程课程中的一道习题来反衬出定理 2 的趣味性：

例题： 求具有性质 $x(t+s)=\dfrac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$ 的函数 $x(t)$，已知 $x'(0)$ 存在。

在当前“减负提质”口号和“双减”政策的大背景下，中学教师在讲解时除了告诉学生要牢记正余弦三角函数的和差公式，更应该让学生明白后续的诱导公式本质上来源于这两个公式，并以此深刻领会到数学的相互融合与贯通，而不是仅仅枯燥的背诵。既要让学生打好坚实的数学基础，又要注重和理解数学课程的实际应用，这是值得任课教师来深入探讨的。当然，从学生的角度看，也要避免过度超前知识点的引入，如奥数竞赛培训中涉及一些大学数学知识，同时结合本文的内容，应进一步启发和激励学生深入探索背后隐含的有趣数学结论。从教师的角度看，这有助于提升其基本数学素养和数学能力，有助于中学数学命题的编制。

尤其注意的是，在当前人才战略的大背景下，教师已不再是过去传统意义上传道授业解惑者，更应

该具备广博的知识面和储备科研方向的基本素质。在信息时代的高速发展大形势下，学生已不再是过去只依靠教师才能学习的受教者，网络的使用使得学习更加多元化。数学教师也不应仅仅局限于中小学数学的狭窄知识面，需要涉猎更多大学阶段相关数学知识，要懂得不断学习和终身学习的意义，以此才能在教学中站稳讲台，并充分带动其它课程的建设，例如，与中学物理课程的紧密结合。

致　谢

作者感谢编辑和审稿人的工作，感谢赵敏老师和戴传军老师，感谢张茂同老师和赵淑静老师，感谢陈谱锦老师。

参考文献

[1] 李昌成. 三倍角公式教学探究[J]. 数理化学习(高中版), 2020(5): 23-25.
[2] 吕二动. 活跃在竞赛和自招试题中的三倍角公式的应用[J]. 数理化学习(高一二版), 2021(1): 20-23.
[3] 许元龙. n 倍角三角函数公式的推导及应用[J]. 试题与研究·教学论坛, 2015(17): 37.
[4] 林如翰. 正余弦 n 倍角公式及其应用[J]. 数理化解题研究, 2018(19): 8-9.
[5] 刘康宁. 应用倍角公式解竞赛题[J]. 中学数学教学参考, 2015(1): 131-133.
[6] 刘小宁. 几个不常见的三角多倍角公式[J]. 武汉工程职业技术学院学报, 2012, 24(4): 75-77.
[7] 张占文, 李小骞, 贾金刚. 一组三角函数公式的证明[J]. 河北理科教学研究, 2012(6): 52-53.
[8] 董亚谋. 多倍角三角函数展开式的一组有趣的性质[J]. 价值工程, 2011, 30(26): 207.
[9] 史嘉. 三角函数 n 倍角公式述评[J]. 数学通讯: 教师阅读, 2018(10): 33-34.
[10] 吕荣德. 正弦函数 Sin nx 的三角形展开法[J]. 华北矿业高等专科学校学报, 2000(s1): 86-87.
[11] 陆元鸿. 正弦和余弦的多倍角公式及其应用[J]. 大学数学, 2013, 29(3): 101-107.
[12] 杨宪立, 纪保存. 度数为整数的正余弦三角函数值的无理性证明[J]. 濮阳职业技术学院学报, 2016, 29(2): 90-91.
[13] 王全. 正余弦函数值的有理性研究[J]. 中学数学研究(上), 2015(2): 41-42.
[14] 王君丽. 余弦倍角公式和切比雪夫多项式[J]. 阜阳师范学院学报(自然科学版), 2008, 25(4): 21-23.
[15] 吴康, 龙开奋. 关于切比雪夫多项式的一些研究[J]. 中学数学研究, 2006(3): 27-30.
[16] 罗杰·B·尼尔森. 数学写真集(第 4 季)——直观思考的进阶[M]. 北京: 机械工业出版社, 2019: 75-77.
[17] 魏静, 邓勇. 欧拉反正切公式的一个新证明[J]. 伊犁师范学院学报(自然科学版), 2010(2): 14-16.
[18] 张俊杰, 吴康. 反正切和式的裂项相消法佳构[J]. 中学数学研究, 2011(9): 42-43.