Advances in Education 教育进展, 2022, 12(6), 2024-2029
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.126308

Hans汉斯

数学分析在高等代数与解析几何解题中的应用

周秀香

岭南师范学院数学与统计学院，广东 湛江

收稿日期：2022年5月21日；录用日期：2022年6月20日；发布日期：2022年6月27日

摘 要

数学分析是集科学性、严密性、连贯性于一体，其丰富的内容和精深的思想为后续各学科理论学习提供了坚实的基础。本文利用数学分析思想和方法解答高等代数和解析几何中的一些典型例题，对比求解方法的难易程度，探讨不同的解题方法和思维方式。这样不仅有利于提高教师的教学和研究水平，而且能够提高学生综合解题能力。

关键词

数学分析，高等代数，解析几何

Some Applications of Mathematical Analysis in Higher Algebra and Analytic Geometry

Xiuxiang Zhou

School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong

Received: May 21st, 2022; accepted: Jun. 20th, 2022; published: Jun. 27th, 2022

Abstract

Mathematical analysis has scientific, rigour and coherence. Its rich contents and profound thinking provide a solid foundation for the follow-up theoretical study of various disciplines. In this paper, we will focus on the applications of mathematical analysis method in higher algebra and analytic geometry and compare different methods in order to explore the thinking way. It can help improve teachers' teaching level and increase students' ability to solve problems.

文章引用: 周秀香. 数学分析在高等代数与解析几何解题中的应用[J]. 教育进展, 2022, 12(6): 2024-2029.
DOI: 10.12677/ae.2022.126308

Keywords

Mathematical Analysis, Higher Algebra, Analytic Geometry

1. 引言

高等代数和解析几何不仅是大学数学专业的两门重要基础课程，而且广泛应用于生物、信息、工程等科学领域，已经成为现代科技必备的基础知识。高等代数的特点是内容抽象，方法独特，蕴含着更多的解题严密性和解题技巧。解题几何以空间解析几何为主体内容，通过向量建立坐标系，用代数的方法研究几何对象及几何对象之间的关系。高等代数课程内容包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、欧几里得空间、λ-矩阵等；解析几何主要研究二维实空间中的直线与二次曲线、三维实空间中的平面与二次曲面、空间曲线和空间曲面的位置关系、平移变换和旋转变换等。虽然这两门课程的主要内容和解题方法都有些差异，但它们之间仍存在密切的联系。部分教材将高等代数和解析几何两门课程融合起来，作为一门数学类专业的重要课程，既是中学代数与几何的延展和提升，又是学习近代数学的基础。将代数和几何结合起来讲授，强调代数为几何提供研究方法，几何为代数提供直观背景。

数学分析标志着数学从常量到变量的转折，也是思想方法上的一次变革。它通过运动变化的过程认识客观事物的本质。数学分析中常见的解题方法有定义法、定理法、构造法、递推法、辅助函数法等，解题思想有数形结合思想、转化和化归思想等。本文主要通过典型例题，探讨数学分析方法和思想在高等代数行列式的计算与证明、解析几何求解切线方程和切平面方程方面的应用，重点培养学生抽象思维、逻辑思维、综合解题等能力，为大学数学专业的学习者拓宽视野，领悟分析思想博大精深的内涵。

2. 数学分析方法在高等代数解题中的应用

2.1. 行列式的计算

行列式是线性方程组理论的一个重要组成部分，也是一种重要的数学工具。求行列式的值是高等代数中的一个重要内容，主要方法有定义法、性质法、降级法、化为三角形行列式的方法、化为范德蒙德行列式的方法、递推法、加边法、拆项法、数学归纳法等[1]。对于结构较为复杂的行列式，往往计算量很大。为了减少计算量，下面提供一种将函数求导运算和化上三角形行列式法相结合的解析方法。

例 2.1 设 a, b, c 是常数，计算行列式

$$D(t)=\begin{vmatrix} a & b & c & t \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+t \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+t \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+t \end{vmatrix}.$$

解：由行列式求导法则得，$D'(t)=\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ a & a+b & a+b+c & 1 \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 1 \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 1 \end{vmatrix}=0$。因此，由拉格朗日中值定理有

$$D(t)=D(0)=\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c \end{vmatrix}=a^4.$$

由上面的例子可以看出，对于某些结构复杂的行列式，用解析的方法求解便于抓住问题的实质。引入函数后利用导数求解，不仅减少了计算量，而且具有一般性，因为这种方法对于纯数字型行列式的计算也适用。举例来看，计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

不妨设函数

$$D(x)=\begin{vmatrix} x & 3 & 3 & 3 \\ -2 & x & 3 & 3 \\ -2 & -2 & x & 3 \\ -2 & -2 & -2 & x \end{vmatrix},$$

则所求为 $D(1)$。进而通过求导和积分运算便能很快计算出结果。当然，行列式的阶数越高，这种解析方法的优势就越明显。

2.2. 行列式的证明

矩阵是高等代数中一个主要的研究对象，基本内容有矩阵运算、几类特殊矩阵、矩阵可逆的条件、伴随矩阵的性质、矩阵秩的一般性质、矩阵的分块运算、初等矩阵、矩阵的标准形等。下面的例子利用取极限方法，将不可逆矩阵问题进行化归，进而解决某些行列式证明问题。

例 2.2 设 A*是 n 阶方阵 A 的伴随矩阵，证明 $|A^*|=|A|^{n-1}$。

证明：当 A 为可逆矩阵时，有 $AA^*=|A|E_n$。这里 E_n 表示 n 阶单位阵。两边取行列式并由行列式的性质得，$|A||A^*|=|A|^n$。进而，两边除以非零数 $|A|$ 可得 $|A^*|=|A|^{n-1}$。

当 A 为不可逆矩阵时，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<\varepsilon<\delta$ 时，矩阵 $A+\varepsilon E_n$ 为可逆矩阵[2] [3]。从而由第一段的证明有 $\left|(A+\varepsilon E_n)^*\right|=|A+\varepsilon E_n|^{n-1}$。注意等式两边皆是关于 ε 的连续函数。令 $\varepsilon\to 0^+$，则有 $|A^*|=|A|^{n-1}$。

小结：上面的例子表明，高等代数中的某些典型问题用自身的方法求解可能很难，或者无从下手。而运用数学分析的思想去讨论，问题迎刃而解。同样的方法可以证明以下结论：

1) 设 A 是 n 阶方阵 $(n\geq 2)$，则 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$。

2) 设 A,B,C,D 是 n 阶方阵且 $AC=CA$，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$。

例 2.3 [4] 求证在行向量长度有限的条件下，n 阶行列式 $A=|a_{ij}|$ 达到最大值的行向量两两相交。

分析：表面上是高等代数问题，实际是一个 $n\times n$ 个变量的条件极值问题，自然想到数学分析中的拉格朗日乘数法。

证明：根据行向量长度有限这一条件，对于任意 $i=1,2,\cdots n$，设 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=t_i$。记 Δ_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，且

$$L=\left|a_{ij}\right|-\lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^2-t_1\right)-\cdots-\lambda_n\left(\sum_{j=1}^{n}a_{nj}^2-t_n\right).$$

从而对函数 L 求导并令之为零，可得 $n\times n$ 个等式

$$L'_{a_{ij}}=\Delta_{ij}-2\lambda_i a_{ij}=0.$$

上式两边乘以 a_{kj} 并求和可得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\Delta_{ij}-2\lambda_i\sum_{j=1}^{n}a_{kj}a_{ij}=0.$$

显然，当 $k\neq i$ 时，$\lambda_i\sum_{j=1}^{n}a_{kj}a_{ij}=0$；当 $k=i$ 时，$A-2\lambda_i t_i=0$。因此，当 A 达到最大值时有 $\lambda_i\neq 0$。进而对于任意 $k\neq i$，有 $\sum_{j=1}^{n}a_{kj}a_{ij}=0$，即行向量两两相交。

每一门数学学科都有其特有的数学思想和方法。但是以上例子表明在高等代数中正确应用数学分析方法，既可以有效提高高等代数的教学质量和教学效率，又可以从高等数学学习中获得乐趣。

3. 数学分析方法在解析几何解题中的应用

著名数学家、数学教育家乔治•波利亚说过：“解题可以是人的最富有特征的活动，假如你想要从解题中得到最大的收获，你就应该在所做的题目当中去找到它的特征，那些特征在你以后求解其他问题时，能起到指导作用。”下面通过一些具体例子，介绍数学分析，特别是微分运算在解析几何中求距离和切平面问题的应用。

3.1. 距离问题

例 3.1 在抛物线 $y=x^2-2x-1$ 上求一点，使它到原点的距离最小，并求出最小值。

解：设 $P(x,y)$ 是抛物线上一点，则到原点的距离为 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(x^2-2x-1\right)^2}$。不妨设 $f(x)=|OP|^2=x^2+\left(x^2-2x-1\right)^2$，则 $f(x)=x^4-4x^3+3x^2+4x+1$。因此，

$$f'(x)=4x^3-12x^2+6x+4=4(x-2)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=2$，$x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，$x_3=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$。进一步求 f 二阶导数判断符号可得，抛物线上点 $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$ 到原点的距离最小，最小值为 $\sqrt{\frac{11-6\sqrt{3}}{4}}$。

小结：函数观点下的解析方法解题起到了化繁为简的效果，显然这一方法对于空间解析几何中的点到直线的距离问题也适用。本题目是曲线求最值问题，也可以转化为二元函数 $g(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $x^2-2x-1-y=0$ 下的最小值问题，进而利用拉格朗日乘数法求解。设拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(x^2-2x-1-y\right).$$

从而求导后得稳定点，进一步验证稳定点是否为极值点即可。

解析几何中除了两点间距离和点到直线的距离外，主要的距离度量还有点到平面的距离、异面直线间的最短距离、两平行平面间的距离和两平行直线间的距离等。从不同的角度分析问题，便会得到不同的解法。例如，点面距离可以直接套用公式，可以用垂足法，当然也可以用拉格朗日乘数法等等。在教

学中，采用一题多解能够活跃数学思维，开发创造灵感。

3.2. 方程问题

在高等数学的学习中，求曲线的切线方程和曲面的切平面方程是必须掌握的知识，但对于初学者掌握起来有一定的难度。随着学习的不断深入，掌握的工具越来越多，我们可以利用更简洁的方法解决这类问题。

例 3.2 求过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 (x_0,y_0) 的切线方程。

分析：本小题类型为过曲线上一点求切线方程。常规的方法是设点斜式直线方程，与椭圆方程联立消元得到一个一元二次方程，然后利用判别式为零求出斜率，最后写出切线方程。但常规方法的不足之处在于计算量比较大。注意到导数的几何意义是切线斜率，所以下面用导数法求曲线的切线。

解：将 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边对 x 求导，可得 $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$。因此，$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$。从而过 (x_0,y_0) 的切线斜率 $k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$。因此切线为

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0).$$

注意到 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$。故切线方程整理得 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$。

导数的几何意义使得分析与几何完美结合，通过切线实现了二者融合。在解析几何中，我们经常会遇到求二次曲面的切平面方程问题。[5]给出了求切平面方程的公式，而下面的例子将借助数学分析中的隐函数定理求解切平面方程问题，具体方法可以参考[6]。

例 3.3 求二次曲面 $F(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-4xy-4xz-4yz+2x+2y+2z+18=0$ 在点 $P_0(1,2,3)$ 的切平面方程。

解：由于方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 P_0 的某邻域内满足隐函数定理的条件，因此 $F(x,y,z)=0$ 在 P_0 处的切平面方程为

$$z-3=-\frac{F_x(1,2,3)}{F_z(1,2,3)}(x-1)-\frac{F_y(1,2,3)}{F_z(1,2,3)}(y-2).$$

整理得 $8x+5y+2z-24=0$。

解析几何作为高等师范院校数学专业的基础课程，它的学习对学生今后从事中学数学教学具有指导作用。因此，解析几何课程的核心在于让高师学生除了接受学术形态的数学知识，也要接受足够充分的教育形态的数学知识。数学分析方法的运用无论对基础数学的教学和研究，还是对未来数学教育工作者都具有重大意义。

4. 结束语

本文通过一些例题介绍了数学分析方法和思想在高等代数与解析几何解题中的应用。利用微分学的方法求解代数和几何中的问题，可以改变一些题目的解题方式，拓宽解题思路，训练思维的灵活性、敏捷性和创新性，提高分析问题和解决问题的能力，并能体验学科交叉的应用。一方面，数学分析的求解技巧还有很多，比如应用拉格朗日中值定理研究曲线试题，微分与积分运算处理多项式问题，无穷区间上的广义积分解决二次型问题等[7] [8]，本文的例子仅仅起抛砖引玉之用。另一方面，作为连接初等数学

与高等数学的桥梁，数学分析在大学数学后续学习中也有广泛的应用，如概率论、物理学等。在学习的过程中，只有注意各学科不同思想和方法的相互渗透，借鉴彼此的手段解决自身问题，学习者掌握的知识才不是孤立或者零散的片段，掌握的方法也不再是刻板的套路，而是系统的灵活的方法。

基金项目

教育部产学合作协同育人项目(No. 202002140018)，岭南师范学院2021年度校级教育教学研究和改革资助项目。

参考文献

[1] 张禾瑞, 郝炳新. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[2] 徐晓闯. 高等代数中的微积分方法[J]. 六安师专学报, 1999, 15(2): 22-24+71.

[3] 王莲花, 鞠红梅, 李战国. 数学分析在高等代数中的某些应用[J]. 河南教育学院学报, 2008, 17(3): 15-18.

[4] 林源渠, 方企勤. 数学分析解题指南[M]. 北京: 北京大学出版社, 2003.

[5] 吕林根, 许子道. 解析几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[6] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析上下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.

[7] 王宜静, 湛华平. 《数学分析》在后续课程中的几点应用[J]. 课程教育研究, 2012(21): 155.

[8] 王丽英, 孙慧静, 毛凯, 刘丹. “数列极限的概念”教学设计探索[J]. 教育进展, 2021, 11(6): 2068-2073. https://doi.org/10.12677/AE.2021.116320