Advances in Education 教育进展, 2022, 12(8), 3165-3173
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.128484

Hans汉斯

全国高考II卷数列试题解法探究及复习策略

陈燕妹，林诗游*

海南师范大学数学与统计学院，海南 海口

收稿日期：2022年7月29日；录用日期：2022年8月25日；发布日期：2022年8月31日

摘 要

全国II卷高考试题中常见的数列问题是关于数列通项公式求解以及数列求和的问题。在全国II卷历年高考数列试题中，对求解数列问题所需要的技巧灵活性和综合性要求逐年递增。论文应用了文献分析法总结归纳了全国II卷高考中常见的求解数列知识的方法并对其进行拓展，将2014年至2019年的解题方法整理并应用于新高考，并结合数列的教学实践以及解题经验，最后对全国II卷高考数列知识点的复习提出了几点建议。

关键词

数列，通项公式，文献分析

Solution Exploration and Review Strategy for Series Questions in the National College Entrance Examination Volume II

Yanmei Chen, Shiyou Lin*

School of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, Haikou Hainan

Received: Jul. 29th, 2022; accepted: Aug. 25th, 2022; published: Aug. 31st, 2022

Abstract

The common sequence problems in the national college entrance examination questions of Volume II are about the solution of the general term formula of the sequence and the summation of the sequence. In the National Volume II National College Entrance Examination sequence Questions over the years, the skill flexibility and comprehensive requirements for solving sequence

*通讯作者。

文章引用: 陈燕妹, 林诗游. 全国高考 II 卷数列试题解法探究及复习策略[J]. 教育进展, 2022, 12(8): 3165-3173.
DOI: 10.12677/ae.2022.128484

problems are increasing year by year. The paper uses the literature analysis method to summarize and expand the common methods of solving sequence knowledge in the national college entrance examination of volume II, organizes and applies the problem solving methods from 2014 to 2019 to the new college entrance examination, and combines the teaching practice of sequence and the experience of solving problems. Finally, we put forward some suggestions for the review of the knowledge points of the national college entrance examination number II.

Keywords

Sequence, General Term Formula, Literature Analysis

1. 引言

(一) 提出问题

数列是以正整数集(或它的有限子集)为定义域的函数，是一列有序的数。其中，等差数列和等比数列是比较特殊的有规律的数列，采用进了高中数学教材并且成为全国 II 卷高考数列的重点内容。数列是数学的主要分支，对学生计算以及对转化的思想考验极强。在全国 II 卷高考试题的大题中主要分布于第 17 题~19 题，一般分为两小题，第一小题相对简单，而第二题对技巧的掌握要求高，综合性极强，因此可以探究提高学生计算能力的基本途径，体会化归和转化的数学思想方法，进而提高学生的数学核心素养。

(二) 研究的目的和意义

等差数列和等比数列的解法有很多，针对等差数列和等比数列的一系列问题，会出现一题多解以及一题应用多种方法的现象。鉴于数列试题综合性强的特点，结合往年高考全国 II 卷中数列的解法探究，分析高考数列问题的常用解法以及可拓展解法，并分析解法的适用用法，让考全国 II 卷的考生对如何对数列进行针对性复习有一定的把握，并且能对所给的数列题进行分析进而提取较为合适的方法相对快速的进行解题。

(三) 研究现状分析

在近十年，针对高考数列问题的研究已经取得丰富的成果，姚宏远[1]对高考常考的数列通项公式的方法进行了总结，并结合高等数学的背景，提出用微分方程的新方法求数列通项公式，最后对数列的解题方法进行了三级层次分类。樊芳芳[2]根据数列的各种测试点，分析了近五年来全国高考的实际数学问题，总结了高考数列题的类型、重点和比例，最后，对高考数列中的每一类问题进行分析、分类和解答，总结出解决问题的方法。官运和[3]针对数列的多种解决方法举出相应的典型例题对不同的方法进行解释。蔡小雄[4]也对数列问题进行了多种方法的尝试。伍艳芳[5]分析近五年全国新课标卷 I 理科数学试题中“数列”考点和分值情况，找出命题的特点。尹爱军[6]利用数列的知识特点设计出一些综合性强、立意新颖、角度灵活的试题。许少华[7]阐述了几类数列热点问题的求解方法。曾辛金[8]针对 2016 年的高考数学备考，并结合 2010~2015 年全国课标 I 卷理科数学试题的分析，得出数列命题方向和复习策略。

2. 2014~2019 年全国 II 卷高考数列试题的分析研究

在高中毕业的数学学业水平考试与数学高考的考试命题中，要关注试卷的整体性[9]。因此，本章主

要讨论数列这个知识考点在全国 II 卷高考理科数学的分值占比分布和相对应的考查内容以及基本解法。

高考数列题中蕴含着许多数学思想和数学方法，在实际生活的运用以及进入高校后高等数学的研究中发挥巨大作用。近年来，高考数列命题特点主要表现为新颖程度较高，综合性较强，解答题难度偏大，对思维的灵活性考验极强，解题方法呈现多样化。

试题一般将等差数列和等比数列作为素材，命题的主题围绕数列的概念、通项公式、前有限项和以及前 n 项和展开，目的在于考查学生的数学运算、逻辑推理的核心素养，同时考查考生对数列知识、性质的掌握以及考生数列运算的能力。将数列知识作为媒介，注重知识的交叉运用，将数列函数、方程、不等式、向量、解析几何等巧妙结合进行命题，着重考查学生融会运用知识点的能力，改变传统的单一形式数列题的命题方式。选择题和填空题题型小但是问题却很巧妙，主要考查等差、等比数列概念的理解掌握以及对性质的灵活运用，解答题一般考察范围广，知识点的交叉性强，着重考查函数与方程、不等式等思想方法的巧妙结合。

全国 II 卷高考数列在理科数学单科中所占分值比重较大，分值为 5~12 分，一般会设 1~2 道小题，或者 1 道大题，在 2014~2019 年的全国 II 卷高考数列分布中，六年考试就有四次出了大题。

数列在全国 II 卷高考中设为小题主要考查的内容是求数列的前有限项和以及前 n 项和，设为大题主要考查的内容是求数列的通项公式、数列的前 n 项和及数列前 n 项和的最值问题。数列问题主要考察的解法是定义法和公式法，辅以待定系数法、放缩法、裂项相消法和函数最值法。

3. 全国 II 卷高考数列试题重点分析

本章主要对全国 II 卷高考中常见的求解数列知识的方法(除极为简单且普遍的定义法和公式法外)进行介绍，有裂项相消法、待定系数法、放缩法和函数最值法。

除了对全国 II 卷高考需要掌握的求解方法，本章还会拓展能应用于全国 II 卷高考求解数列问题的方法：不动点法和数学归纳法，进而拓宽学生的数学逻辑思维并提高学生的数学素养。

(一) 定义法、公式法

[题 1] (2015 年全国 II 卷理 4.) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_1+a_3+a_5=21$，则 $a_3+a_5+a_7=(\quad)$。

(A) 21　　(B) 42　　(C) 63　　(D) 84

解析： 根据题意中给的条件，因为 $a_1=3$，$a_1+a_3+a_5=21$，则 $a_1\left(1+q^2+q^4\right)=21$。即 $1+q^2+q^4=7$。整理得，$q^4+q^2-6=0$，所以 $q^2=2$，或者 $q^2=-3$ (舍去)。由此得，

$a_3+a_5+a_7=a_1\left(q^2+q^4+q^6\right)=3\times(2+4+8)=42$。

故选：B

分析： 本题的数列考查内容主要是求等比数列的有限项和，着重考查学生对等比数列的通项公式和性质的掌握程度，通过利用通项公式求解等比数列的基本量，若注意到项的序号之间的关系，则可减少一定的运算量。这道题之所以放置于选择题的第四小题，是因为该题属于数列题中的基本题，对学生的数列运算以及逻辑思维要求不高，大部分学生都能得心应手地计算出来，但如果学生没有注意到项的序号之间的关系，就会加大学生原本的计算量，拉长了学生做这道题消耗的时间，因此学生在审题时应当注意条件中的特殊关系，分析各个条件之间的联系，以便于快捷有效地做题。

[题 2] (2015 年全国 II 卷理 16.) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=-1$，$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，则 $S_n=$ ___。

解析： 根据题意中给的条件，$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，则可得 $S_{n+1}-S_n=S_nS_{n+1}$。两边同除以 S_nS_{n+1}，得到 $\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=-1$。又因为 $a_1=-1$，所以数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是首项为−1，公差为−1 的等差数列，通项公式

$\frac{1}{S_n}=-1-(n-1)=-n$。故 $S_n=-\frac{1}{n}$。

分析：本题的数列考查内容主要是数列通项的基本求法，利用等差数列的基本性质 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$，再根据题意 $a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，可得 $S_{n+1}-S_n=S_nS_{n+1}$，便于求解，两边同除以 S_nS_{n+1}，进而得到 $\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=-1$，然后利用等差数列的通项公式即可得出数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的通项公式，最后通过数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的通项公式求出 S_n。本题对等差数列的性质考查微妙且细致，学生必须掌握灵活的转化思想，否则会导致本题计算量成倍增加。

[题 3] (2016 年全国 II 卷理 17.) S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=1$，$S_7=28$。记 $b_n=[\lg a_n]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[0.9]=0$，$[\lg 99]=1$。1) 求 b_1、b_{11}、b_{101}；2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 1000 项和。

解析：1) 由题意可设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$a_1=1$，由此可以联立方程组，$\begin{cases}7+21d=28\\a_1=1\end{cases}$，解得 $d=1$。即 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$。由此可得 $b_1=[\lg 1]=0$，$b_{11}=[\lg 11]=1$，$b_{101}=[\lg 101]=2$。

2) 因为当 $1\le n<10$ 时，$b_n=0$；当 $10\le n<100$ 时，$b_n=1$；当 $10\le n<100$ 时，$b_n=2$；当 $n=1000$ 时，$b_n=3$，因此 $\{b_n\}$ 前 1000 项和为 $1\times 90+2\times 900+3\times 1=1893$。

分析：本题是一道关于等差数列的题目，考查内容主要是求数列的个别项和前有限项和。

对于 1) 中的问题，主要利用数列递推式，根据题目中所给的条件 $a_1=1$，$S_7=28$ 求出等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d，进而便可求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，再根据条件 $b_n=[\lg a_n]$ 进行解题，这一小题属于基础题，简单考查了数列的基本运算问题以及对数函数的运算性质。

对于 2) 中的问题是简单的数列求和问题，体现了分类的数学思想，再结合题(1)中得到的数列 $\{b_n\}$ 的规律，分类讨论，即可求出数列 $\{b_n\}$ 的前 1000 项和。

[题 4] (2019 年全国 II 卷理 19.)已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1$，$b_1=0$，$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$，$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$。1) 证明：$\{a_n+b_n\}$ 是等比数列，$\{a_n-b_n\}$ 是等差数列；2) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

解析：1) 由题意 $4(a_{n+1}+b_{n+1})=2(a_n+b_n)$，化简得 $a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$，又因为 $a_1=1$，$b_1=0$，所以 $a_1+b_1=1$。因此 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列。又由 $4(a_{n+1}-b_{n+1})=4(a_n-b_n)+8$，可得 $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$。同理可知 $a_1-b_1=1$，因此 $\{a_n-b_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列。

2) 由 1) 可知，$a_n+b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，$a_n-b_n=2n-1$，

所以 $a_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)+(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}+n-\frac{1}{2}$。

同理，$b_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)-(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}-n+\frac{1}{2}$。

分析：本题的数列考查内容主要是判断数列性质以及求数列的通项公式，技巧性比较强，题目较为新颖，需要灵活的数学思路，求解时要善于抓住所给条件的特点，否则计算难度极大甚至求解不出结果。

对于 1) 中的问题，通过仔细审题，根据问题所问的数列形式 $\{a_n+b_n\}$ 以及 $\{a_n-b_n\}$，把题目所给的条件 $4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$、$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$ 转化成相对应的形式，即可通过数列的基本性质对数列进行判断。

2) 中的问题可以由 1) 中求得的数列$\{a_n+b_n\}$和$\{a_n-b_n\}$的通项公式变换整理、简单运算即可得到数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式。

(二) 待定系数法、放缩法(拓展不动点法、数学归纳法)

待定系数法：

已知数列$\{a_n\}$的项满足$a_1=c$，$a_{n+1}=sa_n+t$ (其中$s\neq 0$，$s\neq 1$，$t\neq 0$)，令$a_{n+1}+k=s(a_n+k)$，再解出$k=\dfrac{t}{s-1}$，从而构造出等比数列，由等比数列通项公式求得通项a_n。

放缩法：

为了证明不等式$A\leq B$，可找一个(或多个)中间量C与A、B作比较，若能判断出$A\leq C$和$C\leq B$同时成立，那么$A\leq B$明显成立。所谓“放”即把A放大到C，再把C放大到B。相反，由B缩小到C，再把C缩小到A称为“缩”，“放”和“缩”统称为放缩法。放缩法要求较强的技巧性，必须时刻注意放缩的跨度，放不能过大，缩不能过小。

不动点法：

已知数列$\{a_n\}$的项满足$a_1=c$，$a_{n+1}=sa_n+t$，其中$s\neq 0$，$s\neq 1$，$t\in N^*$，则称方程$x=sx+t$为数列$\{a_n\}$的不动点方程，可设不动点方程的根为x'，故：

1) 当$x'=a_1$时，数列$\{a_n\}$为常数数列。

2) 当$x'\neq a_1$时，数列$\{a_n-x'\}$是以s公比的等比数列。

数学归纳法：

数学归纳法通常被用于证明某个给定命题在整个(或者局部)自然数范围内成立，分为三个步骤：

1) 证明$n=1$时，命题成立；

2) 假设时$n=k(k\geq 1)$，命题成立；

3) 推导$n=k+1$时，命题成立。

[题 5] (2014 年全国 II 卷理 17.)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$。1) 证明$\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；2) 证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$。

解析：1) 解法一(待定系数法)：由于$a_{n+1}=3a_n+1$，得$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(a_n+\dfrac{1}{2}\right)$。又因为$a_1=1$，则$a_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，所以$\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$是首项为$\dfrac{3}{2}$，公比为3的等比数列。由此可以得到$\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$的通项公式为$a_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3^n}{2}$，故$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{3^n-1}{2}$。

解法二(不动点法)：该数列相对应的不动点方程$x=3x+1$，则不动点方程的根$x'=-\dfrac{1}{2}\neq 1$，因此数列$\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$是首项为$\dfrac{3}{2}$，公比为 3 的等比数列。由此得到$a_n=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\cdot 3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$。

解法三(数学归纳法)：考察该数列的前 5 项，得$a_1=1$；$a_2=3a_1+1=4$；$a_3=3a_2+1=13$；$a_4=3a_3+1=40$；$a_5=3a_4+1=121$。由此，可以猜想$a_n=\dfrac{3^n-1}{2}$，下面用数学归纳法来证明猜想：当$n=1$时，$a_1=1$，等式成立；假设当$n=k$时$a_k=\dfrac{3^k-1}{2}$成立；则当$n=k+1$时，$a_{k+1}=3a_k+1=3\times\dfrac{3^k-1}{2}+1=\dfrac{3^{k+1}-1}{2}$成立；综上所述，对一切$n\in N$，等式成立。

DOI: 10.12677/ae.2022.128484

2) 由 1) 可知$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}$，因为当$n\geq 1$时，$3^n-1\geq 2\times 3^{n-1}$，由此可以得到$\frac{1}{3^n-1}\leq\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$。即有$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leq 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{3}{2}$。故能得到结果$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$。

分析：本题的数列考查内容主要是等比数列的通项公式及数列的比较问题，有较为突出的技巧性，对学生的思维逻辑能力有很大的要求。

对于 1) 中的问题，解析中对于$a_{n+1}=sa_n+t$ (其中 s、t 是常数，且$s\neq 0$)这类型的题目选择了用待定系数法将“t”化为 0 的方法。该小题引入了一个参数 k，使得$a_{n+1}-k=3\left(a_n-k\right)$，整理即可得到$a_{n+1}=3a_n-2k$，将其与题意中所给的$a_{n+1}=3a_n+1$相比较，可以计算出$k=-\frac{1}{2}$，从而即可得出数列$\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$是首项为$\frac{3}{2}$，公比为 3 的等比数列，再通过$\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$的通项公式得到$\left\{a_n\right\}$的通项公式。

对于 2) 中的问题，通过 1) 的解析中的$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=\frac{3^n-1}{2}$，得出$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}$，并直接利用不等式的放缩技巧对$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的通项公式进行有效放缩，即放缩既不能太大也不能太小，而且还能方便求出结果。放缩法的掌握极为考查学生的思维强度和学生的数学运算能力，因此教师平时在教学时应注意对学生进行适度的数学运算训练，不断提高学生的运算能力和加强培养学生的逻辑思维能力，逐渐养成必需的数学运算素养。

(三) 裂项相消法

裂项相消法：

裂项相消法是将数列的一项拆成两项或多项，使得前后项相抵消，留下有限项，从而求出数列的前 n 项和。

[题 6] (2017 年全国 II 卷理 15.)等差数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$__。

解析：由题意可设$\left\{a_n\right\}$的首项为a_1，公差为 d，因为$a_3=3$，$S_4=10$，由此可以得出方程组$\begin{cases}a_1+2d=3\\4a_1+6d=10\end{cases}$，解得$a_1=1$，$d=1$。则容易得到等差数列的前 n 项和为$S_n=na_1+\frac{n\left(n-1\right)}{2}\times d=n\times 1+\frac{n\left(n-1\right)}{2}\times 1=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$，又$\frac{1}{S_k}=\frac{2}{k\left(k+1\right)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$，因此

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}。$$

分析：本题的数列考查内容主要是等差数列$\left\{a_n\right\}$前 n 项和，即数列的求和问题，体现了转化的数学思想，需要一定的运算技巧，根据题目中所给的条件$a_3=3$，$S_4=10$，解得等差数列$\left\{a_n\right\}$的首项a_1以及公差 d，进而求出等差数列的前 n 项和S_n，再将其转化成$\frac{1}{S_k}$的表现形式，然后利用裂项相消法化简所求的表达式，即可得到结果。2017 年的数列分值比重是近六年最少的一次，就只以填空题的形式考了一道小题，主要是考查学生们对裂项相消法的掌握程度。

(四) 函数最值法

函数最值法：

函数最值法就是将数列的前 n 项和S_n看成是关于 n 的二次函数，运用我们学过的配方法，结合函数

的单调性及数形结合思想解决数列的最值问题，此时项数 n 是正整数。

[题 7] (2018 年全国 II 卷理 17.)记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$，$S_3=-15$。1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；2) 求 S_n，并求 S_n 的最小值。

解析：1) 因为等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-7$，$S_3=-15$，由此可以得出方程组 $\begin{cases}a_1=-7\\3a_1+3d=-15\end{cases}$，解得 $a_1=-7$，$d=2$，所以 $a_n=-7+2(n-1)=2n-9$，

2) 由 1) 知，$a_1=-7$，$d=2$，$a_n=2n-9$，

故 $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{1}{2}(2n^2-16n)=n^2-8n=(n-4)^2-16$，

所以当 $n=4$ 时，前 n 项的和 S_n 取得最小值为−16。

分析：本题的数列考查内容主要是等差数列的通项公式及数列前 n 项和的最值问题，要注意的是，数列是自变量为正整数的一类特殊函数，本题涉及到函数问题中二次函数的最值问题。

对于 1) 中的问题，简单地考查了数列的通项公式和性质，根据题目中所给的条件 $a_1=-7$，$S_3=-15$ 求出数列 $\{a_n\}$ 的公差 d，即可得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，这道题属于常规的数列运算。

对于 2) 中的问题，通过题 1) 的计算可知条件 $a_1=-7$，$d=2$ 和 $a_n=2n-9$，再利用求和公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 或者 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ 求出等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，最后利用二次函数的配方法求出 S_n 的最小值。

4. 对 2020~2021 新高考的适应性

[题 8] (2020 年新全国 II 卷理 14.)将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$，则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为。

解析：(定义法、公式法)由题意将数列 $\{2n-1\}$ 与数列 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到 $\{a_n\}$ 可知，$\{a_n\}$ 是以 1 为首项，以 6 为公差的等差数列，因此所求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\times d=n\times1+\frac{n(n-1)}{2}\times6=3n^2-2n。$$

故答案为：$3n^2-2n$。

[题 9] (2020 年新全国 II 卷理 18.)已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20$，$a_3=8$。1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；2) 求 $a_1a_2-a_2a_3+\cdots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$。

解析：1) (公式法)由题意，可设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，可知 $q>1$，则 $a_3=a_1q^2=8$，$a_2+a_4=a_1q+a_1q^3=20$，解得 $a_1=2$，故 $a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$。

2) 原式 $=2^3-2^5+2^7-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot2^{2n+1}=\dfrac{2^3\left[1-(-2^2)^n\right]}{1-(-2^2)}=\dfrac{8}{5}-(-1)^n\dfrac{2^{2n+3}}{5}$.

[题 10] (2021 年新全国 II 卷理 17.)记 S_n 是公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。若 $a_3=S_3$，$a_2a_4=S_4$。1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；2) 求使 $S_n>a_n$ 成立的 n 的最小值。

解析：1) (公式法)由题意，$a_3=S_3$，$a_2a_4=S_4$，可得 $(a_1+d)(a_1+3d)=4a_1+6d$，$a_1+2d=3a_1+3d$，解得 $a_1=-\frac{8}{5}$，$d=\frac{16}{5}$，因此 $a_n=-\frac{24}{5}+\frac{16}{5}n$。

2) (函数最值法)由题 1) 可知，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=-\frac{24}{5}+\frac{16}{5}n$，所以 $S_n=\frac{8n^2-16n}{5}$，

$S_n - a_n = \frac{8n^2-16n}{5} - \left(-\frac{24}{5}+\frac{16}{5}n\right) = \frac{(4n-4)(2n-6)}{5}$。显然，当 $n \ge 4$ 时，$S_n > a_n$ 成立，故 n 的最小值为 4。

5. 数列求解方法的比较以及复习备考建议

(一) 高考数列求解方法的比较

全国 II 卷和新全国 II 卷高考数列问题主要考察的解法是定义法和公式法，这说明考察重点在于测试学生的对数列的基础性知识掌握程度，难度不大；待定系数法和不动点法是针对满足 $a_1 = c$，$a_{n+1} = sa_n + t$ (其中 $s \ne 0$，$s \ne 1$，$t \ne 0$)型的便捷解法，极好掌握；放缩法是证明数列型不等式的重要解法，通过将左边(右边)的式子放大或缩小去接近右边(左边)的式子，要求较强较为灵活的技巧性，注意放缩的跨度，放不能过大，缩不能过小。

裂项相消法是数列求和的重点解法，将数列的一项拆成两项或多项，使得前后项相抵消，最后得到结果；函数最值法要求学生能将数列知识和二次函数的知识相结合；数学归纳法是知道数列的前一项和后一项的关系后，列出可求的有限项，观察它们之间的规律并归纳，最后运用数学归纳法进行证明，这对学生数字敏感性要求极高。

(二) 对后续新全国 II 卷高考数列复习备考建议

1) 高考数列复习并非意味着高三数列复习。它应该是学生从开始学习数列就要着手准备的，并且可以联系在此之前初中和高中学的函数知识和不等式知识等，这几个知识相互渗透相互联系。数列若是以综合性大题的形式出题，有时会将数列与不等式结合起来考察，有时会将数列与函数结合起来考察。因此，数列知识点的复习的方式不应该是直线式上升，只是一味的传授与接受单纯的数列知识，数列知识点的复习应该是以波浪式前进和螺旋式上升的方式进行知识的教学与接收。

2) 当数列题以大题的形式出现时，第二小题总与第一小题息息相关，并通过第一小题的结果得出第二小题的答案，而第一小题主要是求数列的通项公式，求解数列的通项公式要求学生熟练掌握数列的通项公式以及性质，否则无法将其应用到题目中去，达到学以致用的效果。第二小题的需要在第一小题的前提条件下更深入地考察数列知识。因此，第二小题考察的知识内容专业性更强，对学生解题技巧的掌握要求更高，所涉及的知识面综合性更全。若出题的老师想将题目设计的更为新颖，第二小题是最佳的设计处。因此，平时教师在讲数列题目时，在大题的第二小题需要花费的心思应为更多，不仅可以提升学生的数学数列知识的理解水平，还可以拓展学生的数学解题思维。

3) 无论是全国 II 卷还是新全国 II 卷，试题都源自于教材而却又高于教材，数列题出在填空题时，题目分别分布在第十五题与第十六题，属于较难题，极为考验学生对数列这个知识点的掌握程。若数列出在大题的第二小题时，除了考察学生对数列知识掌握的技巧性和灵活性之外，更为考察学生对数学各个知识点的综合性。但是总体考察内容上深度和广度适宜，知识的跨度并没有很大，大部分是通过教材上的例题和习题整改得出的。

由此可知在高考数学的复习备考中，无论是教师还是学生，都应该一切从课本出发，以教材为本，明确考纲，加强四基，对课本上的例题、知识点以及习题加以概括、提升和拓展，达到举一反三的效果。师生还应重视等差数列等比数列的概念和性质的研究，掌握分组求和法、裂项相消法、错位相减法等对数列前 n 项和的求法。在教学条件和学生能力允许的状况下，可以拓展放缩法和不动点法，拓宽学生的一题多解思维。

致　谢

感谢编辑和各位审稿专家对本文所付出的劳动。

基金项目

本文受到海南师范大学教育教学改革研究项目(项目名称：基于超星学习通的大学数学线上课程资源建设及使用；项目编号：hsjg2022-15)和海南省自然科学基金(项目名称：非齐次 Boltzmann 方程测度解的光滑性效应；项目编号：2019RC186)的资助。

参考文献

[1] 姚宏远. 提高学生解决数列问题能力的方法研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西北大学, 2017.

[2] 樊芳芳. 高考数列解题方法的研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西北大学, 2016.

[3] 官运和. 初等数学研究[M]. 北京: 清华大学出版社, 2017: 134-146.

[4] 蔡小雄. 更高更妙的高中数学思想与方法[M]. 第十版. 杭州: 浙江大学出版社, 2018: 118-143.

[5] 伍艳芳. 全国新课标 I 卷“数列”的命题研究和备考建议——以近五年高考数学理科试题为例[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2018(4): 30-33.

[6] 尹爱军. 以“数列”为背景的高考新颖试题赏析[J]. 思茅师范高等专科学校学报, 2008(3): 94-97.

[7] 许少华. 高考数列问题的五大热点[J]. 中学数学杂志, 2002(3): 43-46.

[8] 曾辛金. 近六年全国高考数学课标卷试题分析与备考建议——以课标 I 卷理科试题为例[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2015(17): 4-14.

[9] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 88-90.